Université Saâd DAHLAB-Blida 1
Faculté des sciences
Département de physique

lundi 04 novembre 2019
15H00 à 17h00

Filière : Physique
Spécialité : Physique théorique
Epreuve de spécialité : Théorie des Champs

Concours pour l'accès à la Formation de Doctorat 3ième Cycle
(Sujet No : 3)

Exercice 1. (Sur les relations de (anti-)commutation.)

Soit deux bases orthonormées $\{\phi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ et $\{\widetilde{\phi}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de l'espace des états à **une** particule, avec :

$$\widetilde{\phi}_n(\overrightarrow{r}) = \sum_m \beta_{nm}\phi_m(\overrightarrow{r}) \qquad \text{et} \qquad \beta_{nm} = \langle \phi_m(\overrightarrow{r}) | \widetilde{\phi}_n(\overrightarrow{r})\rangle.$$

On désigne par a_n (resp. $a_n^\dagger$) et $\widetilde{a}_n$ (resp. $\widetilde{a}_n^\dagger$) les opérateurs d'annihilation (resp. création) associés à la base $\{\phi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ (resp. $\{\widetilde{\phi}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$).

1. Rappeler les relations de commutation et d'anti-commutation satisfont les couples $(a_n, a_n^\dagger)$ et $(\widetilde{a}_n, \widetilde{a}_n^\dagger)$.
2. Donner la condition d'orthonormalité de la base $\{\widetilde{\phi}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.
3. On donne :

$$\widetilde{a}_n^\dagger = \sum_m \beta_{nm} a_m^\dagger \qquad \text{et} \qquad \widetilde{a}_n = \sum_m \beta_{nm}^* a_m. \tag{1}$$

   Montrer que (1) vérifient les relations de commutation et d'anti-commutation pour le couple $(\widetilde{a}_n, \widetilde{a}_n^\dagger)$.

Exercice 2. (Sur le champ scalaire neutre.)

Pour un champ scalaire neutre $\varphi(x)$, avec $x = (it, \overrightarrow{r})$, l'action physique à ce genre de modèle s'écrit :

$$S = \int d^4x\, \mathcal{L} = \frac{1}{2}\int d^4x\, (\partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi - m^2\varphi^2) \qquad (\hbar = c = 1)$$

où $\mathcal{L} = \int d^3\overrightarrow{r}\, L$ est la densité lagrangienne et L est le lagrangien. On adopte dans cet exercice la signature $(+ - - -)$.

1. Donner un exemple d'une particule associée à ce type de champ. Justifier votre réponse.
2. En appliquant l'équation d'Euler-Lagrange à $\varphi(x)$, montrer que ce dernier satisfait l'équation de Klein-Gordon.
3. Donner le moment conjugué $\Pi(x)$ de $\varphi(x)$.
4. Exprimer alors l'hamiltonien H et la densité hamiltonienne $\mathcal{H}$ associé au champ $\varphi(x)$.
5. Donner une solution particulière à l'équation de Klein-Gordon. Montrer que l'énergie quantifiée admet deux solutions différentes. Discuter leur sens physique.

Exercice 3. (Sur l'interaction, jauge et invariance.)

Considérons un champ fermionique. Le champ **libre** est décrit par la densité lagrangienne de Dirac donnée par :

$$\mathcal{L}_{\text{libre}} = \overline{\psi}\,(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\,\psi, \qquad (\hbar = c = 1).$$

1. Donner l'expression de $\overline{\psi}$ en termes de $\psi^\dagger$. Selon vous, pourquoi $\overline{\psi}$ est mieux adapté aux calculs que $\psi^\dagger$?
2. En appliquant la transformation : $\psi(x) \to \psi' = e^{i\theta}\psi(x)$, avec $\theta \neq \theta(x)$. Montrer que $\mathcal{L}_{\text{libre}}$ est invariant. Comment appelle-t-on une telle transformation ?
3. Appliquons maintenant la même transformation, telle que :

$$\psi(x) \to \psi' = \exp[i\,\theta(x)]\,\psi(x), \qquad (\text{avec } \theta = \theta(x)). \tag{2}$$

   - Exprimer la quantité $\partial_\mu\psi'$.
   - Montrer que $\mathcal{L}_{\text{libre}}$ se transforme sous l'effet de l'action (2) comme ;

$$\mathcal{L}_{\text{libre}} \to \mathcal{L}'_{\text{libre}} = \mathcal{L}_{\text{libre}} + \mathcal{F}(\psi, \overline{\psi}, \partial_\mu\theta).$$

   - Donner alors l'expression de $\mathcal{F}(\psi, \overline{\psi}, \partial_\mu\theta)$.

- Comment appelle-t-on une transformation de type (2).

4. On voit bien que la densité lagrangienne n'est plus invariante sous l'effet de transformation (2). Afin de restaurer l'invariance, nous sommes dans l'obligation d'ajouter un terme qui **compense** celui de $\mathcal{F}(\psi, \overline{\psi}, \partial_\mu \theta)$. Ce faisant, on pose : $D_\mu = \partial_\mu - igA_\mu$.
   - Définissez D_μ, g et A_μ.
   - Calculer $(D_\mu \psi)'$ sous l'action de la transformation (2).
   - En imposant $(D_\mu \psi)' = e^{i\,\theta(x)}\, D_\mu \psi$, expliciter comment se transforme A'_μ en termes de A_μ et $\partial_\mu \theta$.
   - Montrer que $\mathcal{L}_{\text{libre}}$ devient : $\mathcal{L}_{\text{libre}} \to \mathcal{L} = \overline{\psi}\,(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\,\psi + \mathcal{L}_{\text{int}}$.
   - Donner alors l'expression de $\mathcal{L}_{\text{int}}$. Que représente-il ? Enfin donner un exemple physique à $\mathcal{L}_{\text{int}}$.

Université de Blida 1
Faculté desSciences
Départementde Physique

lundi 04 septembre 2019
13H00-14H30

Filière Physique
Spécialités : Physique des Rayonnements, Physique des Matériaux et Physique Théorique
Epreuve de base : Mécanique Quantique

Concours pour l'accès à la Formation de Doctorat 3ème Cycle
(Sujet N° : 01)

Examen de Mécanique Quantique

EXERCICE 1: (12 pts)

Les éléctrons de conduction dans les métaux sont soumis à un potentiel moyen de la forme : (voir figure 1)

$$V(x) = \begin{cases} 0 \; pour \; x < 0 \\ V_0 \; pour \; x > 0 \end{cases}$$

Soit E l'energie totale d'un éléctron de conduction de masse m s'approchant de la surface du métal. On étudiera les cas suivants :

a - $E > V_0$.
b - $0 < E < V_0$.

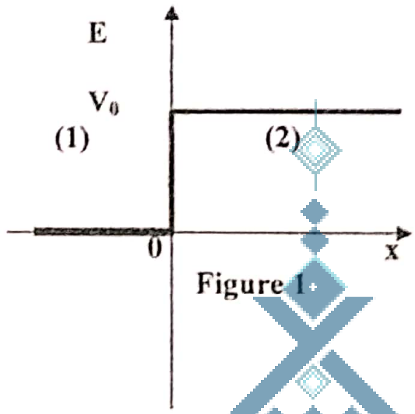


Figure 1

1. Donner l'equation de shrodinger pour les états stationnaires dans les milieux (1) et (2).
2. Ecrire les équations de continuités en x = 0.
3. Calculer les coefficients de probabilité de transmission t et de réflexion r de cette éléctron.

EXERCICE 2: (08 pts)

On considère un oscillateur harmonique de pulsation ω, constitue par une particule de masse m se déplaçant sur l'axe Ox. On le soumet à une perturbation quadratique W de la forme :

$$W = \frac{\alpha}{4}(a + a^+)^2 \hbar\omega \qquad 0 < \alpha \ll 1$$

a et a^+ étant les opérateurs d'annihulation et de création.

On notera $E_n^{(0)}$ et $|n\rangle$ les énergies et vecteurs propres de l'Hamiltonien non perturbé H_0, E_n et $|\psi_n\rangle$ ceux de l'Hamiltonien $H = H_0 + W$.

On appliquons la théorie des perturbations stationnaires :

1. Montrer que seuls les élements matriciels suivants sont non nuls :

$$\langle m|W|n\rangle \neq 0 \;\; \text{pour} \;\; m = n \text{ et } m = n \pm 2$$

2. En déduire :

   i) La correction $E_n^{(1)}$ de l'énergie au premier ordre d'approximation.

   ii) La correction $E_n^{(2)}$ d'ordre deux.

3. Montrer que les états propres $|n\rangle$ sont contaminés par les états $|n+2\rangle$ et $|n-2\rangle$: on donnera les états stationnaires $|\psi_n\rangle$ jusqu'à l'ordre un d'approximation.

On donne : $[a, a^+] = 1, \quad a^+a = N, \;\; N|n\rangle = n\,|n\rangle, \;\; a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle \;\; et \;\; a^+|n\rangle = \sqrt{n+1}\cancel{|n\rangle}$
$|n+1\rangle$

Corrigé du concours pour l'accès à la formation de doctorat 3ième Cycle
(Sujet No : 3)

Correction de l'exercice 1. (4 points)

1. Les relations de commutation et d'anti-commutation sont données par :

$$0{,}25 \quad [\tilde{a}_i^\dagger, \tilde{a}_j^\dagger]_\pm = [\tilde{a}_i, \tilde{a}_j]_\pm = 0 \;\; 0{,}25 \qquad \text{et} \qquad [\tilde{a}_i, \tilde{a}_j^\dagger]_\pm = \delta_{ij}\,\mathbb{I}, \quad 0{,}25$$

$$0{,}25 \quad [a_i^\dagger, a_j^\dagger]_\pm = [a_i, a_j]_\pm = 0 \;\; 0{,}25 \qquad \text{et} \qquad [a_i, a_j^\dagger]_\pm = \delta_{ij}\,\mathbb{I}, \quad 0{,}25$$

où le signe + (resp. −) désigne l'anti-commutateur (resp. commutateur).

2. La condition d'orthonormalité de la base $\{\tilde{\phi}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est comme suit :

$$\langle\tilde{\phi}_i|\tilde{\phi}_j\rangle = \sum_{n,m}\langle\tilde{\phi}_m|\beta^*_{im}\beta_{jn}|\tilde{\phi}_n\rangle = \sum_{n,m}\beta^*_{im}\beta_{jn}\langle\tilde{\phi}_m|\tilde{\phi}_n\rangle = \sum_m \beta^*_{im}\beta_{jm} = \delta_{ij}. \quad 0{,}5$$

3. Le premier (anti-)commutateur s'écrit :

$$\begin{aligned}
[\tilde{a}_i^\dagger, \tilde{a}_j^\dagger]_\pm &= \left(\sum_m \beta^*_{im} a_m^\dagger\right)\left(\sum_n \beta_{jn} a_n^\dagger\right) \pm \left(\sum_n \beta_{jn} a_n^\dagger\right)\left(\sum_m \beta^*_{im} a_m^\dagger\right) \\
&= \sum_{n,m}\beta^*_{im}\beta_{jn}\left(a_m^\dagger a_n^\dagger \pm a_n^\dagger a_m^\dagger\right) \\
&= \sum_{n,m}\beta^*_{im}\beta_{jn}[a_m^\dagger, a_n^\dagger]_\pm \\
&= 0.
\end{aligned} \quad 0{,}5$$

Il en est de même pour $[\tilde{a}_i, \tilde{a}_j]_\pm = 0$. 0,5
Pour le dernier (anti-)commutateur, le calcul conduit à :

$$\begin{aligned}
[\tilde{a}_i, \tilde{a}_j^\dagger]_\pm &= \left(\sum_m \beta^*_{im} a_m\right)\left(\sum_n \beta_{jn} a_n^\dagger\right) \pm \left(\sum_n \beta_{jn} a_n^\dagger\right)\left(\sum_m \beta^*_{im} a_m\right) \\
&= \sum_{n,m}\beta^*_{im}\beta_{jn}\left(a_m a_n^\dagger \pm a_n^\dagger a_m\right) \\
&= \sum_{n,m}\beta^*_{im}\beta_{jn}[a_m, a_n^\dagger]_\pm \\
&= \sum_{n,m}\beta^*_{im}\beta_{jn}\delta_{nm}.
\end{aligned} \quad 0{,}5$$

Cependant, de la seconde question, nous avons obtenu la condition d'orthonormalité de la base $\{\tilde{\phi}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Ainsi, le (anti-)commutateur $[\tilde{a}_i, \tilde{a}_j^\dagger]_\pm$ donne :

$$[\tilde{a}_i, \tilde{a}_j^\dagger]_\pm = \delta_{ij}\,\mathbb{I}. \quad 0{,}5$$

Correction de l'exercice 2. (7 points)

1. Probablement la particule représentatrice de ce type de champ est le *pion neutre*, noté π^0. 0,25
0,5 On dit que le champ est neutre (ou encore réel) parce que π^0 est sa propre anti-particule, à l'instar des pions chargés $\pi^\pm$ qui représentent des champs chargés (ou complexes).
2. L'équation d'Euler-Lagrange pour le champ $\varphi(x)$ est :

$$0{,}5 \qquad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi} - \partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)} = 0, \qquad (\mu = 0, 1, 2, 3).$$

En effectuant les différentes dérivées, on trouve facilement :

$$0{,}5 \quad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi} = -m^2\varphi \quad \text{et} \quad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)} = \partial^\mu\varphi \;\; 0{,}5 \quad \Rightarrow \quad \partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)} = \partial_\mu\partial^\mu\varphi \equiv \Box\varphi, \quad 0{,}5$$

et en combinant les deux expressions, on déduit :

$$0{,}5 \qquad \left(\Box + m^2\right)\varphi(x) = 0, \qquad (\Box \text{ est le d'alembertien})$$

dite : équation d'onde de Klein-Gordon.

3. Le moment conjugué (l'impulsion) est donné par :

$$\Pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = \dot{\varphi}. \quad (0{,}5)$$

4. Dès lors, l'hamiltonien H est donné selon l'expression :

$$\mathcal{H}(x) = \Pi\dot{\varphi} - \mathcal{L} \equiv \dot{\varphi}^2 - L = \dot{\varphi}^2 - \frac{1}{2}(\dot{\varphi}^2 - \nabla^2\varphi - m^2\varphi) = \frac{1}{2}(\dot{\varphi}^2 + (\nabla\varphi)^2 + m^2\varphi). \quad (0{,}5)$$

Par conséquent, la densité hamiltonienne $\mathcal{H}$ est :

$$H = \int d^3\vec{r}\,\mathcal{H}(x) \equiv \frac{1}{2}\int d^3\vec{r}\,(\dot{\varphi}^2 + (\nabla\varphi)^2 + m^2\varphi^2). \quad (0{,}5)$$

5. La solution à l'équation de Klein-Gordon est une **onde plane** et dont l'expression est donnée par :

$$\varphi(x) \equiv \varphi(\vec{r}, t) \sim \exp[-i\,k_\mu x^\mu] = \exp\left[-iEt + i\,\vec{k}\cdot\vec{r}\right]. \quad (0{,}5)$$

En substituant cette dernière dans l'équation de Klein-Gordon et en tenant compte de la sommation d'Einstein, on déduit :

$$(0{,}5)\quad k^2 \equiv -\vec{k}^2 + E^2 = m^2 \qquad \Rightarrow \qquad E_k = \pm\left(\vec{k}^2 + m^2\right)^{1/2} = \pm\omega_k. \quad (0{,}5)$$

(0,75) L'énergie quantifiée et associée à ce genre de champ admet deux solutions opposables l'une à l'autre. La solution positive correspond à une particule mais la solution négative reste une énigme ! Cependant, la quantification des champs classiques permet de résoudre ce problème, elle associe les énergies négatives aux anti-particules.

Correction de l'exercice 3. **(9 points)**

$\psi^\dagger\psi$

$\overline{\psi} \to \overline{\psi'} = \overline{\psi}S^{-1}$

$\psi \to \psi' = S\psi$

Non

$\overline{\psi}\psi \to \overline{\psi'}\psi' = \overline{\psi}\psi$

1. $\overline{\psi} = \psi^\dagger\gamma^0$, où γ^0 est l'une des matrices de Dirac. (0,25)
(0,5) En effet, il est souhaitable d'utiliser $\overline{\psi}$ au lieu de $\psi^\dagger$ puisque ~~$\overline{\psi}$ est un **invariant de Lorentz** alors que $\psi^\dagger$ ne l'est pas~~.

2. On a $\overline{\psi}' = \psi'^\dagger\gamma^0$ et $\psi' = e^{i\theta}\psi$, alors il devient évident que $\overline{\psi}' = \overline{\psi}\,e^{-i\theta}$ (0,25), d'où : (0,25)

$\overline{\psi'} = \psi'^\dagger\gamma^0$ (0,25)

$\psi'^\dagger = \psi^\dagger e^{-i\theta}$

$\overline{\psi'} = \overline{\psi}e^{-i\theta}$

$$\mathcal{L}'_{\text{libre}} = \overline{\psi}'(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi' = \overline{\psi}e^{-i\theta}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)e^{i\theta}\psi = \mathcal{L}_{\text{libre}}. \quad (0{,}5)$$

de Cette transformation est souvent appelée : **transformation de jauge globale**, puisque elle est indépendante du quadri-verteur x. On voit bien que la densité lagrangienne libre de Dirac reste **invariante** sous l'effet de telles transf. jauges.

3. • On a :

$$\partial_\mu\psi' = \partial_\mu(e^{i\theta(x)}\psi) = e^{i\theta(x)}(\partial_\mu + i\partial_\mu\theta(x))\psi, \quad (0{,}5)$$

et ne commute pas avec la fonction exponentielle.

• Avec cette nouvelle transformation, la nouvelle densité lagrangienne devient :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}'_{\text{libre}} &= \overline{\psi}'(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi' \\
&= \overline{\psi}e^{-i\theta(x)}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)e^{i\theta(x)}\psi \\
&= e^{-i\theta(x)}\overline{\psi}\,i\gamma^\mu e^{i\theta(x)}(\partial_\mu + i\partial_\mu\theta(x))\psi - m\overline{\psi}\psi \\
&= \overline{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - \gamma^\mu\partial_\mu\theta(x))\psi - m\overline{\psi}\psi \\
&= \mathcal{L}_{\text{libre}} - \overline{\psi}\gamma^\mu\,(\partial_\mu\theta(x))\,\psi.
\end{aligned} \quad (1)$$

• Il est alors facile de constater que : $\mathcal{F}(\overline{\psi}, \psi, \partial_\mu\theta) = -\overline{\psi}\gamma^\mu\,(\partial_\mu\theta(x))\,\psi$. (0,25)

(0,5) • Contrairement à la jauge globale introduite ci-dessus, la transformation (2) est appelée : **une jauge locale**, puisque elle dépend intrinsèquemnt du quadri-vecteur x. Ce type de jauge est probablement l'un des grands succès de la théorie quantique des champs, car elle (la jauge locale) permet d'expliquer l'ensemble des interactions exitantes (il en existe que quatre !) dans la nature. En gros, *la nature est LOCALE !*

(0,25) 4. • Dans l'expression $D_\mu = \partial_\mu - igA_\mu$, g est une constante (de couplage propre à l'interaction !!), A_μ est un champ vectoriel et D_μ désigne une différentielle, appelée : **la dérivée covariante**.

• Un calcul simple conduit à :

$$\begin{aligned}
(D_\mu\psi)' &= (\partial\mu - igA'_\mu)\psi' \qquad (\text{avec } \psi' = \exp[i\theta(x)]\psi) \\
&= e^{i\theta(x)}(\partial_\mu + i\partial_\mu\theta(x))\psi - igA'_\mu e^{i\theta(x)}\psi \\
&= e^{i\theta(x)}\,(\partial_\mu + i\partial_\mu\theta(x) - igA'_\mu)\,\psi
\end{aligned} \quad (1)$$

- Comme $(D_\mu\psi)' = e^{i\theta(x)}\, D_\mu\psi$, alors ce dernier se transforme en :

$$(D_\mu\psi)' = e^{i\theta(x)}\left(\partial_\mu + i\partial_\mu\theta(x) - igA'_\mu\right)\psi \equiv e^{i\theta(x)} D_\mu\psi = e^{i\theta(x)}\left(\partial_\mu - igA_\mu\right)\psi,$$ 0,5

soit encore, en comparant les deux membres de l'équation, le champ vectoriel A_μ se transforme comme suit :

$$\boxed{A'_\mu = A_\mu + \frac{1}{g}\,\partial_\mu\theta(x).}$$ 0,25

- Etant donné que $D_\mu = \partial_\mu - igA_\mu$, alors la densité lagrangienne libre de Dirac se transforme en :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{libre}} \quad \to \quad \mathcal{L} &= \overline{\psi}\left[i\gamma^\mu\partial_\mu - m\right]\psi \\ &= \overline{\psi}\left[i\gamma^\mu\left(D_\mu + igA_\mu\right) - m\right]\psi \\ &= \overline{\psi}\left[i\gamma^\mu D_\mu - m\right]\psi - g\overline{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu.\end{aligned}$$ 1

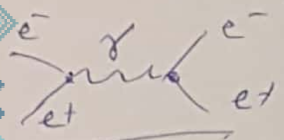
- En comparant, on déduit que :

$$\boxed{\mathcal{L}_{\text{int.}} = -g\overline{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu.}$$ 0,25

0,5 Ce terme contient trois (3) champs différents ; à savoir : $\overline{\psi}$, ψ et A_μ et l'ensemble est couplé par une constante g, dite constante de couplage. Il est claire qu'il représente l'interaction des trois champs, un champ vectoriel A_μ (correspondant au champ électromagnétique) et les champs fermioniques ψ et $\overline{\psi}$.

0,5 Enfin, l'exemple concret et physique qui vient à l'esprit est celui d'une interaction entre un électron e^- (représenté par ψ), un positron e^+ (représenté par $\overline{\psi}$) et un photon γ (représenté par A_μ). ~~Ce processus est appelé :~~ **la diffusion de BHABHA.**

Vertex $\overline{\psi}A\psi$



$$i\partial_\mu\theta(x) - igA'_\mu = -igA_\mu$$

$$-\frac{\partial_\mu\theta(x)}{g} + \frac{g}{g}A'_\mu = \frac{gA_\mu}{g}$$

$$-\frac{1}{g}\partial_\mu\theta(x) + A'_\mu = A_\mu$$

$$\boxed{A'_\mu = A_\mu + \frac{1}{g}\partial_\mu\theta(x)}$$