جامعة محمد بوضياف - المسيلة
Université Mohamed Boudiaf - M'sila

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

جامعة محمد بوضياف ـ المسيلة-

كلية العلوم الاقتصادية وعلوم التسيير وعلوم المحاسبة

محاضرات موجهة لطلبة السنة أولى علوم اقتصادية

مقياس : الرياضيات-2-

إعداد الأستاذ : ديلمي مصطفى

السنة الجامعية: 2019 / 2018

الفهرس

مقدمة

كان الجبر الحديث و لا يزال من أبرز فروع الرياضيات التي لا يمكن أن يخلو منها أي منهج لطلبة الرياضيات، وقد ازدادت أهميته يوما بعد آخر ليس لطلبة الرياضيات وحسب وإنما لطلبة العلوم والاقتصاد والكثير من الاختصاصات الأخرى. لذلك فان الجبر إضافة لكونه مادة تدعم وتطور التفكير والإبداع وتطور بعض العلوم التي تحتاج إليه فانه مادة لا يمكن الاستغناء عنها لمختلف العلوم التطبيقية الأخرى.

يعد الجبر الخطي الذي هو فرع من الجبر الحديث مادة أساسية تعتمد عليه علوم أخرى مثل البيولوجيا و الفيزياء والاقتصاد والإحصاء وغيرها من العلوم وقد أصبح الجبر الخطي في السنوات الأخيرة جزءا أساسيا مطلوبا في كثير من العلوم التي تحتاج إليه في تطبيقاتها للحصول على نتائج ايجابية للأعمال التي تقوم بدراستها.

يمكن استخدام هذه المطبوعة كمرجع لطلبة العلوم والاقتصاد والإحصاء وكإضافة مهمة للعلوم الأخرى، و على هذا الأساس قمنا بهذا الجهد المتواضع الذي نضعه بين أيدي الطلبة و نعزز به المكتبة الجامعية. وتحتوي هذه المطبوعة على خمسة فصول يحتوي كل فصل على أمثلة مختلفة وتمارين متنوعة.

يتضمن **الفصل الأول** مفاهيم عامة حول البني الجبرية والفضاءات الشعاعية والتطرق للارتباط الخطي والاستقلال الخطي للأشعة في فضاءات مختلفة الأبعاد.

الفصل الثاني يتناول دراسة التطبيقات الخطية خاصة في فضاء ثنائي البعد وثلاثي البعد.

الفصل الثالث يتعامل مع المصفوفات وخواصها الجبرية المهمة بالإضافة إلى دراسة المحددات وطرق حسابها.

الفصل الرابع يتطرق إلى جمل المعادلات الخطية والطرق المختلفة لحلها.

يتعلق **الفصل الخامس** بدراسة القيم الذاتية والأشعة الذاتية المرافقة لها.

الفصل الأول

بنية الفضاءات الشعاعية

1- البنى الجبرية .

1-1 عملية التركيب الداخلي:

E مجموعة غير خالية، عملية تركيب داخلي في المجموعة E هي تطبيق معرف من الجداء $E \times E$ نحو E حيث يرفق بكل زوج مرتب $(a,b) \epsilon\, E \times E$ عنصرا $c \epsilon E$.

ونرمز لعملية التركيب الداخلي بـ $*$ أي :

$$*: E \times E \rightarrow E$$

$$(a,b) \longmapsto a * b = c$$

مثال-1- :

-عمليتي الجمع + و الضرب $\times$ هما عمليتا تركيب داخليتان في مجموعة الأعداد الطبيعية IN.

- العملية $*$ المعرفة على المجموعة $\mathbb{Z}$ بـ : $\forall a,b \in \mathbb{Z}: a*b = a^2 - 2b$ هي عملية تركيب داخلي.

خواص:

لتكن المجموعة E المزودة بعملية التركيب الداخلي $*$.

-نقول أن العملية $*$هي عملية تبديليه إذا كان: $\forall a,b \epsilon E \quad : a * b = b * a$

مثال-2- :

الجمع عملية تبديليه في المجموعة IN لكن القسمة غير تبديليه في المجموعة IR^*

-نقول أن العملية $*$ هي عملية تجميعية إذا كان $\forall a,b,c \epsilon E \quad : a * (b * c) = (a * b) * c$

مثال-3-:

الضرب عملية تجميعية في المجموعة IN ، لكن العملية $*$ ليست تجميعية حيث $*$ معرفة على IN

ب : $\forall a,b \in IN \quad : a*b = a.(b+1)$

- نقول أن العنصر $e \in E$ هو عنصر حيادي *للعملية $*$ في المجموعة E إذا كان :*

$$\forall a \in E \quad : a*e = e*a = a$$

مثال-4-:

الصفر هو العنصر الحيادي للجمع في $\mathbb{N}$ و الواحد هو العنصر الحيادي للضرب في $\mathbb{N}^*$

-نقول أن العنصر $a \in E$ يقبل نظيرا في المجموعة E وفق العملية $*$ إذا وجد عنصر $a^{-1} \in E$ بحيث:

$$a*\ a^{-1} \ = a^{-1} \ *a = e$$

مثال-5- :

نظير العنصر $a \in IR$ بالنسبة للجمع هو العنصر $a^{-1} \ = -a$ *ونضير العنصر* $a \in \ IR^*$ بالسبة للضرب هو العنصر $a^{-1} \ = \frac{1}{a}$

الزمرة :

لتكن G مجموعة غير خالية مزودة بعملية تركيب داخلي $*$.

نقول أن $(G,*)$ تشكل بنية زمرة إذا كان :

- العملية $*$ تجميعية على المجموعة G،
- المجموعة G تحتوي على عنصر حيادي وفق العملية $*$،
- لكل عنصر من G نظير في G وفق العملية $*$.

ملاحظة : إذا كانت العملية $*$ تبديلية نقول أن $(G,*)$ هي زمرة تبديلية .

مثال-6-:

نعرف العملية $*$ على المجموعة $IR/\left\{-\frac{1}{2}\right\}$ بـ:

$$\forall a,b\ \epsilon IR/\left\{-\frac{1}{2}\right\}:\ a*b=a+b+2a.b$$

بين أن $\left(IR/\left\{-\frac{1}{2}\right\},*\right)$ زمرة

- لدينا $*$ عملية تجميعية لأن $\forall a,b,c\ \epsilon\ IR/\left\{-\frac{1}{2}\right\}$:

$$\begin{aligned} a*(b*c) &= a*(b+c+2b.c)\\ &= a+b+c+2b.c+2.a.(b+c+2b.c)\\ &= a+b+c+2b.c+2.a.b+2.a.c+4.a.b.c \end{aligned}$$

ومن جهة أخرى لدينا :

$$\begin{aligned} (\ a*b)*c &= (a+b+2a.b)*c\\ &= a+b+2a.b+c+2.(a+b+2a.b).c\\ &=\ a+b+2a.b+c+2.a.c+4.a.b.c \end{aligned}$$

ومنه $\forall a,b,c\ \epsilon IR/\left\{-\frac{1}{2}\right\}\ :\ a*(b*c)=(a*b)*c$

-وجود العنصر الحيادي : لدينا:

$$a*e=e*a=a\ \Leftrightarrow a+e+2.e.a=e+a+2.e.a=a$$
$$\Leftrightarrow e.(1+2.a)=0\ \ \Leftrightarrow e=0\ \vee(1+2.a)=0$$

$$\Leftrightarrow e=0\ \vee a=-\ \frac{1}{2}$$

لكن $a=-\ \frac{1}{2}$ مرفوض لأن $a\ \epsilon\ IR/\left\{-\frac{1}{2}\right\}$ ومنه العنصر الحيادي هو :

$$e=0\ \epsilon\ IR/\left\{-\frac{1}{2}\right\}$$

وجود العنصر النظير لدينا :

$$\forall a \in IR/\left\{-\frac{1}{2}\right\}$$

$$a * a^{-1} = a^{-1} * a = e \Leftrightarrow a * a^{-1} = a^{-1} * a = 0$$

$$\Leftrightarrow a + a^{-1} + 2.a.a^{-1} = a^{-1} + a + 2.a^{-1}.a = 0$$

$$a^{-1}.(1 + 2a) = -a \Leftrightarrow a^{-1} = \frac{-a}{(1 + 2a)}$$

لدينا $a^{-1} \in IR/\left\{-\frac{1}{2}\right\}$ لأن $a \in IR/\left\{-\frac{1}{2}\right\}$ ومنه لكل عنصر $a \in IR/\left\{-\frac{1}{2}\right\}$

عنصرا نظيرا هو: $a^{-1} = \frac{\boldsymbol{a}}{(\boldsymbol{1}+\boldsymbol{2a})} \in IR/\left\{-\frac{1}{2}\right\}$

ومنه$\left(IR/\left\{-\frac{1}{2}\right\},*\right)$: زمرة , وبما أن العملية $*$ هي تبديلية فإن $\left(IR/\left\{-\frac{1}{2}\right\},*\right)$ زمرة تبديلية .

<u>الحقل</u> :

نقول أن المجموعة A المزودة بعملية تركيب داخلي نرمز لها ب $(+)$ و $(.)$ هي حقل إذا حققت :

- $(A, +)$ زمرة تبديلية .
- العملية الثانية$(.)$ تجميعية .
- العملية الثانية $(.)$ توزيعية على العملية الأولى $(+)$ أي :

$$\forall a, b, c \in A : a.(b + c) = (a.b) + (a.c) \wedge (a + b).c = (a.c) + (b.c)$$

- *كل عنصر من A يختلف عن العنصر الحيادي للعملية الأولى $(+)$, يقبل نظير بالنسبة للعملية الثانية $(.)$.*

<u>ملاحظة</u> : *إذا كانت العملية الثانية $(.)$ تبديليه نقول أن الحقل $(A, +, .)$ تبديلي .*

<u>مثال-7-:</u> $(IR, +, .)$ *حقل تبديلي .*

1-2- الفضاءات الشعاعية.

تعريف الفضاء ألشعاعي:

ليكن IK حقلا و E مجموعة غير خالية نقول أن E فضاء شعاعي على الحقل $IK = \mathbb{R} \vee \mathbb{C}$ إذا تحقق:

- $(E,+)$ زمرة تبديليه .
- إذا وجد تطبيق من $IK \times E$ نحو E نرمز له بـ $(.)$ أي :

$$(.): IK \times E \rightarrow E$$

$$(\propto, x) \longmapsto \propto . x$$

ويحقق الخواص التالية: $\forall \propto, \beta \in IK \quad \forall x, y \in E:$

$$(\propto + \beta).x = \propto .x + \beta .x \quad , \quad \propto .(x+y) = \propto .x + \propto .y$$

$$\propto .(\beta .x) = (\propto .\beta).x \quad , \quad 1.x = x$$

حيث 1 هو العنصر الحيادي لعملية الضرب في الحقل IK.

تسمى عناصر الفضاء E بالأشعة وعناصر الحقل IK بالسلميات , ونكتب اختصارا E هو IK-ف – ش.

مثال-1- :

مجموعة الأعداد الحقيقية IR هي فضاء شعاعي على الحقل IR.

- الفضاء الشعاعي $IR^2 = IR \times IR$.

لدينا المجموعة التالية: $IR^2 = IR \times IR = \{(x,y) / \ x, y \in IR\}$

ونعرف قانون تركيب داخلي هو الجمع + بـ:

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2), (y_1 + y_2)$$

ونعرف قانون تركيب ثاني هو الجداء $\times$ ب : $\lambda \times (x_1, y_1) = (\lambda . x_1, \lambda . y_1)$

إن $\mathbb{R}^2$ هو IR– ف- ش لأن :

1- $(IR^2, +)$ زمرة تبديلية.

-هل $+$ عملية تجميعية على المجموعة IR^2.

لدينا:

$$\forall (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) \in IR^2$$

$$[(x_1, y_1) + (x_2, y_2)] + (x_3, y_3) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) + (x_3, y_3)$$
$$= (x_1 + x_2 + x_3, y_1 + y_2 + y_3)$$

$$= (x_1, y_1) + (x_2 + x_3, y_2 + y_3) = (x_1, y_1) + [(x_2, y_2) + (x_3, y_3)]$$

ومنه $+$ عملية تجميعية على المجموعة IR^2 .

ليكن $e = (e_1, e_2)$ عنصرا حياديا للمجموعة IR^2 .

لدينا:

$$\forall (x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2:$$

$$[(x_1, y_1) + (e_1, e_2)] = [(e_1, e_2) + (x_1, y_1)] = (x_1, y_1)$$
$$\Leftrightarrow (x_1 + e_1, y_1 + e_2) = (x_1, y_1)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + e_1 = x_1 \\ y_1 + e_2 = y_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e_1 = 0 \\ e_2 = 0 \end{cases}$$

ومنه العملية $+$ تملك عنصرا حياديا في المجموعة $\mathbb{R}^2$ هو الشعاع e=(0.0)

وجود العنصر النظير :

ليكن $(x_1, y_1) \in IR^2$ و $(x_1^{-1}, y_1^{-1}) \in IR^2$ نظيرا للعنصر (x_1, y_1) .

لدينا:

$$[(x_1, y_1) + (x_1^{-1}, y_1^{-1})] = [(x_1^{-1}, y_1^{-1}) + (x_1, y_1)] = (e_1, e_2) = (0,0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1^{-1} = -x_1 \\ y_1^{-1} = -y_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_1^{-1} = 0 \\ y_1 + y_1^{-1} = 0 \end{cases}$$

ومنه لكل عنصر (x_1, y_1) نظير وفق العملية + في المجموعة IR^2 هو العنصر

$$(x_1^{-1}, y_1^{-1}) = (-x_1, -y_1)$$

بما أن الجمع + تبديلي في المجموعة IR فإن العملية + تبديلية في المجموعة IR^2

ومنه فعلا $(IR^2, +)$ زمرة تبديلية .

التحقق من خواص عملية الضرب × :

لدينا :

$$\forall \alpha, \beta \epsilon IR\ ,\ \ \forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \epsilon IR^2:$$

$$(\alpha + \beta) \times (x_1, y_1) = \big((\alpha + \beta).x_1, (\alpha + \beta).y_1\big)$$
$$= (\alpha.x_1 + \beta.x_1, \alpha.y_1 + \beta.y_1)$$

$$= \big((\alpha.x_1, \alpha y_1) + (\beta.x_1, \beta.y_1)\big) = [\alpha \times (x_1, y_1)] + [\beta \times (x_1, y_1)]$$

$$\alpha \times [(x_1, y_1) + (x_2, y_2)] = \alpha \times (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$
$$= (\alpha.(x_1 + x_2), \alpha.(y_1 + y_2))$$

$$= \big((\alpha.x_1 + \alpha.x_2), (\alpha.y_1 + \alpha.y_2)\big) = \big((\alpha.x_1, \alpha.y_1) + (\alpha.x_2, \alpha.y_2)\big)$$

$$= [\alpha \times (x_1, y_1)] + [\alpha \times (x_2, y_2)]$$

$$\alpha \times [\beta \times (x_1, y_1)] = \alpha \times [(\beta.x_1, \beta.y_1)] = (\alpha.\beta.x_1, \alpha.\beta.y_1)$$
$$= (\alpha.\beta) \times (x_1, y_1)$$

$$1 \times (x_1, y_1) = (1.x_1, 1.y_1) = (x_1, y_1)$$

ومنه فعلا $(IR^2, +, \times)$ هو IR-ف-ش.

تعميم الفضاء الشعاعي IR^n:

يمكن تعميم المثال السابق للحصول على الفضاء الشعاعي IR^n المعرف بـ :

$$IR^n = IR \times IR \times \dots \times IR = \{(x_1, x_2, \dots, x_n)/x_1, x_2, \dots, x_n \epsilon\ IR\}$$

ونعرق قانون تركيب داخلي هو الجمع + بـ :

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$$

ونعرف قانون التركيب ثاني هو الجداء × بـ :

$$\lambda \times (x_1, x_2, \dots, x_n) = (\lambda \times x_1, \lambda \times x_2, \dots, \lambda \times x_n)$$

ملاحظة :

نرمز بـ O_E للعنصر الحيادي في الزمرة $(E,+)$ و بـ $O_{\mathbb{K}}$ للعنصر الحيادي لعملية الجمع في الحقل IK.

1-3 الفضاء الشعاعي الجزئي :

ليكن E ف – ش و F مجموعة جزئية من E , نقول أن F هو فضاء شعاعي جزئي من الفضاء الشعاعي E إذا تحقق :

- $O_E \epsilon F$.
- $\forall v, w \epsilon F \quad : (v + w) \epsilon F$
- $\forall v \epsilon F \quad , \quad \forall \lambda \epsilon IK \quad : \quad \lambda . v \epsilon F$

أو التعريف المكافئ لـ :

$$O_E \epsilon F$$
$$\forall \alpha, \beta \epsilon IK, \forall v, w \epsilon F \ : (\alpha . v) + (\beta . w) \epsilon F$$

مثال-1-:

في الفضاء الشعاعي IR^2 نعتبر المجموعة الجزئية.

$$F = \{(x, y)\epsilon IR^2 / \, x + y = 0\}$$

إن F هو فضاء جزئي من الفضاء الشعاعي IR^2 لأن :

$0_{\mathbb{R}^2} = (0,0)\epsilon F$ لأن: $0 + 0 = 0$

$$\forall (x_1, y_1), (x_2, y_2)\epsilon F : x_1 + y_1 = 0 \ \wedge \ x_2 + y_2 = 0$$

لدينا : $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)\epsilon F$ لأن:

$$(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) = (x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) = 0 + 0 = 0$$

ومنه: $(x_1, y_1) + (x_2, y_2)\epsilon F$

$$\forall (x_1, y_1)\epsilon F \quad , \quad \forall \lambda \, \epsilon IR : x_1 + y_1 = 0$$

لدينا : $\lambda. (x_1, y_1) = (\lambda. x_1, \lambda. y_1)\epsilon \, F$ لأن :

$$(\lambda. x_1) + (\lambda. y_1) = \lambda. (x_1 + y_1) = \lambda. 0 = 0$$

ومنه:

$$\forall (x_1, y_1)\epsilon F \quad , \quad \forall \lambda \, \epsilon IR : \ \lambda. (x_1, y_1)\epsilon F$$

مثال-2-:

في فضاء شعاعي $\mathbb{R}^3$ المجموعة : $F = \{(x. y. z)\epsilon IR^3 / \, x > 0\}$

-. ليست فضاء شعاعي جزئي من الفضاء الشعاعي IR^3 لأن : $\propto. v \notin F$ وذلك عند أخذ مثلا $\propto = -1$ نجد:

$$\propto (x, y, z) = (-x, -y, -z), -x \ngtr 0$$

تمرين : ليكن $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x = 0\}$ - بين أن H فضاء شعاعي جزئي من $\mathbb{R}^3$ ؟

جمع الفضاءات الشعاعية:

ليكن $F_1, F_2, F_3, \ldots, F_n$ n فضاء شعاعي جزئي من E نعرف المجموعة :

$$F = F_1 + F_2 + \cdots + F_n = \{x_1 + x_2 + \cdots + x_n \,, x_i \in F_i\}$$

التي هي كذلك ف . ش . ج من E يسمى مجموع الفضاءات الشعاعية الجزئية .

وإذا كان :

$$\begin{cases} 1) F = F_1 +_2 + \cdots + F_n \\ 2)\ F_i \cap (\sum_j F_j) = 0_E \ , \forall\, i, j \end{cases}$$

نقول أن E هو مجموع مباشر للفضاءات الشعاعية الجزئية ونكتب : $F = F_1 \oplus F_2 \oplus \ldots \oplus F_n$

1-4 الارتباط الخطي و الاستقلال الخطي :

ليكنE ف – ش ولتكن $V_1, V_2, V_3, \ldots, V_n$ جملة أشعة في الفضاء E نقول عن عنصر V من E أنه مزج (تركيب) خطي لجملة الأشعة إذا أمكن كتابته على الشكل :

$$V = (\lambda_1 . V_1) + (\lambda_2 . V_2) + (\lambda_3 . V_3) + \cdots + (\lambda_n . V_n) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i V_i$$

خلاصة :

الجملة $\{V_1, V_2, V_3, \ldots, V_n\}$ تولد E $\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} \forall V \in E,\ \exists \lambda_i \epsilon IK \ / \\ V = (\lambda_1 . V_1) + (\lambda_2 . V_2) + (\lambda_3 . V_3) + \cdots + (\lambda_n . V_n) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i V_i \end{cases}$$

ليكنE ف – ش ولتكن $V_1, V_2, V_3, \ldots, V_n$ أشعة في الفضاء E

-. نقول أن الأشعة $V_1, V_2, V_3, \ldots, V_n$ مستقلة خطيا إذا كان :

$$\forall \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_n \epsilon IK:$$

$$(\lambda_1 . V_1) + (\lambda_2 . V_2) + \cdots + (\lambda_n . V_n) = O_E \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = O_{\mathbb{K}}$$

-. ونقول أن الأشعة $V_1, V_2, V_3, \dots, V_n$ مرتبطة خطيا إذا كان :

$\exists \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n \epsilon\, IK$ ليست كلها معدومة بحيث:

$$(\lambda_1.V_1) + (\lambda_2.V_2) + (\lambda_3.V_3) + \cdots + (\lambda_n.V_n) = O_E$$

مثال-1-:

الشعاعان $V_1 = (-1,1)$ و$V_2 = (1,2)$ مستقلين خطيا لأن :

$\forall \lambda_1, \lambda_2 \epsilon\, IR$:

$$(\lambda_1.V_1) + (\lambda_2.V_2) = O_{IR^2} \Leftrightarrow \big(\lambda_1.(-1,1)\big) + \big(\lambda_2.(1,1)\big) = (0,0)$$

$$\Rightarrow (-\lambda_1 + \lambda_2, \lambda_1 + \lambda_2) = (0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} -\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \end{cases}$$

أي أن:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 0$$

مثال-2-:

في الفضاء الشعاعي IR^3 الأشعة $V_1 = (1,3,1)\,, V_2 = (0,1,-1)\,, V_3 = (2,5,3)$

مرتبطة خطيا , لأنه لدينا : $\forall \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \epsilon\, IK$:

$$(\lambda_1.V_1) + (\lambda_2.V_2) + (\lambda_3.V_3) = O_{IR^3}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_3 = 0 \\ 3\lambda_1 + \lambda_2 + 5\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 - \lambda_2 + 3\lambda_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -2\lambda_3 \\ \lambda_2 = \lambda_3 \end{cases}$$

ومنه بوضع $\lambda_3 = 1$ نجد $\lambda_2 = 1$ و $\lambda_1 = -2$, أي انه لدينا :

$\exists \lambda_1 = -2, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 1\, \epsilon \mathrm{IR}$:

$$-2.V_1 + 1.V_2 + 1.V_3 = O_{IR^3} = (0,0,0)$$

تمرين : لتكن الأشعة الثلاثة من IR^3 : $V_1 = (0,1,1)\ , V_2 = (-1,0,1)\ , V_3 = (1,-1,0)$

- هل هذه الأشعة مستقلة خطيا مثنى مثنى ؟

1-5 الأساس والبعد:

ليكن E ف – ش نقول عن جملة الأشعة $B = (V_1, V_2, V_3, \dots, V_n)$ أنها تشكل أساس لـ E : إذا تحقق:

1- B مستقلة خطيا.
2- B تولد E أي كل عنصر من E يكتب مزجا خطيا لـ E .

مرتبة جملة أشعة:

ليكن E ف – ش نسمي مرتبة جملة الأشعة $A = (V_1, V_2, V_3, \dots, V_n)$ من E بعد الفضاء الشعاعي الجزئي F من E المولد بالجملة A .

إن F مولدة بجملة مستقلة خطيا من A وهي أكبر جملة مستقلة خطيا يمكن استخراجها من A ونرمز لها بـ: $rang(A)$.

مثال-1-:

لتكن الجملة: $V_1 = (3,3,3)\ , V_2 = (4,5,6)\ , V_3 = (1,2,3)$

لدينا $V_2 - V_1 = V_3$ ومنه الجملة مرتبطة خطيا إذن ندرس الاستقلال الخطي لـ $V_1\ , V_2$ أي :

$\alpha V_1 + \beta V_2 = (0,0,0)$ ومنه $(\alpha, 2\alpha, 3\alpha) + (4\beta, 5\beta, 6\beta) = (0,0,0)$ وعليه

$$\alpha = \beta = 0$$

أي أن $V_1\ , V_2$ مستقلين خطيا وبالتالي مرتبة الجملة هي: $rang(A) = 2$.

سلسلة تمارين

التمرين الأول:

بين فيما إذا كان كل من A, B فضائين شعاعيين جزئيين من $\mathbb{R}^2$.

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / \ y = 2x \}$$

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / \ x \ \geq 0\}$$

التمرين الثاني: لتكن الأشعة الثلاثة من IR^3 :

$$V_1 = (0,1,1) \, , V_2 = (-1,0,1) \, , V_3 = (1,-1,0)$$

- هل هذه الأشعة مستقلة خطيا مثنى مثنى ؟

-أثبت أن الأشعة الثلاثة التالية : $f = (1,1,1) \, , \mathrm{d} = (1,2,3) \, , \mathrm{g} = (2,-1,1)$

تولد IR^3.

التمرين الثالث: 1) هل الشعاع $\mathrm{c} = (3,-5,2)$ هو تركيب خطي للشعاعين :

$$\mathrm{w} = (2,0,-1) \, , \mathrm{v} = (1,5,0)$$

2) من أجل أي قيمة لـ : k يكون الشعاع $\mathrm{c} = (1,-2,k)$ عبارة خطية للشعاعين:

$$\mathrm{a} = (1,-1,1), b = (1,2,3)$$

التمرين الرابع: لتكن الأشعة : $\mathrm{a} = (1,2,3), b = (4,5,6), c = (3,3,3)$

أوجد مرتبة الجملة : $\mathrm{X} = \{a, b, c\}$

هل الأشعة : $\{a, b, c\}$ تولد $\mathbb{R}^3$.

التمرين الخامس: لتكن المجموعتان:

$$H_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 /\ x+y+z=0\}$$

$$H_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 /\ x = 0\}$$

1) برهن أن H_1, H_2 فضاءين شعاعيين جزئيين.
2) استخرج أساس لكل من H_1, H_2 .
3) حدد بعدي H_1, H_2.

الفصل الثاني

التطبيقات الخطية

1- التطبيقات الخطية :

ليكن F و E فضائين شعاعيين على نفس الحقل IK و $f: E \rightarrow F$ تطبيق

نقول أن f تطبيق خطي من E نحو F إذا كان :

$$1)\ \forall V_1, V_2 \epsilon\ E : f(V_1 + V_2) = f(V_1) + f(V_2)$$

$$2)\ \forall\ V \epsilon\ E\ \forall, \lambda \epsilon\ IK\ :\ f(\lambda . V) = \lambda . f(V)$$

أو التعريف المكافئ التالي :

$$\forall V_1, V_2 \epsilon\ E\ , \forall \lambda_1, \lambda_2, \epsilon\ IK: f[(\lambda_1 . V_1) + (\lambda_2 . V_2)] = [\lambda_1 . f(V_1)] + [\lambda_2 . f(V_2)]$$

ملاحظة : إذا كان f تطبيقا خطيا من E نحو F فإنه لدينا :

$$f(O_E) = O_F \quad \wedge \quad \forall\ V \in E : f\ (-V) = -f(V)$$

مثال- 1-:

بين أن التطبيق التالي f خطي , حيث :

$$f : IR \rightarrow IR$$

$$x \longmapsto f(x) = 3 . x$$

لدينا :

$$\forall x_1, x_2 \epsilon IR \qquad \forall \lambda_1, \lambda_2 \epsilon IR :$$

$$f[(\lambda_1 . x_1) + (\lambda_2 . x_2)] = f[\lambda_1 . x_1 + \lambda_2 . x_2] = 3 . (\lambda_1 . x_1 + \lambda_2 . x_2)$$

$$= (3 . \lambda_1 . x_1 + 3 . \lambda_2 . x_2)$$

$$= \ [\lambda_1 . (3 . x_1)] + [\lambda_2 . (3 . x_2)] = [\lambda_1 . f(x_1)] + [\lambda_2 . f(x_2)]$$

مثال- 2-:

بين أن التطبيق التالي f خطي , حيث :

$$f : IR^2 \to IR^2$$

$$(x,y) \longmapsto f(x,y) = (2x - y, x + y)$$

لدينا:

$$\forall (x_1,y_1),(x_2,y_2) \epsilon IR^2$$

$$f[(x_1,y_1) + (x_2,y_2)] = f[(x_1 + x_2, y_1 + y_2]$$

$$= \left(2(x_1 + x_2) - (y_1 + y_2), (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)\right)$$

$$= \left((2x_1 - y_1) + (2x_2 - y_2), (x_1 + y_1) + (x_2 + y_2)\right)$$

$$= \left((2x_1 - y_1), (x_1 + y_1)\right) + \left((2x_2 - y_2), (x_2 + y_2)\right)$$

$$= f\left((x_1,y_1)\right) + f\left((x_2,y_2)\right)$$

لدينا من جهة أخرى :

$$\forall (x,y) \epsilon IR^2 \quad , \forall \lambda \epsilon IR$$

$$f[\lambda.(x,y)] = f[(\lambda.x, \lambda.y)] = (\lambda.2x - \lambda.y, \lambda.x + \lambda.y) = \lambda.(2x - y, x + y)$$
$$= \lambda.f(x,y)$$

ومنه f تطبيق خطي من $\mathbb{R}^2$ نحو IR^2

مثال- 3-:

هل التطبيق التالي خطي , حيث :

$$f : IR^2 \to IR$$

$$(x,y) \longmapsto f(x,y) = x.y$$

$$\forall \lambda \epsilon IR \quad , \quad \forall (x,y) \epsilon IR^2$$

لدينا من أجل $\lambda \neq 0$ و $\lambda \neq 1$:

$$f[\lambda.(x,y)] = f[(\lambda.x,\lambda.y)] = \lambda.x.\lambda y = \lambda^2.x.y$$

$$\neq \lambda.f(x,y) = \lambda.(x.y) = \lambda.x.y$$

ومنه f ليس تطبيقا خطيا .

2) النواة و الصورة :

ليكن f تطبيق خطي من E نحو F

- نسمي **نواة** التطبيق f المجموعة المرموز لهاب $\boldsymbol{Ker}(f)$ و المعرفةب :

$$\boldsymbol{Ker}(f) = \{x \epsilon E \ / \ f(x) = O_F\}$$

- نسمي **صورة** التطبيق f المجموعة المرموز لهاب $\boldsymbol{Im}(f)$ و المعرفةب :

$$\boldsymbol{Im}(f) = \{y \epsilon F \quad / \exists x \epsilon E \ : \ y = f(x)\}$$

مثال-4- :

أحسب نواة التطبيق التالي :

$$f : IR^3 \to IR^2$$

$$(x,y,z) \longmapsto f(x,y,z) = (x-y, y-z)$$

$$Ker(f) = \{(x,y,z)\epsilon IR^3 / f(x,y,z) = O_{IR^2}\}$$

$$\Leftrightarrow Ker(f) = \{(x,y,z)\epsilon IR^3 / f(x,y,z) = (0,0)\}$$
$$= \{(x,y,z)\epsilon IR^3 / (x-y, y-z) = (0,0)\}$$

$$\Leftrightarrow Ker(f) = \{(x,y,z)\epsilon IR^3 / x-y = 0 \ \wedge \ y-z = 0\}$$
$$= \{(x,y,z)\epsilon IR^3 / x = y \ \wedge \ y = z\}$$

$$\Leftrightarrow Ker(f) = \{(x,y,z)\epsilon IR^3 / \ x = y = z\}$$

ومنه:

$$Ker(f) = \{(x,x,x)\epsilon IR^3 / \ x \epsilon IR\}$$

نظرية: إذا كان f تطبيقا خطيا من E نحو F , فإنه لدينا :

- f تطبيق غامر $\Leftrightarrow \boldsymbol{Im}(f) = F$
- f تطبيق متباين $\Leftrightarrow \boldsymbol{Ker}(f) = E$

تمرين-1- :

ليكن التطبيق الخطي المعرف بـ :

$$f: IR^2 \to IR^2$$

$$(x, y) \longmapsto f(x, y) = (3x - y, 2y - x)$$

احسب $Ker(f)$ و $Im(f)$ واستنتج أن التطبيق f تقابلي

الحل:

لدينا :

$$Ker(f) = \{(x, y) \epsilon IR^2 / f(x, y) = O_{IR^2}\}$$

$$\Leftrightarrow Ker(f) = \{(x, y) \epsilon IR^2 / f(x, y) = (0,0)\}$$
$$= \{(x, y) \epsilon IR^2 / (3x - y, 2y - x) = (0,0)\}$$

$$\Leftrightarrow Ker(f) = \{(x, y) \epsilon IR^2 / 3x - y = 0 \wedge 2y - x = 0\}$$
$$= \{(x, y) \epsilon IR^2 / x = 0 \wedge y = 0\}$$

$$\Leftrightarrow Ker(f) = \{(0,0)\}$$

بما أن: $Ker(f) = \{(0,0)\} = \{O_{IR^2}\}$ فإن التطبيق f متباين

لدينا : $Im(f) = \{(a, b) \in IR^2 / \exists (x, y) \in IR^2 : (a, b) = f(x, y)\}$

$$\Leftrightarrow Im(f) = \{(a, b) \in IR^2 / \exists (x, y) \in IR^2 : (a, b) = (3x - y, 2y - x)\}$$

$$\Leftrightarrow Im(f) = \{(3x - y, 2y - x) \in IR^2 / (x, y) \in IR^2\} = IR^2$$

بما أن: $Im(f) = IR^2$ فإن التطبيق f غامر ومنه التطبيق f تقابلي .

تمرين-2-: ليكن التطبيق التالي f حيث :

$f : IR^2 \to IR$

$(x,y) \longmapsto f(x,y) = x - y$

1- بين أن f خطي

2- أوجد $Im(f)\,, ker(f)$

3- هل f تقابلي.؟

الحل:

1- تبيان أن التطبيق خطي

لدينا:

$\forall\ v = (x,y), w = (x',y'), \epsilon IR^2\ ,\ \forall \lambda \epsilon IR :$

$f[v + w] = f[(x,y) + (x',y')] = f[(x + x', y + y')] = (x + x') - (y + y')$

$= (x - y) + (x' - y') = f(v) + f(w)$

$f[\lambda . v] = f[(\lambda . x, \lambda . y)] = \lambda . x - \lambda y = \lambda(x - y) = \lambda f(v)$

ومنه f تطبيق خطي.

إيجاد الصورة والنواة:

1) النواة:

$Ker(f) = \{(x,y)\epsilon IR^2 / f(x,y) = O_{\mathbb{R}}\}$

$\Leftrightarrow Ker(f) = \{(x,y)\epsilon IR^2 / f(x,y) = 0\} = \{(x,y)\epsilon IR^2\ /(x - y) = 0\}$

$\Leftrightarrow Ker(f) = \{(x,y)\epsilon IR^2 / x = y\} = \{(x,x) = x(1,1)\,, x\epsilon\mathbb{R}\}$

$Ker(f)$ مولدة بـ $(1,1)$ و هو مستقل خطيا إذن $\{(1,1)\}$ أساس لـ $ker\ (f)$

ومنه $dim\,ker(f)=1\neq 0$ وبالتالي f ليس متباين .

2)الصورة:

لدينا : $Im(f)=\{a\in\mathbb{R}/\ \exists(x,y)\in IR^2: a=f(x,y)\}$

$\Leftrightarrow Im(f)=\{a\in\mathbb{R}/\ \exists(x,y)\in IR^2: a=x-y\}$

$\Leftrightarrow Im(f)=\{a\in\mathbb{R}/\ a=x-y\in\mathbb{R}\}=\mathbb{R}$

ومنه : $dim\,Im(f)=1$

بما أن $Im(f)=\mathbb{R}$ فإن التطبيق f غامر ومنه التطبيق f ليس تقابلي .

و بما أن f ليس متباينا فهو ليس تقابليا.

سلسلة تمارين

التمرين الأول: بين فيما إذا كانت التطبيقات التالية خطية أم لا.

■ $f:\ IR^2\to IR^2$

$(x,y)\longmapsto f(x,y)=(2x+y,x-y)$

■ $f:\ IR^3\to IR^3$

$(x,y,z)\longmapsto f(x,y,z)=(2x+y+z,y-z,x+y)$

■ $f:\ IR^3\to IR^3$

$(x,y,z)\longmapsto f(x,y,z)=(x^2,x,y)$

التمرين الثاني: ليكن التطبيق التالي:

$f: IR^2 \to IR^2$

$(x, y) \longmapsto f(x, y) = (x + y, x - y)$

1-بين أن f خطي.

2-أوجد **النواة** وماذا تستنتج.

3-أوجد **الصورة** وماذا تستنتج.

4-هل التطبيق تقابلي ؟ برر جوابك.

التمرين الثالث: ليكن التطبيق التالي:

$g: IR^2 \to IR^2$

$(x, y) \longmapsto g(x, y) = (2x + y, x - y)$

1-عين $Im(g)$, $\ker(g)$ هل g متباين ؟ وهل هو غامر؟.

2-أوجد $dimIm(g)$, $\dim Ker(g)$.

الفصل الثالث

المصفوفات و المحددات

1- المصفوفات:

1-1) تعاريف :

- ليكن IK حقلا ولتكن العناصر $a_{ij} \in \mathrm{IK}, \ i = 1:m \ \ , j = 1:n$

تعرف المصفوفة بأنها مجموعة مربعة أو مستطيلة من الأعداد منتظمة بشكل سطور و أعمدة.

$$\mathrm{A_{ij}} = \begin{bmatrix} \mathrm{a_{11}} & \mathrm{a_{12}} & \cdots & \mathrm{a_{1n}} \\ \mathrm{a_{21}} & \mathrm{a_{22}} & \cdots & \mathrm{a_{2n}} \\ \mathrm{a_{31}} & \mathrm{a_{32}} & \cdots & \mathrm{a_{3n}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathrm{a_{m1}} & \mathrm{a_{m2}} & \cdots & \mathrm{a_{mn}} \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\mathbf{i} = \text{سطر} \ , \qquad \mathbf{j} = \text{عمود}}$$

إذن الشكل التالي: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ يسمى مصفوفة ذات m سطر و n عمود ونقول

أيضا أنها مصفوفة من النوع (m, n) ونرمز بـ : $A \in IK^{m.n}$

حيث السطر الأول هو: $(a_{11} \ a_{12} \ a_{13} \ \ldots a_{1n})$

والعمود الأول هو: $\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$

كما نرمز للمصفوفة بـ :

$A = (a_{ij}) \ i = 1:m \, , \quad j = 1:\mathrm{n}$ مع a_{ij} هو العنصر الذي يقع في السطر i والعمود j .

و بصفة عامة نكتب : $A \in M_{m,n} \ (IK)$

- نقول أن المصفوفتين $A = (a_{ij})$ و $B = (b_{ij})$ متساويتان إذا كان :

$$\forall i = 1:m, \forall j = 1:\text{n}: a_{\text{ij}} = \text{b}_{\text{ij}}$$

- نقول أن المصفوفة $A = (a_{ij})$ معدومة اذا كان : $a_{\text{ij}} = 0$: $\forall i, j$

- نقول أن المصفوفة $A = (a_{ij})$ مربعة اذا كان : n=m

- نقول عن المصفوفة $A = (a_{ij})$ المربعة أنها :

* مثلثية سفلى إذا كان : $a_{\text{ij}} = 0 \quad \forall j > i$:

* مثلثية علوية إذا كان : $a_{\text{ij}} = 0 \quad \forall j < i$:

*قطرية إذا كان : $a_{\text{ij}} = 0 \quad \forall j \neq i$:

- المصفوفة الحيادية هي مصفوفة قطرية بحيث كل عناصر القطر تساوي 1 ونرمز لها ب:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

- منقول المصفوفة $A = (a_{ij})$ هي المصفوفة المرموز لها ب A^{t} والمعرفة ب $A^{\text{t}} = (a_{ji})$

مثال-1- :

منقول المصفوفة $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ هي المصفوفة $A^{\text{t}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$

- نقول أن المصفوفة المربعة $\text{A} = (a_{ij})$ تناظرية اذا كان : $A = A^{\text{t}}$.

وضد التناظرية إذا كان : $A = -A^{\text{t}}$.

1-2- عمليات على المصفوفات :

- الجمع :

جمع المصفوفتين $A=(a_{ij})_{m,n}$ و $B=(b_{ij})_{m,n}$ هي المصفوفة c المعرفة بـ :

$$c = A+B \quad \text{حيث} \quad c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$$

مثال-2- : $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 3\\ 1 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 5\\ 3 & 7\end{pmatrix}$

- جداء مصفوفة بعدد:

جداء المصفوفة $A=(a_{ij})_{m,n}$ بالعدد الحقيقي λ هي المصفوفة المعرفة بـ :

$$\lambda.A=(\lambda.a_{ij})_{m,n}$$

مثال-3- : $2.\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\ 3 & 4 & 2\\ 1 & 3 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 2 & 4\\ 6 & 8 & 4\\ 2 & 6 & 2\end{pmatrix}$

- جداء مصفوفتين :

جداء مصفوفتين $A=(a_{ij})_{m,n}$ ، $B=(b_{ij})_{n,p}$ هي المصفوفة $C=(c_{ij})_{m,p}$ المعرفة بـ :

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}.b_{kj}$$

مثال-4- :

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 2\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 5\\ 2 & 7\end{pmatrix} \quad \text{و} \quad \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 7 & 6\end{pmatrix}$$

ملاحظة: عموما لدينا: $A.B\neq B.A$

مثلا: $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1 & 4\\ 2 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

$A.B=\begin{pmatrix}1&2&0\\0&1&1\\1&0&0\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}1&4\\2&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&4\\2&1\\1&4\end{pmatrix}$ لكن في هذه الحالة الجداء $B.A$ غير معرف

خواص :

$$(A+B)^t=A^t+B^t=B^t+A^t\ ,\qquad (\lambda.A)^t=\lambda.A^t\ \forall\lambda\in IR\ ,$$

$$(A.B).C=A.(B.C)$$

$$(A.B)^t=B^t.A^t,\quad A.(B+C)=A.B+A.C\quad ,\quad (B+C).A=B.A+C.A$$

مثال-5- :

لتكن المصفوفتين : $B=\begin{pmatrix}-1&3&5\\1&-3&-5\\-1&3&5\end{pmatrix}\quad ,\quad A=\begin{pmatrix}2&-3&-5\\-1&4&5\\1&-3&-4\end{pmatrix}$

أحسب $(A+B)^t\ ,\ A+B\ ,\ B.A\ ,\ A^t,A.B$ وهل المصفوفة A هي تناظرية

لدينا : المصفوفة A ليست تناظرية لأن $A^t=\begin{pmatrix}2&-1&1\\-3&4&-3\\-5&5&-4\end{pmatrix}\neq A$

$$A.B=0\qquad (si\ \ A.B=0\ \ \nRightarrow A=0\lor\ B=0)$$

حالة خاصة فقط $B.A=0\ (A.B=0=B.A)$

1-3- مرتبة المصفوفة :

لتكن المصفوفة $A\in M_{m,n}$ نسمي مرتبة المصفوفة ونرمز لهاب $rg(A)$ عدد أعمدة أو أسطر المصفوفة A المستقلة خطيا

طريقة عملية :

لإيجاد مرتبة المصفوفة A نحولها إلى مصفوفة مثلثيه سفلى أو علوية ويكون عدد الأعمدة أو عدد الأسطر الغير معدومة هو $rg(A)$

مثال-6- :

أوجد مرتبتي المصفوفتين A وB:

$$A=\begin{pmatrix}1&1&2\\1&-1&1\\2&0&3\\2&2&4\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[(4)-(3)]{\substack{(2)-(1)\\(3)-2.(1)}}\begin{pmatrix}1&1&2\\0&-2&-1\\0&2&1\\0&2&1\end{pmatrix}\xrightarrow[(4)+(2)]{(3)+(2)}\begin{pmatrix}1&1&2\\0&-2&-1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\Rightarrow rg(A)=2$$

$$B=\begin{pmatrix}4&2&1\\2&8&-1\\1&1&5\end{pmatrix}\xrightarrow[(3)-\frac{1}{2}.(2)]{(2)-\frac{1}{2}.(1)}\begin{pmatrix}4&2&1\\0&7&-\frac{3}{2}\\0&-3&\frac{11}{2}\end{pmatrix}\xrightarrow{(3)+\frac{3}{7}.(2)}\begin{pmatrix}4&2&1\\0&7&-\frac{3}{2}\\0&0&\frac{34}{7}\end{pmatrix}\Rightarrow rg(B)=3$$

2-1-3 مقلوب مصفوفة مربعة :

نقول عن مصفوفة مربعة A أنها قابلة للقلب إذا وجدت مصفوفة مربعة نرمز لها بـ A^{-1} بحيث :

$$A.A^{-1}=A^{-1}.A=I$$

مثال-7- :

أوجد مقلوب المصفوفة $A=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$

نضع: $A^{-1}=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ ومنه لدينا :

$$\mathrm{A.A^{-1}=I}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}a+c&b+d\\c&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\Leftrightarrow a=1,b=-1,c=0,d=1$$

ومنه : $A^{-1}=\begin{pmatrix}1&-1\\0&1\end{pmatrix}$

لتكن المصفوفتين A و B القابلتين للقلب , لدينا الخواص التالية :

$$(A^{-1})^t=(A^{\mathrm{t}})^{-1}\quad,(\mathrm{A}^{-1})^{-1}=\mathrm{A}\quad,(\mathrm{A.B})^{-1}=\mathrm{B}^{-1}.\mathrm{A}^{-1}\ ,\qquad \mathrm{I}^{-1}=I$$

نقول أن المصفوفة A أنها مصفوفة عمودية إذا كان: $A^t = A^{-1}$.

1-5- طريقة غوص جور دان لحساب مقلوب مصفوفة:

وتعتمد على تحويل الشكل A/I إلى الشكل $\mathrm{I/A^{-1}}$ من خلال استعمال العناصر المحورية .

مثال-8-:

أحسب مقلوب المصفوفة $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

لدينا : $A/I = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{(2)-(1)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$

$$\xrightarrow{(3)-(2)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{(1)-(3)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) = I/A^{-1}$$

ومنه المصفوفة المقلوبة أو العكسية هي : $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

مثال -9-:

مقلوب $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ لدينا :

$$A/I = \left(\begin{array}{cc|cc} 4 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{(2)-\frac{(1).\frac{1}{4}_1}{2}.(1)} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{(2).2^{(1)-\frac{1}{2}.(2)}} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right)$$

$$= \mathrm{I/A^{-1}}$$

ومنه المصفوفة المقلوبة أو العكسية هي : $\mathrm{A^{-1}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

2- المحددات :

2-1- تعريف المصفوفة المستخرجة :

لتكن المصفوفة المربعة $A=(a_{ij})\in M_m$, نرمز بـ A_{ij} للمصفوفة المستخرجة من المصفوفة A من خلال حذف السطر رقم i و العمود j.

مثال-1- :
$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 3 & 1 & -1\\ 0 & 5 & 2\end{pmatrix} \Rightarrow A_{11}=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 5 & 2\end{pmatrix},\ A_{32}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & -1\end{pmatrix}$$

2-2- تعريــف المحدد :

لتكن المصفوفة المربعة
$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1m}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{m1} & \cdots & a_{mm}\end{pmatrix}$$

- من أجل $m=1$ فان محدد المصفوفة A هو العدد المرموز له بـ :

$$\det(A)=|A|=a_{11}$$

- من أجل $m=2$ فان محدد المصفوفة A هو العدد المرموز له بـ :

$$\det(A)=|A|=a_{11}.a_{22}-a_{12}.a_{21}$$

- من أجل $m>2$ فان محدد المصفوفة A هو العدد المرموز له بـ :

$$\det(A)=|A|=\sum_{i=1}^{m}(-1)^{i+j_0}\,a_{ij_0}.|A_{ij_0}|$$

حيث j_0 هو عمود مختار عشوائيا من بين أعمدة المصفوفة A

مثال-2- :

أحسب المحددات التالية :
$$\begin{vmatrix}2 & 1\\ 4 & 2\end{vmatrix}=2.2-4.1=0$$

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = +1.\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - 2.\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 1.\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= +1.(1-0) - 2.(0-2) + 1.(0-1) = 4$$

$$\begin{vmatrix} + & - & + & - \\ 0 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 8 & 0 \end{vmatrix} = +0.\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 1 & 8 & 0 \end{vmatrix} - (-1).\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 8 & 0 \end{vmatrix} + 1.\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} - 3.\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 8 \end{vmatrix}$$

$$= -18$$

خواص :

إذا كانت A مصفوفة مثلثيه سفلية أو علوية أو قطرية فان محددها يساوي جداء عناصرها القطرية .

مثال-3- :

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 1.4.3.2 = 24 \text{ و } \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -4$$

خواص :

- إذا كانت المصفوفة B هي حاصل ضرب سطر أو عمود واحد من المصفوفة A بالعدد λ فان :

$$|B| = \lambda.|A|$$

- وبصفة عامة إذا كانت المصفوفة B هي حاصل ضرب المصفوفة $A \epsilon M_m$ بالعدد λ فان :

$$|B| = \lambda^m.|A|$$

- إذا بدلنا ترتيب سطرين أو عمودين في المصفوفة A فان : $|B| = -|A|$

مثال-4- : لتكن

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, B_1 = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}, \quad B_3 = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

لدينا :

$$|A| = -2 \ , |B_1| = 5.|A| = -10 \ , \ |B_2| = 2^2.|A| = -8 \ , \ |B_3| = -|A| = +2$$

- إذا كان في المصفوفة A سطر أو عمود معدوم فان : $|A| = 0$

$$|A.B| = |A|.|B| \qquad , \qquad |A| = |A^t|$$

مثال-5- :

من أجل $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ لدينا : $A.B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

ومنه : $|A| = -1 \ , \ |B| = 2 \Rightarrow |A.B| = |A|.|B| = (-1).2 = -2$

تعريف :

نقول أن المصفوفة A نظامية إذا كان : $|A| \neq 0$

نظرية :

إذا كانت المصفوفة A مربعة فانه لدينا :

A مصفوفة قابلة للقلب $\Leftrightarrow |A| \neq 0 \Leftrightarrow rg(A) = m$

نتيجة : $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$

2-3- تعريف المصفوفة المرافقة :

لتكن $A \in M_m$ مصفوفة مربعة

نسمي مصفوفة مرافقة لـ A المصفوفة المعرفة بـ : $C^t = (c_{ij})^t$ حيث كل :

$c_{ij} = (-1)^{i+j}.|A_{ij}|$ و A_{ij} هي مصفوفة مستخرجة من A وذلك بحذف السطر i والعمود j.

نظرية : إذا كانت المصفوفة A قابلة للقلب فان : $A^{-1} = \frac{1}{|A|} . C^t$

مثال-6-:

من أجل المصفوفة $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 6 & 3 \\ 2 & -4 & 0 \end{pmatrix}$ لدينا $|A| = 64 \neq 0$ ومنه A قابلة للقلب

لنحسب الآن عناصر المصفوفة $C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}$

لدينا : $c_{11} = (-1)^{1+1} . |A_{11}| = 12$, $c_{12} = (-1)^{1+2} . |A_{12}| = 6$,

$c_{13} = (-1)^{1+3} . |A_{13}| = -16$

$c_{21} = (-1)^{2+1} . |A_{21}| = 4$, $c_{22} = (-1)^{2+2} . |A_{22}| = 2$,

$c_{23} = (-1)^{2+3} . |A_{23}| = 16$

$c_{31} = (-1)^{3+1} . |A_{13}| = 12$,

$c_{32} = (-1)^{3+2} . |A_{32}| = -10$, $c_{33} = (-1)^{3+3} . |A_{33}| = 16$

إذن $C^t = \begin{pmatrix} 12 & 4 & 12 \\ 6 & 2 & -10 \\ -16 & 16 & 16 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|} . C^t = \frac{1}{64} . \begin{pmatrix} 12 & 4 & 12 \\ 6 & 2 & -10 \\ -16 & 16 & 16 \end{pmatrix}$

مثال-7-:

من أجل المصفوفة $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ لدينا $|A| = 1 \neq 0$

ومنه A قابلة للقلب لنحسب عناصر المصفوفة $C = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix}$

لدينا : $C_{11} = (-1)^{1+1} . |A_{11}| = 2$, $c_{12} = (-1)^{1+2} . |A_{12}| = -1$

$C_{21} = (-1)^{2+1} . |A_{21}| = -1$, $c_{22} = (-1)^{2+2} . |A_{22}| = 1$

إذن $c^t = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|} . C^t = \frac{1}{1} . \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

سلسلة تمارين

التمرين الأول: لتكن المصفوفتين: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$

1. أوجد كلا من $A^t + B^t, (A+B)^t, B^t, A^t$.
2. أوجد $B^t . A^t$ ثم $(A.B)^t$ ماذا تستنتج قارن بين $A, (A^t)^t$.
3. أحسب B^{-1}, A^{-1} ثم $B^{-1}.A^{-1}$ و $(A.B)^{-1}$ ماذا تستنتج.

التمرين الثاني: لتكن : $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & -5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

1.أحسب $A - B, 3A, -B, B^t, A^t$.

2.هل يمكن حساب $A.B$ أحسب $A.B^t$.

التمرين الثالث: لتكن المصفوفة التالية $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

1-أحسب محدد A.

2-أوجد مرتبة A .

3-أوجد A^{-1} .

التمرين الرابع: لتكن المصفوفة التالية : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

1- أثبت أن : $A^2 = 2I + A$ ثم استنتج أن A قابلة للقلب .

2- عبر عن A^{-1} بدلالة A .

الفصل الرابع

جمل المعادلات الخطية

من بين أهم تطبيقات المحددات هو حل جملة المعادلات الخطية من الشكل **A.X=b** حيث **A** مصفوفة من النمط ***(m،n)*** قابلة للقلب و **b** شعاع من $\mathbb{R}^m$ و **X** شعاع مجهول من $\boldsymbol{R^m}$.

<u>طريقة كرامر:</u>

تعطى مركبات الشعاع **X** بالعبارة التالية: $\boldsymbol{x_i} = \frac{|A_i|}{|A|}$ حيث $\boldsymbol{A}_\mathbf{i}$ هي المصفوفة **A** مع تعويض العمود رقم **i** بالشعاع **b.**

<u>مثال-1- :</u>

أوجد حلول جملة المعادلات

$$\begin{cases} 5x - 6y \ = \ \ \ 15 \\ 3x + 4y = 29 \end{cases}$$

<u>الحل:</u>

1- نقوم بحساب المحدد :

$$\det(\mathrm{A}) = \begin{vmatrix} 5 & -6 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 5(4) - 3(-6) = 20 + 18 = 38$$

2- نحسب $\det{(A_1)}$:

نعوض عن العمود x في المحدد بالشعاع $(15\ ,\ \text{-}29)^{\perp}$

$$\det{(\mathrm{A}_1)} = \begin{vmatrix} 15 & -6 \\ -29 & 4 \end{vmatrix} = 15(4) - (-29)(-6) = -114$$

$$x = \frac{-114}{38} = -3$$

3- نحسب $\det{(A_2)}$:

نعوض عن العمود y في المحدد بالشعاع $(15\ ,\ \text{-}29)^{\perp}$

$$\det(A_2) = \begin{vmatrix} 5 & 15 \\ 3 & -29 \end{vmatrix} = 5(-29) - 3(15) = -190$$

$$y = \frac{-190}{38} = -5$$

مثال-2- :

أوجد حلول جملة المعادلات :

$$\begin{cases} x + 2y + z = 4 \\ 3x + 5y + 3z = 1 \\ 2x + 7y - z = 8 \end{cases}$$

الحل:

1- نحسب $\det(A)$:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 3 \\ 2 & 7 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= [(1 \times 5 \times -1) + (2 \times 3 \times 2) + (1 \times 3 \times 7)]$$

$$- [(2 \times 5 \times 1) + (7 \times 3 \times 1) + (-1 \times 3 \times 2)] = 3$$

2- نحسب $|A_1|$:

$$\det(A_1) = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 3 \\ 8 & 7 & -1 \end{vmatrix} = -87$$

$$x = \frac{-87}{3} = -29$$

3- نحسب $|A_2|$:

$$\det(A_2) = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \\ 2 & 8 & -1 \end{vmatrix} = 33$$

$$y = \frac{33}{3} = 11$$

4- نحسب $|A_3|$:

$$\det(A_3) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & 1 \\ 2 & 7 & 8 \end{vmatrix} = 33$$

$$z = \frac{33}{3} = 11$$

مثال-3-: حل الجملة الخطية **A.X=b** حيث: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 8 \\ 1 & 3 & 11 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$,

$$b = \begin{pmatrix} 5 \\ 15 \\ 21 \end{pmatrix}$$

لدينا الجملة **A.X= b** تملك حلا وحيد لأن $\boldsymbol{|A| = 6 \neq 0}$ اذن :

$$x_2 = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 1 & 15 & 8 \\ 1 & 21 & 11 \end{vmatrix}}{6} = \frac{-6}{6} = -1 \qquad x_1 = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 15 & 3 & 8 \\ 21 & 3 & 11 \end{vmatrix}}{6} = \frac{12}{6} = 2$$

$$x_3 = \frac{|A_3|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 15 \\ 1 & 3 & 21 \end{vmatrix}}{6} = \frac{12}{6} = 2$$

ومنه حل الجملة هو: $\boldsymbol{X = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}}$

طريقة استعمال المقلوب:

نقوم بحساب مقلوب المصفوفة A فيعطى الحل بالشكل التالي: $X = A^{-1}.b$

مثال-4-: حل الجملة التالية: $\begin{cases} x_1 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ x_2 + x_3 = 3 \end{cases}$ إذن يمكن كتابة هذه الجملة على الشكل

التالي:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad , \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

نحسب أولا: $\boldsymbol{A^{-1}}$ فنجد: $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ ومنه حل الجملة هو:

$$X = A^{-1}.b = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

طريقة غوص:

تعتمد هذه الطريقة على تحويل الشكل **A.b** إلى الشكل **T.b** حيث **T** هي مصفوفة مثلثيه سفلية أو علوية.

مثال-5-: حل الجملة الخطية السابقة:

$$A/b = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{(2)-(1)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{(3)-(2)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} 1.x_3 = 2 \\ 1.x_2 = 1 \\ 1.x_1 + 1.x_3 = 1 \end{cases} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

الفصل الخامس

القيم الذاتية والأشعة الذاتية

تعريف : لتكن A مصفوفة $(A = (a_{ij}) \in M_{n.m})$

الشعاع $X \neq 0$ يسمى بالشعاع الذاتي للمصفوفة A إذا وجد العدد λ بحيث يكون :

$$A X = \lambda . X \qquad (1)$$

ويسمى λ بالقيمة الذاتية للمصفوفة A الموافق للشعاع الذاتي $X \neq 0$

يمكن أن يكون الشعاع X على الشكل التالي:

$$X = [x_1, \dots , x_n]^{\perp}$$

حيث $x_1,\dots,x_n$ تسمى بمركبات الشعاع ومعنى أن $X \neq 0$ هو انه يوجد $X \neq 0$ لبعض قيم

$$i = 1 , 2 , \dots, n$$

ملاحظة:

نلاحظ انه لا يوجد شعاع ذاتي X للمصفوفة A يكون موافقا لقيمتين ذاتيتين ولتوضيح ذلك نفرض انه توجد قيمتين λ_1 , λ_2 حيث $\lambda_1 \neq \lambda_2$

أي أن :

$$A X = \lambda_1 X , A X = \lambda_2 X , \lambda_1 \neq \lambda_2 \Rightarrow \lambda_1 X = \lambda_2 X$$

$$\Rightarrow (\lambda_1 - \lambda_2) X = 0 \Rightarrow X = 0 \text{ (وهذا مستحيل)}$$

المعادلة المميزة :

من المعادلة (1) نعلم أن $A X = \lambda X = \lambda I_n X$

$A=(a_{ij})$ مصفوفة من النمط (n,n) و I_n هي مصفوفة الوحدة فإننا نحصل

على : $(A - \lambda I_n) X = 0$ أو على الشكل :

$$\begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad (2)$$

وبالتالي نحصل على جملة معادلات حيث تملك حل إذا كان:

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} \neq 0 \qquad (3)$$

و بالتالي العلاقة (3) هي كثير حدود في λ أي :

$$f(\lambda) = |A - \lambda I_n| = \lambda^n + C_1\lambda^{n-1} + C_2\lambda^{n-2} + \dots\dots + C_{n-1}\lambda + C_n$$

حيث $C_1 \;,\; C_2 \;,\; \dots\dots\dots \;,\; C_n$ تكون كل منها كثير حدود في العناصر a_{ij}

نعتبر المعادلة $f(\lambda) = |A - \lambda I_n| = 0$

وتسمى بالمعادلة المميزة للمصفوفة و هذه المعادلة من الدرجة n

و $\lambda_1, \lambda_2, \dots \dots \dots \dots \dots, \lambda_n$

تسمى بالقيم الذاتية.

مثال-1- :

اوجد المعادلة المميزة للمصفوفة

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

واثبت أن هذه المصفوفة تحقق معادلتها الذاتية ثم استنتج A^{-1}

الحل:

$$[A - \lambda I_3] = \begin{bmatrix} 2-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 2-\lambda \end{bmatrix}$$

المعادلة المميزة هي : $f(\lambda)=[A-\lambda I_3]$

$$\begin{bmatrix} 2-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 2-\lambda \end{bmatrix} = -\lambda^3+6\lambda^2-9\lambda+4=0 \quad (1)$$

ولإثبات أن المصفوفة A تحقق معادلتها الذاتية نبرهن أن :

$$-A^3+6A^2-9A+4I=0$$

$$A^2=\begin{bmatrix} 6 & -5 & 5 \\ -5 & 6 & -5 \\ 5 & -5 & 6 \end{bmatrix}, A^3=\begin{bmatrix} 22 & -21 & 21 \\ -21 & 22 & -21 \\ 21 & -21 & 22 \end{bmatrix}$$

وبالتعويض عن A, A^2, A^3, I نجد :

$$A(-A^2+6A-9I)=-4I \Rightarrow (-A^2+6A-9I)=-4A^{-1}$$

ومنه نجد أن :

$$A^{-1}=\frac{1}{4}A^2-\frac{3}{2}A+\frac{9}{4}I_3=\frac{1}{4}\begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

معناه:

$$A^{-1}=\begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}$$

مثال-2-:

اوجد القيم الذاتية و الأشعة الذاتية للمصفوفة :

$$A = \begin{bmatrix} 8 & -6 & 2 \\ -6 & 7 & -4 \\ 2 & -4 & 3 \end{bmatrix}$$

الحل:

المعادلة المميزة هي :

$$\left|A - \lambda I_3\right| = \begin{bmatrix} 8-\lambda & -6 & 2 \\ -6 & 7-\lambda & -4 \\ 2 & -4 & 3-\lambda \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$-\lambda^3 + 18\lambda^2 - 45\lambda = 0$$

$$\lambda(\lambda - 3)(\lambda - 15) = 0$$

ومنه القيم الذاتية للمصفوفة A هي :

$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = 15$$

ولنفرض x , y , z هي مركبات الشعاع الذاتي X أي أن :

عندما يكون $\lambda_1 = 0$ نحصل على :

$$\begin{bmatrix} 8 & -6 & 2 \\ -6 & 7 & -4 \\ 2 & -4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

وبالتالي نجد الجملة :

$$\begin{cases} 8x - 6y + 2z = 0 \\ -6x + 7y - 4z = 0 \\ 2x - 4y + 3z = 0 \end{cases}$$

وعليه فهذه الجملة لا تملك حل أو تملك عدد لا نهائي من الحلول لأن :

$$\begin{vmatrix} 8 & -6 & 2 \\ -6 & 7 & -4 \\ 2 & -4 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

امتحان السداسي الثاني – مقياس الرياضيات -02-   العام الدراسي: 2018/2017

التمرين الأول(6 نقاط): H مجموعة جزئية من $\mathbb{R}^2$ حيث:

$$H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / \ x \leq 0\}$$

1- هل H فضاء شعاعي جزئي من $\mathbb{R}^2$.

2- أوجد العدد الحقيقي k حتى يكون الشعاع c تركيب خطي للشعاعين v,w

$$\mathrm{c} = (1, -2, \mathrm{k}) \, , \mathrm{v} = (1,1,1) \, , \mathrm{w} = (1,2,3)$$

التمرين الثاني(8نقاط): لتكن المصفوفة A حيث : $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

لتكن المصفوفة B حيث : $B^t = 4.A^t$

1- أحسب $\det(B)$.

2- أوجد العدد الحقيقي $\propto$ حيث : $A^3 - 4A + \propto I_3 = 0_3$

3- استنتج أن A قابلة للقلب ثم أوجد A^{-1} .

4- باستعمال A^{-1} حل المعادلة $A.X = b$ حيث :

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \ , \ b = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

التمرين الثالث (6نقاط): ليكن التطبيق الخطي التالي حيث :

$$f : IR^2 \rightarrow IR^2$$

$$(x, y) \mapsto f(x, y) = (2x - 4y, x - 2y)$$

1- عين : $Im(f) \, , ker(f)$.

2- أحسب: $dimIm(f) \, , dim\ ker(f)$

ملحق :

التمرين الأول:

1- هل الأشعة $v_1 = (-1,1,1), v_2 = (1,-1,1)\ ,\ v_3 = (1,1,-1)$ مستقلة خطيا

2- هل الشعاع: $d = (1,1,-1)$ هو تركيب خطي للأشعة:

$$c = (0,-4,-2), b = (2,-1,0)\ ,\ a = (1,0,1)$$

التمرين الثاني:

لتكن المصفوفة A حيث : $A = \begin{pmatrix} \frac{\propto}{2} & -1 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \\ 1 & 2\propto & -2 \end{pmatrix}$ و $\propto$ عدد حقيقي.

5- أوجد المصفوفة B حيث : $B = 2A$.

6- أحسب $\det(B)$ وأستنتج $\det(A)$.

7- أوجد قيم $\propto$ حتى تكون B قابلة للقلب.

8- أوجد المصفوفة B^{-1} من أجل $\propto = 0$.

التمرين الثالث:

ليكن التطبيق التالي حيث :

$$f : IR^2 \to IR^2$$

$$(x,y) \mapsto f(x,y) = (2x-4y, x-2y)$$

3- بين أنه خطي.

4- عين كلا من : $Im(f), ker(f)$.

5- أحسب كلا من $\dim Im(f), \dim ker(f)$.

6- هل f متباين و هل هو غامر.

التمرين الرابع:

عين كلا من a, b, c التي من أجلها يكون $(1, -1,\ 2)$ حلا للجملة

$$\begin{cases} ax + by - 3z = -3 \\ -2x - by + z = -1 \\ ax + 3y - cz = -1 \end{cases}$$

التمرين الخامس:

لتكن المصفوفة $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ و المصفوفة $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

- أوجد قيمة العدد a بحيث يكون $A^2 - AB + aI_3 = 0$ وأستنتج معكوس A .

التمرين السادس:

استخدم طريقة غوص- جوردان لحل الجملة التالية:

$$\begin{cases} x + y + 2z + t = 11 \\ x + 2y + z + t = 9 \\ x + y + z + 2t = 6 \\ 2x + y + z + t = 14 \end{cases}$$

التمرين السابع:

أوجد حل الجملة

$$\begin{cases} x + by - (b-1)z = b + 1 \\ 3x + 2y + bz = 3 \\ (b-1)x + by + (b+1)z = b - 1 \end{cases}$$

المراجع المستعملة

1- Mathematics for Engineers : A.Croft and R. Davison, Third Edition (2008).

2- Introductory Linear Algebra An Applied, First course, B. Kolman and ، D. Hill (2005).

3 – سيمور ليبشيتز : نظريات ومسائل في الجبر الخطي سلسلة ملخصات شوم (1976).

4 – د. مجدي الطويل : المصفوفات النظرية والتطبيق جامعة القاهرة (1999).

5 - ضايف جورج السبتي : الجبر الخطي . دار الحكمة (1988).

6 – شيرزاد الطالباني، نازدار اسماعيل: محاضرات في الجبر الخطي ديوان المطبوعات الجامعية الطبعة الثالثة (1989).