



Concours d'accès au 3^{ème} Cycle

Domaine : **Sciences de la Matière** Filière : **Physique**

Épreuve de : **Mathématiques et Méthodes Numériques**

Date : 24 février 2022 Durée : 1h30

SUJET A

Exercice 1 : (6 pts)

- a) Déterminer la solution au problème homogène: $y''(t) - 3y'(t) = \sin 3t$; $y(0) = 0$.
b) Déterminer la solution au problème suivant: $y''(t) - 4y'(t) + 4y(t) = 9e^{-t}$; $y(0) = 0, y'(0) = 0$.
1) Soit l'intégrale :

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a + \sin \theta}; a > 1, \quad a \text{ est un nombre réel}$$

Montrer, en faisant un changement de variable, que l'on peut écrire:

$$I = \oint_C f(z) dz = \oint_C \frac{2dz}{z^2 + 2aiz - 1}$$

ou C est un cercle de rayon unité centré sur l'origine.

- 2) Trouver les pôles (z_1, z_2) de $f(z)$ et montrer qu'un seul se trouve à l'intérieur de C .
3) Dédire la valeur de l'intégrale I .

Exercice 2 : (7 pts)

SAHLA MAHLA

المصدر الأول لمذكرات التخرج في الرياضيات

- a) Calculer l'intégrale I analytiquement.
b) Approcher l'intégrale I par une application de la méthode des trapèzes pour $n=6$.
c) Approcher l'intégrale I par une application de la méthode de Simpson pour $n=6$.
d) Donner l'erreur relative commise dans chaque cas en pourcentage.
e) Comparer les résultats obtenus.

On donne :

Méthode des trapèzes : $I = \int_a^b f(x) dx \approx h \left(\frac{f(a) + f(b)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(a + i \cdot h) \right)$ avec $h = \frac{b-a}{n}$.

Méthode de Simpson : $I = \int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{3} \left(f(a) + 2 \sum_{i \text{ pair}} f(x_i) + 4 \sum_{i \text{ impair}} f(x_i) + f(b) \right)$

L'erreur relative : $E_T = \frac{|I_{analytique} - I_{trapèzes}|}{I_{analytique}}$ et $E_S = \frac{|I_{analytique} - I_{simpon}|}{I_{analytique}}$

Exercice 3 : (7 pts)

Les polynômes de Tchebychev sont définis par la relation suivante : $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$.

- a) Calculer $T_0(x), T_1(x)$, ainsi que $T_2(-1)$ et $T_3(1/2)$.
b) Montrer la relation de récurrence suivante : $T_{n+2}(x) + T_n(x) = 2x T_{n+1}(x)$.
c) En déduire $T_2(x)$ et $T_3(x)$, et vérifier les valeurs de $T_2(-1)$ et $T_3(1/2)$ trouvées en a).
d) Vérifier que $T_n(x)$ est solution de l'équation différentielle : $(1-x^2)y'' - xy' + n^2y = 0$.
e) Résoudre l'équation $T_n(x) = 0$.



Concours d'accès au 3^{ème} Cycle

Domaine : **Sciences de la Matière** Filière : **Physique**

Épreuve de : **Mathématiques et Méthodes Numériques**

Date : 24 février 2022 Durée : 1h30

Corrigé et Barème SUJET A

Exercice 1 : (6 pts)

a) $y''(t) - 3y'(t) = \sin 3t$; $y(t) = y_H(t) + y_p(t)$,

$$y_H(t) = y_0 e^{3t} \text{ (0.5 pt),}$$

$$y_p(t) = a \sin 3t + b \cos 3t, \Rightarrow y_p(t) = -\frac{1}{6} (\sin 3t + \cos 3t) \text{ (0.5 pt),}$$

$$y(t) = \frac{1}{6} (e^{3t} - \sin 3t - \cos 3t) \text{ (0.5 pt).}$$

b) $y''(t) - 4y'(t) + 4y(t) = 9e^{-t}$; $r^2 - 4r + 4 = 0, \Rightarrow r_{1,2} = 2$ (0.25 pt)

$$y_H(t) = (\alpha + \beta t)e^{2t} \text{ (0.25 pt),}$$

$$y_p(t) = e^{-t} \text{ (0.25 pt),}$$

$$y(t) = (\alpha + \beta t)e^{2t} + e^{-t} \text{ (0.25 pt),}$$

SAHLA MAHLA
المصدر الأول لمذكرات التخرج في الجزائر

$$y(t) = (-1 + 3t)e^{2t} + e^{-t} \text{ (0.5 pt),}$$

c)
1)

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a + \sin\theta} ; a > 1,$$

On pose

$$z = e^{i\theta} = \cos\theta + i \sin\theta, \text{ (0.25 pt)}$$

$$\sin\theta = \frac{z^2 - 1}{2iz}, \text{ (0.5 pt); } d\theta = \frac{dz}{iz}, \text{ (0.25 pt)}$$

$$I = \oint_C \frac{2dz}{z^2 + 2aiz - 1}, \text{ (0.5 pt)}$$

2)

$$z_1 = -(a + \sqrt{a^2 - 1}) i, \text{ (0.25 pt); } z_2 = -(a - \sqrt{a^2 - 1}) i, \text{ (0.25 pt).}$$

$$|z_2| < 1 ; |z_1| > 1, \Rightarrow z_2 \text{ est à l'intérieur de } C, \text{ (0.25 pt).}$$

3)

$$I = 2\pi i \operatorname{Res}(f, z_2) = 2\pi i \lim_{z \rightarrow z_2} (z - z_2) f(z), \text{ (0.25 pt),}$$

$$I = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - 1}}. \text{ (0.5 pt)}$$

Exercice 2 : (7 pts)

a) Solution analytique :

Puisque nous connaissons la dérivée : $\frac{de^x}{dx} = e^x$, nous pouvons utiliser le théorème fondamental du

calcul :

$$\int e^x dx = \int \frac{de^x}{dx} dx = e^x + c \Rightarrow \int_0^1 e^x dx = [e^x]_0^1 = e^1 - e^0 = 1.71828 \text{ (1 pt).}$$

b) Méthode des trapèzes pour $n=6$. Posons $x_i = a + h \cdot i$, $i = 0, \dots, n$.

$$\begin{aligned} I &= \int_a^b f(x) dx \approx \frac{1}{6} \left(\frac{f(0) + f(1)}{2} + \sum_{i=1}^5 f(0 + i \cdot \frac{1}{6}) \right) \\ &\approx \frac{1}{6} \left(\frac{f(0) + f(1)}{2} + f(\frac{1}{6}) + f(\frac{1}{3}) + f(\frac{1}{2}) + f(\frac{2}{3}) + f(\frac{5}{6}) \right) \text{ (2 pts)} \\ &\approx 1.72226 \end{aligned}$$

c) Méthode de Simpson pour $n=6$. Posons $x_i = a + h \cdot i$, $i = 0, \dots, n$.

$$\begin{aligned} I &= \int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{3} \left(f(a) + 2 \sum_{i \text{ pair}} f(x_i) + 4 \sum_{i \text{ impair}} f(x_i) + f(b) \right) \\ &\approx \frac{1}{18} \left(f(0) + 2(f(x_2) + f(x_4)) + 4(f(x_1) + f(x_3) + f(x_5)) + f(1) \right) \text{ (2 pts)} \\ &\approx \frac{1}{18} \left(f(0) + 2(f(\frac{1}{3}) + f(\frac{2}{3})) + 4(f(\frac{1}{6}) + f(\frac{1}{2}) + f(\frac{5}{6})) + f(1) \right) \\ &\approx 1.71829 \end{aligned}$$

d) L'erreur relative commise est :

$$E_T = \frac{|I_{analytique} - I_{trapèzes}|}{I_{analytique}} = \frac{|1.71828 - 1.72226|}{1.71828} = 0.00397 = 0.2\% \text{ (0.5 pt)}$$

$$E_S = \frac{|I_{analytique} - I_{simpon}|}{I_{analytique}} = \frac{|1.71828 - 1.71829|}{1.71828} = 0.000004 = 4 \cdot 10^{-4}\% \text{ (0.5 pt)}$$



e) Remarquons que $E_S < E_T$. Donc la méthode la plus précise est celle de Simpson et la moins précise est celle des trapèzes. (1 pt)

Exercice 3 : (7 pts)

Les polynômes de Tchebychev sont définis par la relation suivante : $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$.

a) Calculer $T_0(x)$, $T_1(x)$, ainsi que $T_2(-1)$ et $T_3(1/2)$.

$$T_0(x) = \cos(0) = 1, (0.25 \text{ pt})$$

$$T_1(x) = \cos(\arccos x) = x, (0.25 \text{ pt})$$

$$T_2(-1) = \cos(2 \arccos[-1]) = \cos(2 \pi) = 1, (0.25 \text{ pt})$$

$$T_3(1/2) = \cos(3 \arccos[1/2]) = \cos(3 \pi/3) = -1, (0.25 \text{ pt})$$

b) Montrer la relation de récurrence suivante : $T_{n+2}(x) + T_n(x) = 2x T_{n+1}(x)$.

On utilise la formule d'addition des cosinus :

$$\cos(a) + \cos(b) = 2 \cos\left(\frac{a+b}{2}\right) \cos\left(\frac{a-b}{2}\right), (*)$$

$$T_{n+2}(x) + T_n(x) = \cos([n+2] \arccos x) + \cos(n \arccos x) \stackrel{(*)}{=} 2 \cos([n+1] \arccos x) \cos(\arccos x) = 2x T_{n+1}(x). (1 \text{ pt})$$

En déduire $T_2(x)$ et $T_3(x)$,

On met $n = 0$ dans la relation de récurrence :

$$T_2(x) = -T_0(x) + 2x T_1(x) = -1 + 2xx = 2x^2 - 1, (0.25 \text{ pt})$$

On met $n = 1$ dans la relation de récurrence :

$$T_3(x) = -T_1(x) + 2x T_2(x) = -x + 2x(-1 + 2x^2) = -3x + 4x^3 (0.25 \text{ pt}).$$

et vérifier les valeurs de $T_2(-1)$ et $T_3(1/2)$ trouvées en a).

$$T_2(-1) = -1 + 2(-1)^2 = 1, (0.25 \text{ pt})$$

$$T_3(1/2) = -\frac{3}{2} + \frac{4}{8} = -1. (0.25 \text{ pt})$$

c) Vérifier que $T_n(x)$ est solution de l'équation différentielle : $(1 - x^2)y'' - xy' + n^2y = 0$.

Rappel :

$$\arccos(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

On a :

$$T_n(x) = \frac{n \sin(n \arccos x)}{\sqrt{1-x^2}}, (0.5 \text{ pt})$$

$$T_n(x) = \frac{-n^2 \cos(n \arccos x) + n \sin(n \arccos x)x(1-x^2)^{-1/2}}{(1-x^2)},$$

$$T_n(x) = -\frac{n^2 \cos(n \arccos x)}{(1-x^2)} + \frac{nx \sin(n \arccos x)}{(1-x^2)^{3/2}}, (1.5 \text{ pts})$$

L'équation différentielle devient:

$$(1-x^2) \left[-\frac{n^2 \cos(n \arccos x)}{(1-x^2)} + \frac{nx \sin(n \arccos x)}{(1-x^2)^{3/2}} \right] - x \frac{n \sin(n \arccos x)}{\sqrt{1-x^2}} + n^2 \cos(n \arccos x) =$$

$$-n^2 \cos(n \arccos x) - \frac{nx \sin(n \arccos x)}{\sqrt{1-x^2}} - x \frac{n \sin(n \arccos x)}{\sqrt{1-x^2}} + n^2 \cos(n \arccos x) = 0 \text{ CQFD.}$$

d) Résoudre l'équation $T_n(x) = 0$.

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x) = 0 \Rightarrow n \arccos x = \frac{(2k+1)\pi}{2} (0.5 \text{ pt}) \Rightarrow$$

$$x = \cos\left(\frac{[2k+1]\pi}{2n}\right), n = 1, 2, \dots; k = 0, 1, 2, \dots (1.5 \text{ pts})$$

SAHLA MAHLA

المصدر الأول لمذكرات التخرج في الجزائر





Concours d'accès au 3^{ème} Cycle

Domaine : **Sciences de la Matière** Filière : **Physique**
Épreuve de : **Mathématiques et Méthodes Numériques**

Date : 24 février 2022 Durée : 1h30

SUJET B

Exercice 1 : (6 pts)

- a) Déterminer la solution au problème homogène: $y'(t) - 3y(t) = \sin 3t$;
 $y(0) = 0$.
- b) Déterminer la solution au problème suivant:
 $y''(t) - 4y'(t) + 4y(t) = 9e^{-t}$;
 $y(0) = 0, y'(0) = 0$.

1) Soit l'intégrale :

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a + \sin \theta};$$

$a > 1$. a est un nombre réel.

Montrer, en faisant un changement de variable, que l'on peut écrire:

$$I = \oint_C f(z) dz = \oint_C \frac{2dz}{z^2 + 2az - 1}$$

ou C est un cercle de rayon unité centré sur l'origine.

- 2) Trouver les pôles (z_1, z_2) de $f(z)$ et montrer qu'un seul se trouve à l'intérieur de C .
- 3) Déduire la valeur de l'intégrale I .

Exercice 2 : (7 pts)

Soit le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} y'(x) = y(x) - 2x/y(x) \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

- a) Utiliser la méthode d'Euler pour calculer les premières 5 valeurs de la solution $y(x)$ de l'équation différentielle $y'(x)$, en prenant le pas $h = 0.2$.
- b) En utilisant la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4, calculer les premières 5 valeurs approchées de la solution du problème $y'(x)$ avec le même pas $h = 0.2$.

- c) Estimer les résultats obtenus si la solution exacte est $y(x) = \sqrt{2x+1}$. Quelle est la méthode la plus proche à celle de la méthode exacte ?

On donne :

Méthode d'Euler : $y_{i+1} = y_i + h * f(x_i)$

Méthode de Runge-Kutta 4 : $k_1 = h f(x_i, y_i)$;

$$k_2 = h f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1}{2}) ; k_3 = h f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2}{2})$$

$$k_4 = h f(x_i + h, y_i + k_3) ;$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{k_1}{6} + \frac{k_2}{3} + \frac{k_3}{3} + \frac{k_4}{6}$$

Exercice 3 : (7 pts)

On donne la fonction génératrice des fonctions de Bessel d'indice entier :

$$\exp\left(\frac{x(t^2 - 1)}{2t}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) t^n.$$

- a) En dérivant partiellement par rapport à la variable t montrer la relation de récurrence suivante :

$$2n J_n(x) = x(J_{n+1}(x) + J_{n-1}(x))$$

- b) En dérivant partiellement par rapport à la variable x , montrer la relation de récurrence suivante :

$$2J_n(x) = J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x).$$

- c) En déduire alors les relations de récurrence :

c1) $x J_n(x) = n J_n(x) - x J_{n+1}(x).$

c2) $x J_n(x) = x J_{n-1}(x) - n J_n(x).$



Concours d'accès au 3^{ème} Cycle

Domaine : **Sciences de la Matière** Filière : **Physique**

Épreuve de : **Mathématiques et Méthodes Numériques**

Date : 24 février 2022 Durée : 1h30

Corrigé et Barème SUJET B

Exercice 1 : (6 pts)

a) $y' = \frac{2t}{1-t^2} y \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int \frac{2t}{1-t^2} dt \Rightarrow y = y_0 \frac{1}{1-t^2}$ (0.5 pt)

pour $t = 0$ on a $y(0) = y_0 = 1$

$$y = \frac{1}{1-t^2} \text{ (0.5 pt)}$$

b) $y'' + y' - 2y = 10 \cos t$; $r^2 + r - 2 = 0$; $r_1 = -2$; $r_2 = 1$ (0.5 pt)

$$y_H(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 e^t \text{ (0.25 pt)}$$

$$y_P(t) = a \cos t + b \sin t \text{ (0.25 pt)}$$

On trouve $a = -3$ et $b = 1$ (0.5 pt)

$$y(t) = y_H(t) + y_P(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 e^t - 3 \cos t + \sin t \text{ (0.5 pt)}$$

c) 1) $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2 + \sin \theta}$: on pose $z = e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ (0.25 pt)

$$\sin \theta = \frac{1}{2i} \left(z - \frac{1}{z} \right) = \frac{1}{2i} \left(\frac{z^2 - 1}{z} \right) \text{ (0.5 pt)}$$

$$d\theta = \frac{dz}{iz} \text{ (0.25 pt)}$$

$$I = \oint \frac{2dz}{z^2 + 4iz - 1} \text{ (0.5 pt)}$$

2) $z_1 = (-2 + \sqrt{3})i$; $z_2 = (-2 - \sqrt{3})i$ (0.5 pt)

$|z_1| < 1$; $|z_2| > 1$ z_1 est à l'intérieur C (0.25 pt)



$$3) I = 2\pi i \operatorname{Res}(f, z_1) = 2\pi i \lim_{z \rightarrow z_1} (z - z_1) f(z) \quad (0.25 \text{ pt})$$

$$I = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} \quad (0.75 \text{ pt})$$

Exercice 2 : (7 pts)

a) La méthode d'Euler: $y_{i+1} = y_i + h * f(x_i)$

$$y_1 = y_0 + 0.2 * (y_0 - 2x_0 / y_0) \Rightarrow y_1 = 1 + 0.2 * (1 - 2 * 0 / 1) = 1.2 \quad (0.5 \text{ pt})$$

$$y_2 = y_1 + 0.2 * (y_1 - 2x_1 / y_1) \Rightarrow y_2 = 1.2 + 0.2 * (1.2 - 2 * 0.2 / 1.2) = 1.3733 \quad (0.5 \text{ pt})$$

$$y_3 = y_2 + 0.2 * (y_2 - 2x_2 / y_2) \Rightarrow y_3 = 1.3733 + 0.2 * (1.3733 - 2 * 0.4 / 1.3733) = 1.5315 \quad (0.5 \text{ pt})$$

$$y_4 = y_3 + 0.2 * (y_3 - 2x_3 / y_3) \Rightarrow y_4 = 1.3733 + 0.2 * (1.5315 - 2 * 0.6 / 1.5315) = 1.68108 \quad (0.5 \text{ pt})$$

$$y_5 = y_4 + 0.2 * (y_4 - 2x_4 / y_4) \Rightarrow y_5 = 1.68108 + 0.2 * (1.68108 - 2 * 0.8 / 1.68108) = 1.82695 \quad (0.5 \text{ pt})$$

b) La méthode de Runge-Kutta 4 :

SAHLA MAHLA

Première étape : $i=0$ المصدر الأول لمذكرات التخرج في الجزائر

$$k_1 = h f(x_0, y_0) = 0.2 * (1 - 2 * 0 / 1) = 0.2$$

$$k_2 = h f(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_1}{2}) = 0.2((1 + 0.2/2) - 2(0 + 0.2/2))/(1 + 0.2/2) = 0.1836$$

$$k_3 = h f(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_2}{2}) = 0.2((1 + 0.1838/2) - 2(0 + 0.2/2))/(1 + 0.1838/2) = 0.1817$$

$$k_4 = h f(x_0 + h, y_0 + k_3) = 0.2((1 + 0.1817) - 2(0 + 0.2))/(1 + 0.1817) = 0.1686$$

$$y_1 = y_0 + \frac{k_1}{6} + \frac{k_2}{3} + \frac{k_3}{3} + \frac{k_4}{6} = 1.1832 \quad (0.5 \text{ pt})$$

Deuxième étape : $i=1$

$$k_1 = h f(x_1, y_1) = 0.2 * (1.1832 - 2 * 0.2 / 1.1832) = 0.1690$$

$$k_2 = h f(x_1 + \frac{h}{2}, y_1 + \frac{k_1}{2}) = 0.2((1.1832 + 0.1690/2) - 2(0.2 + 0.2/2))/(1.1832 + 0.1690/2) = 0.1589$$

$$k_3 = h f(x_1 + \frac{h}{2}, y_1 + \frac{k_2}{2}) = 0.2((1.1832 + 0.1589/2) - 2(0.2 + 0.2/2))/(1.1832 + 0.1589/2) = 0.1575$$



$$k_4 = h f(x_1 + h, y_1 + k_3) = 0.2((1.1832 + 0.1575) - 2(0.2 + 0.2))/(1.1832 + 0.1575) = 0.1488$$

$$y_2 = y_1 + \frac{k_1}{6} + \frac{k_2}{3} + \frac{k_3}{3} + \frac{k_4}{6} = 1.3417 \text{ (0.5 pt)}$$

Troisième étape : i=2

$$k_1 = h f(x_2, y_2) = 0.2 * (1.3417 - 2 * 0.4 / 1.3417) = 0.1490$$

$$k_2 = h f(x_2 + \frac{h}{2}, y_2 + \frac{k_1}{2}) = 0.2((1.3417 + 0.1486/2) - 2(0.4 + 0.2/2))/(1.3417 + 0.1486/2) = 0.1420$$

$$k_3 = h f(x_2 + \frac{h}{2}, y_2 + \frac{k_2}{2}) = 0.2((1.3417 + 0.1414/2) - 2(0.4 + 0.2/2))/(1.3417 + 0.1414/2) = 0.1409$$

$$k_4 = h f(x_2 + h, y_2 + k_3) = 0.2((1.3417 + 0.1404) - 2(0.4 + 0.2))/(1.3417 + 0.1404) = 0.1347$$

$$y_3 = y_2 + \frac{k_1}{6} + \frac{k_2}{3} + \frac{k_3}{3} + \frac{k_4}{6} = 1.4833 \text{ (0.5 pt)}$$

Quatrième étape : i=3

$$k_1 = h f(x_3, y_3) = 0.2 * (1.4833 - 2 * 0.6 / 1.4833) = 0.1349$$

$$k_2 = h f(x_3 + \frac{h}{2}, y_3 + \frac{k_1}{2}) = 0.2((1.4833 + 0.1347/2) - 2(0.6 + 0.2/2))/(1.4833 + 0.1347/2) = 0.1296$$

$$k_3 = h f(x_3 + \frac{h}{2}, y_3 + \frac{k_2}{2}) = 0.2((1.4833 + 0.1294/2) - 2(0.6 + 0.2/2))/(1.4833 + 0.1294/2) = 0.1288$$

$$k_4 = h f(x_3 + h, y_3 + k_3) = 0.2((1.4833 + 0.1285) - 2(0.6 + 0.2))/(1.4833 + 0.1285) = 0.1239$$

$$y_4 = y_3 + \frac{k_1}{6} + \frac{k_2}{3} + \frac{k_3}{3} + \frac{k_4}{6} = 1.6125 \text{ (0.5 pt)}$$

Cinquième étape : i=4

$$k_1 = h f(x_4, y_4) = 0.2 * (1.6125 - 2 * 0.8 / 1.6125) = 0.1240$$

$$k_2 = h f(x_4 + \frac{h}{2}, y_4 + \frac{k_1}{2}) = 0.2((1.6125 + 0.1237/2) - 2(0.8 + 0.2/2))/(1.6125 + 0.1237/2) = 0.1199$$

$$k_3 = h f(x_4 + \frac{h}{2}, y_4 + \frac{k_2}{2}) = 0.2((1.6125 + 0.1196/2) - 2(0.8 + 0.2/2))/(1.6125 + 0.1196/2) = 0.1192$$

$$k_4 = h f(x_4 + h, y_4 + k_3) = 0.2((1.6125 + 0.1189) - 2(0.8 + 0.2))/(1.6125 + 0.1189) = 0.1154$$

$$y_5 = y_4 + \frac{k_1}{6} + \frac{k_2}{3} + \frac{k_3}{3} + \frac{k_4}{6} = 1.7321 \text{ (0.5 pt)}$$

c) La solution exacte:

Les valeurs exactes sont:

{0, 1}, {0.2, 1.18322}, {0.4, 1.34164}, {0.6, 1.48324}, {0.8, 1.61245}, {1, 1.73205} **(1.5 pts)**

D'après les calculs, la méthode la plus proche à celle de la méthode exacte est la méthode de **Runge-Kutta 4. (0.5 pt)**

Exercice 3 : (7 pts)

On donne la fonction génératrice des fonctions de Bessel d'indice entier :

$$\exp\left(\frac{x(t^2 - 1)}{2t}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) t^n.$$

a) En dérivant partiellement par rapport à la variable t montrer la relation de récurrence suivante :

$$2n J_n(x) = x(J_{n+1}(x) + J_{n-1}(x))$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\exp\left(\frac{x(t^2 - 1)}{2t}\right) \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) t^n \right).$$

$$\frac{x(t^2 + 1)}{2t^2} \exp\left(\frac{x(t^2 - 1)}{2t}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} n J_n(x) t^{n-1} \quad (1 \text{ pt}).$$

$$\frac{x(t^2 + 1)}{2t^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) t^n = 2t^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} n J_n(x) t^{n-1}.$$

$$x \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) t^{n+2} + x \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) t^n - \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2n J_n(x) t^{n+1} = 0,$$

Posons $m = n + 1$ dans la première somme, $m = n - 1$ dans la seconde, et $m = n$ dans la dernière : **(0.5 pt)**

$$x \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_{m-1}(x) t^{m+1} + x \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_{m+1}(x) t^{m+1} - \sum_{m=-\infty}^{\infty} 2m J_m(x) t^{m+1} = 0,$$

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} [xJ_{m-1}(x) + xJ_{m+1}(x) - 2m J_m(x)] t^{m+1} = 0,$$

Cette série étant identiquement nulle, cela implique :

$$xJ_{m-1}(x) + xJ_{m+1}(x) - 2m J_m(x) = 0. \quad (1 \text{ pt})$$

b) En dérivant partiellement par rapport à la variable x , montrer la relation de récurrence suivante :

$$2J'_n(x) = J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x).$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\exp\left(\frac{x(t^2 - 1)}{2t}\right) \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) t^n \right).$$

$$\frac{(t^2 - 1)}{2t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) t^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J'_n(x) t^n \quad (1 \text{ pt}),$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) t^{n+2} - \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) t^n - \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2J'_n(x) t^{n+1} = 0,$$

Posons $m = n + 1$ dans la première somme, $m = n - 1$ dans la seconde, et $m = n$ dans la dernière : (0.5 pt)

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} J_{m-1}(x) t^{m+1} - \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_{m+1}(x) t^{m+1} - \sum_{m=-\infty}^{\infty} 2J'_m(x) t^{m+1} = 0,$$

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} [J_{m-1}(x) - J_{m+1}(x) - 2J'_m(x)] t^{m+1} = 0,$$

Cette série étant identiquement nulle, cela implique :

$$J_{m-1}(x) - J_{m+1}(x) = 2J'_m(x). \quad (1 \text{ pt})$$

c) En déduire alors les relations de récurrence :

c1)

$$x J'_n(x) = n J_n(x) - x J_{n+1}(x).$$

Multiplions par x la relation obtenue au b) :

$$x J_{n-1}(x) - x J_{n+1}(x) - 2x J'_n(x) = 0.$$

Faisons la différence entre cette dernière relation et celle obtenue au a) :

$$x J_{n-1}(x) - x J_{n+1}(x) - 2x J'_n(x) - [x J_{n-1}(x) - x J_{n+1}(x) + 2n J_n(x)] = 0.$$

$$-2x J'_n(x) - 2x J_{n+1}(x) + 2n J_n(x) = 0.$$

$$x J'_n(x) = n J_n(x) - x J_{n+1}(x). \quad (1 \text{ pt})$$

c2)

$$x J'_n(x) = x J_{n-1}(x) - n J_n(x).$$

Multiplions par x la relation obtenue au b) :

$$x J_{n-1}(x) - x J_{n+1}(x) - 2x J'_n(x) = 0.$$

Faisons la somme entre cette dernière relation et celle obtenue au a)

$$x J_{n-1}(x) - x J_{n+1}(x) - 2x J'_n(x) + x J_{n-1}(x) + x J_{n+1}(x) - 2n J_n(x) = 0.$$

$$-2x J'_n(x) + 2x J_{n-1}(x) - 2n J_n(x) = 0.$$

$$x J'_n(x) = x J_{n-1}(x) - n J_n(x). \quad (1 \text{ pt})$$



Concours d'accès au 3^{ème} Cycle

Domaine : **Sciences de la Matière** Filière : **Physique**

Épreuve de : **Mathématiques et Méthodes Numériques**

Date : 24 février 2022 Durée : 1h30

SUJET C

Exercice 1 : (6 pts)

a) Déterminer la solution au problème suivant:

$$y'(t) - y(t) = 4 - t^2; y(0) = -1.$$

b) Déterminer les solutions au problème suivant:

$$y''(t) - 2y'(t) + y(t) = -2e^t;$$

$$y(0) = -2, y'(0) = 0.$$

c) Soit l'intégrale:

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{3 + \cos \theta}.$$

1) En faisant un changement de variable, montrer que l'on peut écrire :

$$I = \oint_C f(z) dz = \oint_C \frac{-2i}{z^2 + 6z + 1} dz,$$

où C est un cercle de rayon unité centré sur l'origine.

2) Trouver les pôles (z_1, z_2) de $f(z)$ et montrer qu'un seul se trouve à l'intérieur de C .

3) Déduire la valeur de l'intégrale I .

Exercice 2 : (7 pts)

Soit $f(x) = (\cos(2x))^2 - x^2$

a) Montrer que $f(x) = 0$ admet au moins une racine r dans l'intervalle $[0, 1]$.

b) Donner l'algorithme de Newton permettant de calculer cette racine (prendre $x_0 = 0,2$).

c) Calculer la racine r en utilisant l'algorithme précédent.

(critère d'arrêt : $|x_{k+1} - x_k| \leq 10^{-4}$).

d) En déduire (sans faire le calcul) une racine r' de $f(x) = 0$ dans l'intervalle $[-1, 0]$.

Exercice 3 : (7 pts)

Les fonctions Γ et β d'Euler sont définies pour $x > 0$ et $y > 0$ par :

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt, \text{ et}$$

$$\beta(u, v) = \int_0^1 t^{u-1} (1-t)^{v-1} dt.$$

Elles sont reliées par la relation fonctionnelle :

$$\beta(u, v) = \frac{\Gamma(u) \Gamma(v)}{\Gamma(u+v)}.$$

a) Montrer pour $n \in \mathbb{N}^*$ la relation de récurrence : $\Gamma(n+1) = n \Gamma(n)$.

b) Montrer que $\beta(u, v) = \beta(v, u)$.

c) Calculer l'intégrale :

$$I = \int_0^{\infty} \sqrt{x} e^{-x^2} dx,$$

d) Montrer que :

$$a \beta(a, b+1) = b \beta(a+1, b).$$

d1) En déduire pour $a \neq 0$ que :

$$\beta(a, n) = \frac{n-1}{a} \beta(a+1, n-1),$$

d2) puis pour $a \in \mathbb{N}^*$ établir la relation :

$$\beta(a, n) = \frac{1 \cdot 2 \dots (n-1)}{a (a+1) \dots (a+n-1)}.$$



Concours d'accès au 3^{ème} Cycle
Domaine : **Sciences de la Matière** Filière : **Physique**
Épreuve de : **Mathématiques et Méthodes Numériques**
Date : 24 février 2022 Durée : 1h30

Corrigé et Barème SUJET C

Exercice 1 : (6 pts)

a) $y'(t) - y(t) = 4 - t^2$

$y_H(t) = c_1 e^t$ (0.25 pt)

pour $y_p(t) = at^2 + bt + c$ (0.25 pt)

on obtient $y_p(t) = t^2 + 2t - 2$ (0.25 pt)

$y(t) = c_1 e^t + t^2 + 2t - 2$ (0.25 pt)

Avec $y(0) = -1$; $y(t) = e^t + t^2 + 2t - 2$ (0.25 pt)

b) $y'' - 2y' + y = -2e^t \rightarrow (r^2 - 2r + 1) = 0$; $r_{1,2} = 1$ (0.25 pt)

$y_H(t) = (\alpha + \beta t)e^t$ (0.25 pt)

on pose $y_p(t) = ze^t$ (0.25 pt)

L'équation différentielle donne $z''e^t = -2e^t \Rightarrow z'' = -2$

On peut prendre $z(t) = -t^2$ (0.25 pt)

$y(t) = y_H(t) + y_p(t) = (\alpha + \beta t)e^t - t^2 e^t$ (0.25 pt)

Les conditions $y'(0) = 0$ et $y(0) = 2 \Rightarrow \alpha = -2$; (0.25 pt) $\beta = +2$ (0.25 pt)

$y(t) = -(2 - 2t)e^t - t^2 e^t$ (0.25 pt)

c) 1) $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{3 + \cos\theta}$: on pose $z = e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ (0.25 pt)

$\cos\theta = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})$; (0.25 pt)



$$d\theta = \frac{dz}{iz} \quad (0.25 \text{ pt})$$

$$I = \oint \frac{-2idz}{z^2 + 6z + 1} \quad (0.5 \text{ pt})$$

$$2) z_1 = -3 - 2\sqrt{2} ; (0.25 \text{ pt}) \quad z_2 = -3 + 2\sqrt{2} (0.25 \text{ pt})$$

$$|z_1| > 1; |z_2| < 1 \Rightarrow z_2 \text{ est à l'intérieur de } C (0.25 \text{ pt})$$

$$3) I = 2\pi i \operatorname{Rés}(f, z_2) = 2\pi i \lim_{z \rightarrow z_2} (z - z_2) f(z) (0.25 \text{ pt})$$

$$I = \frac{\pi}{\sqrt{2}} (0.5 \text{ pt})$$

Exercice 2 : (7 pts)

a) On a $f(x) = 0$ est continue dans l'intervalle $[0, 1]$ (0.5 pt) et $f(0) * f(1) = -0.8268 < 0$ (0.5 pt) et par conséquent $f(x) = 0$ admet au moins une racine dans l'intervalle $[0, 1]$ (0.5 pt).

b) L'algorithme de la méthode de Newton s'écrit :

$$\begin{cases} x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \\ x_0 = 0.2 \\ \text{critère d'arrêt : } |x_{k+1} - x_k| \leq 10^{-4} \end{cases} \quad (1.5 \text{ pt})$$

c) On Effectue quelques itérations de la méthode à partir du point $x_0 = 0.2$

(critère d'arrêt : $|x_{k+1} - x_k| \leq 10^{-4}$).

$$x_1 = 0.6406 ; x_2 = 0.5022 ; x_3 = 0.5149. (3*0.5 \text{ pt})$$

La racine de la fonction $f(x) = (\cos(2x))^2 - x^2 = 0$ est $r = 0.5149$. (0.5 pt)

d) En déduire une racine r' de $f(x) = 0$ dans l'intervalle $[-1, 0]$.

$$f(x) \text{ est une fonction paire, } f(-r) = -f(r) = 0 \Rightarrow r' = -r = -0.5149 (2 \text{ pt})$$

Exercice 3 : (7 pts)

Les fonctions Γ et β d'Euler sont définies pour $x > 0$ et $y > 0$ par :



Concours d'accès au 3^{ème} Cycle
Domaine : **Sciences de la Matière** Filière : **Physique**
Épreuve de : **Mathématiques et Méthodes Numériques**
Date : 24 février 2022 Durée : 1h30

Corrigé et Barème SUJET C

Exercice 1 : (6 pts)

a) $y'(t) - y(t) = 4 - t^2$

$y_H(t) = c_1 e^t$ (0.25 pt)

pour $y_p(t) = at^2 + bt + c$ (0.25 pt)

on obtient $y_p(t) = t^2 + 2t - 2$ (0.25 pt)

$y(t) = c_1 e^t + t^2 + 2t - 2$ (0.25 pt)

Avec $y(0) = -1$; $y'(0) = e^0 + 2 = 3$ (0.25 pt)

b) $y'' - 2y' + y = -2e^t \rightarrow (r^2 - 2r + 1) = 0$; $r_{1,2} = 1$ (0.25 pt)

$y_H(t) = (\alpha + \beta t)e^t$ (0.25 pt)

on pose $y_p(t) = ze^t$ (0.25 pt)

L'équation différentielle donne $z''e^t = -2e^t \Rightarrow z'' = -2$

On peut prendre $z(t) = -t^2$ (0.25 pt)

$y(t) = y_H(t) + y_p(t) = (\alpha + \beta t)e^t - t^2 e^t$ (0.25 pt)

Les conditions $y'(0) = 0$ et $y(0) = 2 \Rightarrow \alpha = -2$; (0.25 pt) $\beta = +2$ (0.25 pt)

$y(t) = -(2 - 2t)e^t - t^2 e^t$ (0.25 pt)

c) 1) $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{3 + \cos\theta}$: on pose $z = e^{i\theta} = \cos\theta + i \sin\theta$ (0.25 pt)

$\cos\theta = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$; (0.25 pt)



$$d\theta = \frac{dz}{iz} \quad (0.25 \text{ pt})$$

$$I = \oint \frac{-2idz}{z^2 + 6z + 1} \quad (0.5 \text{ pt})$$

$$2) z_1 = -3 - 2\sqrt{2} ; (0.25 \text{ pt}) \quad z_2 = -3 + 2\sqrt{2} (0.25 \text{ pt})$$

$$|z_1| > 1; |z_2| < 1 \Rightarrow z_2 \text{ est à l'intérieur de } C (0.25 \text{ pt})$$

$$3) I = 2\pi i \operatorname{Rés}(f, z_2) = 2\pi i \lim_{z \rightarrow z_2} (z - z_2) f(z) (0.25 \text{ pt})$$

$$I = \frac{\pi}{\sqrt{2}} (0.5 \text{ pt})$$

Exercice 2 : (7 pts)

a) On a $f(x) = 0$ est continue dans l'intervalle $[0, 1]$ (0.5 pt) et $f(0) * f(1) = -0.8268 < 0$ (0.5 pt) et par conséquent $f(x) = 0$ admet au moins une racine dans l'intervalle $[0, 1]$ (0.5 pt).

b) L'algorithme de la méthode de Newton s'écrit :

$$\begin{cases} x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \\ x_0 = 0.2 \\ \text{critère d'arrêt : } |x_{k+1} - x_k| \leq 10^{-4} \end{cases} \quad (1.5 \text{ pt})$$

c) On Effectue quelques itérations de la méthode à partir du point $x_0 = 0.2$

(critère d'arrêt : $|x_{k+1} - x_k| \leq 10^{-4}$).

$$x_1 = 0.6406 ; x_2 = 0.5022 ; x_3 = 0.5149. (3*0.5 \text{ pt})$$

La racine de la fonction $f(x) = (\cos(2x))^2 - x^2 = 0$ est $r = 0.5149$. (0.5 pt)

d) En déduire une racine r' de $f(x) = 0$ dans l'intervalle $[-1, 0]$.

$$f(x) \text{ est une fonction paire, } f(-r) = -f(r) = 0 \Rightarrow r' = -r = -0.5149 (2 \text{ pt})$$

Exercice 3 : (7 pts)

Les fonctions Γ et β d'Euler sont définies pour $x > 0$ et $y > 0$ par :

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt, (*) \text{ et}$$

$$\beta(u, v) = \int_0^1 t^{u-1} (1-t)^{v-1} dt. (**)$$

Elles sont reliées par la relation fonctionnelle :

$$\beta(u, v) = \frac{\Gamma(u) \Gamma(v)}{\Gamma(u+v)}.$$

a) Montrer pour $n \in \mathbb{N}^*$ la relation de récurrence : $\Gamma(n+1) = n \Gamma(n)$.

La définition (*) de la fonction Γ d'Euler donne pour $x \equiv (n+1)$:

$$\Gamma(n+1) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^n dt,$$

Procédons par intégration par parties posons :

$$du = e^{-t} dt, u = -e^{-t}; v = t^n, dv = n t^{n-1} dt,$$

$$\Gamma(n+1) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^n dt = \underbrace{(-e^{-t} t^n)}_{=0} \Big|_0^{\infty} + n \int_0^{\infty} e^{-t} t^{n-1} dt = n \Gamma(n). (1 \text{ pt})$$

b) Montrer que $\beta(u, v) = \beta(v, u)$.

المصدر الأول لمذكرات التخرج في الجزائر

Faisons le changement de variable suivant dans la définition de la fonction β d'Euler (**):

$$x = 1 - t, t = 1 - x, dt = -dx, t = 0 \rightarrow x = 1; t = 1 \rightarrow x = 0,$$

$$\beta(u, v) = \int_0^1 t^{u-1} (1-t)^{v-1} dt = - \int_1^0 (1-x)^{u-1} x^{v-1} dx = \int_0^1 x^{v-1} (1-x)^{u-1} dx = \beta(v, u), (1 \text{ pt})$$

c) Calculer l'intégrale :

$$I = \int_0^{\infty} \sqrt[3]{x} e^{-x^2} dx,$$

Posons

$$t = x^2, x = t^{1/2}, dx = \frac{1}{2\sqrt{t}} dt,$$

$$I = \int_0^{\infty} \sqrt[3]{x} e^{-x^2} dx = \int_0^{\infty} \frac{e^{-t} t^{1/6}}{2t^{1/2}} dt = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{-t} t^{-1/3} dt = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{-t} t^{(2/3)-1} dt = \frac{\Gamma(2/3)}{2}. (2 \text{ pts})$$

d) Montrer que :

$$a \beta(a, b+1) = b \beta(a+1, b).$$

$$a \beta(a, b+1) = \frac{a \Gamma(a) \Gamma(b+1)}{\Gamma(a+b+1)} = \frac{\Gamma(a+1) b \Gamma(b)}{\Gamma(a+b+1)} = b \beta(a+1, b). (1 \text{ pt})$$

d1) En déduire pour $a \neq 0$ que :

$$\beta(a, n) = \frac{n-1}{a} \beta(a+1, n-1),$$

De b) on tire

$$\beta(a, b+1) = \frac{b}{a} \beta(a+1, b),$$

Mettons maintenant $b = n - 1$ on obtient

$$\beta(a, n) = \frac{(n-1)}{a} \beta(a+1, n-1). \text{ (0.5 pt)}$$

d2) puis pour $a \in \mathbb{N}^*$ établir la relation :

$$\beta(a, n) = \frac{1 \cdot 2 \dots (n-1)}{a(a+1) \dots (a+n-1)}.$$

$$\begin{aligned} \beta(a, n) &= \frac{(n-1)}{a} \beta(a+1, n-1) = \frac{(n-1)}{a} \frac{\Gamma(a+1)\Gamma(n-1)}{\Gamma(a+n)} = \frac{(n-1)}{a} \frac{a! (n-2)!}{(a+n-1)!} \\ &= \frac{(n-1)!(a-1)!}{(a+n-1)!} = \frac{(n-1)! \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (a-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (a-1) a (a+1) \dots (a+n-1)} \\ &= \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-1)}{a(a+1) \dots (a+n-1)}. \text{ (1.5 pts)} \end{aligned}$$

SAHLA MAHLA

المصدر الأول لمذكرات التخرج في الجزائر

