

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة محمد بوضياف المسيلة
كلية العلوم الاقتصادية والعلوم التجارية
و علوم التسيير
قسم العلوم الاقتصادية

محاضرات في مقياس بحوث العمليات

مقدمة لطلبة السنة الثالثة علوم اقتصادية
تخصص الاقتصاد الكمي

من إعداد: د/ بن يوسف نوة
أستاذ محاضر أ

السنة الجامعية 2022/2021



رقم الصفحة	فهرس المحتويات
09-06	المحور الأول: البرمجة الخطية
06	1-صياغة نموذج البرمجة الخطية
06	2 -أسس بناء النموذج الرياضي
07	3-الصيغة العامة للبرمجة الخطية
08	4 -مجالات استخدام البرمجة الخطية
08	5- مثال تطبيقي حول صياغة البرنامج الخطي
24-11	المحور الثاني: طرق حل نماذج البرمجة الخطية
11	1 -الطريقة البيانية
11	1-1- خطوات الحل
14	1-2- طريقة الحل الخاص
14	1-3- تصنيف القيود
15	2-حالات خاصة للحل في الطريقة البيانية
15	1-2-أسلوب الحل الأمثل البديل
16	2-2-أسلوب الحل الغير محدد
17	3 - الحل بطريقة SIMPLEX
17	1-3- خطوات الحل بجداول SIMPLEX
21	2-3-طبيعة الموارد في جدول SIMPLE
22	4-سلسلة مسائل وتمارين
27-26	المحور الثالث: المسائل الثنائية في البرمجة الخطية
26	1-أهمية التحويل للنموذج الثنائي (المقابل)
26	2- الخطوات العامة لتكوين نموذج الثنائية
26	3-العلاقة بين نموذج الأصلية و الثنائية
27	4- أمثلة تطبيقية للثنائية
38-29	المحور الرابع: تحليل الحساسية.
30	1-تغيرات لها تأثير على العملية
30	1-1-تغيرات في الموارد المتاحة للطرف الأيمن
32	1-2- إضافة قيد جديد
24	2-تغيرات لها تأثير على الامتلية
24	1-2-تغيرات في معاملات دالة الهدف
35	2-2-إضافة نشاط جديد
37	3-مسائل وتمارين
47-40	المحور الخامس: تحليل الشبكات (تقييم ومراجعة المشاريع بتقنية CPM وPERT)

40	1-تحديد المفاهيم
41	1-1-تعريف الشبكة
41	1 - 2- قواعد بناء (رسم) الشبكة
41	3-1 - أساسيات رسم الشبكة
42	2 -تحليل الوقت
42	3-طريقة المسار الحرج (CPM) Critical Path Method .
43	4- توضيح المسار الحرج عبر الوقت العائم الكلي TF والحر FF
45	5-أسلوب تقييم البرامج ومراجعتها(بيرت) Program Evaluation and Review Technique (PERT)
73-49	المحور السادس:مسائل النقل
49	1-مفهوم جدول النقل وتمثيله
52	2-تقنيات النقل
53	3-تحديد الحل لنماذج النقل
53	3-1-طرق الحل الابتدائي
54	3-1-1-طريقة زاوية الشمال الغربي
55	3-1-2-طريقة أقل التكلفة
57	3-1-3-طريقة VAM
61	3-1-4-طريقة RAM
63	3-2-طرق الحل الأمثل
64	3-2-1-طريقة الأحجار المتحركة
67	3-2-1-طريقة التوزيع المعدلة: MODI
72	4 -مسائل وتمارين
81-75	المحور السابع : نظرية الالعاب
75	1تعريف النظرية
75	2-اهمية نظرية الالعاب
75	3- فروض نظرية الالعاب
75	4- أشكال الالعاب
75	4-1- الالعاب المتناسبة والالعاب غير المتناسبة
75	4-2- الالعاب ذات الناتج الصفري والناتج غير الصفري
76	4-3- الالعاب المتزامنة و المتعاقبة(غير متزامنة)
76	4-4- المعلومات التامة والمعلومات غير التامة
76	4-5- الالعاب الطويلة اللانهائية
76	5- طرق التوصل إلى الاستراتيجيات
76	1-5-اللعب بأسلوب الناتج الصفري
77	2-5-أسلوب الإستراتيجية السائدة

78	3-5-الاستراتيجيات المختلطة
83-88	المحور الثامن: نظرية صفوف الانتظار
83	1- مفهوم وأهمية صفوف الانتظار
83	1-1- تعريف صفوف الانتظار
83	1-2- أسباب اهتمام الإدارة بصفوف الانتظار
83	2- التحليل الاقتصادي لصفوف الانتظار
84	3-مقاييس أداء النظام
85	4-أنواع نماذج صفوف الانتظار (حالة وجود عدد لا نهائي من العملاء)
85	5- المعالجة الرياضية لنماذج صفوف الانتظار
90-97	المحور التاسع: تسيير المخزون
90	1- تعريف تسيير المخزون
90	2-إيجابيات وسلبيات المخزون
90	2-1-إيجابيات المخزون
90	2-2- سلبيات المخزون
91	3- مفهوم الوظيفة التخزينية.
91	3-1- تحليل وظيفة التخزين
91	3-1-1- سياسة التخزين.
92	3-1-2- مظاهر التخطيط والتنظيم السئ للمخازن
92	3-2-كلفة حيازة المخزون
92	4 نماذج تحديد الكمية الاقتصادية للطلب في ظروف اليقين.
93	4-1- النموذج القاعدي لـ (Wilson)
93	4-1-1- فرضيات النموذ
93	4-1-2- ثوابت ومتغيرات النموذج.
93	4-1-3-تدنية التكاليف.
94	4-1-4-ضعف ونقصان نموذج wilson
95	4-2-نموذج التدفق المستمر
96	4-3- نموذج تجميع الطلبيات (المجمعة)
98	قائمة المراجع المعتمدة

المحور الأول

البرمجة الخطية



المحور الأول: البرمجة الخطية

البرمجة الخطية هي تقنية رياضية تبحث عن حل أو حلول لمشكلة اقتصادية سواء كانت إنتاجية، مالية، مسألة نقل، تحليل المشاريع، مباريات الخ... واختيار أفضل حل من بين الحلول الممكنة والذي يمثل الحل الأمثل. هذه التقنية الرياضية تستعمل خاصة من طرف المسيرين والمشرفين على المشاريع المختلفة لإيجاد الطريقة المثلى لتخصيص موارد المؤسسة المحدودة لاستخدامات مختلفة من أجل تحقيق هدف معين.

وهناك عدة أنواع من القيود نذكر منها على سبيل المثال لا الحصر قيود خاصة بالعملية الإنتاجية، قيود تخزينية، قيود تسويقية

وعلى ضوء هذه القيود، فإن الحل الأمثل الذي يبحث عنه المسير باستعمال تقنيات البرمجة الخطية، هو ذلك الحل الذي يحدد له، كمية الإنتاج الواجب إنتاجها من كل نوع من المنتجات والتي تمكن المؤسسة من تحقيق أقصى ربح ممكن.

1- صياغة نموذج البرمجة الخطية:

حتى نتمكن من وضع برنامج خطي للمعطيات الاقتصادية أو الإدارية أو وضع صيغة رياضية لمسألة البرمجة الخطية، فإنه يجب توفر مجموعة من المتغيرات لها علاقة مباشرة بقيمة الهدف المراد تحقيقه ويحددها السؤال الذي نريد الإجابة عليه عند حل المسألة، وبصفة عامة فإن مسائل البرمجة الخطية تتكون من : مجموعة من المتغيرات، مجموعة معادلات أو متراجحات خطية وتسمى بالقيود، وكذا دالة تسمى بدالة الهدف.

القيود: على المخططين والمسيرين التزامات يجب أخذها بعين الاعتبار أثناء البحث عن الحل الأمثل، لهذا الغرض وضع القيد للإشارة إلى هذه الالتزامات والتقيد بها أثناء البحث عن الحل الأمثل .

دالة الهدف: هذه الدالة تمكنا من التمييز بين حل وحل آخر وعلى ضوءها يتم اختيار الحل الأمثل.

2- أسس بناء النموذج الرياضي:

1- أن لا يكون النموذج معقد.

2- أن يكون النموذج معبرا عن المشكلة وليس العكس أي تطوير المشكلة لتناسب النموذج
3- فهم حدود وقابلية النموذج عند التطبيق بحيث لا يمكن أن يحوي كل المتغيرات وخاصة السياسية والاجتماعية.

4- النموذج هو وسيلة وليس الحقيقة نفسها ولا يمكن أن يكون أفضل من المعلومات التي تدخل في تكوينه ولهذا فهو لا يحل محل صاحب القرار أبدا .

3-الصيغة العامة للبرمجة الخطية:

ا- دالة الهدف :

$$\text{Min or Max } ZP = C_1 X_1 + C_2 X_2 + \dots + C_n X_n$$

ب- القيود الهيكلية :

Subject to :

$$a_{11} X_1 + a_{12} X_2 + \dots + a_{1n} X_n \leq, =, \geq b_1$$

$$a_{21} X_1 + a_{22} X_2 + \dots + a_{2n} X_n \leq, =, \geq b_2$$

$$a_{m1} X_1 + a_{m2} X_2 + \dots + a_{mn} X_n \leq, =, \geq b_m$$

ج- قيد اللاسلبية :

$$X_1, X_2, X_3, \dots, X_n \geq 0$$

أي أن النموذج يشمل ثلاث عناصر أساسية هي دالة الهدف والقيود الهيكلية وقيد عدم السلبية.

إذ أن:

ZP : تمثل قيمة دالة الهدف (تعظيم أو تدنيه) .

C : معاملات دالة الهدف (ربح أو كلفة الوحدة الواحدة الخ).

X : متغيرات القرار.

A : احتياجات كل وحدة واحدة من الموارد سواء كانت مواد أولية ، الزمن ، عدد العاملين الخ.

n : عدد المتغيرات.

m : عدد القيود .

b : الموارد المتاحة .

4-مجالات استخدام البرمجة الخطية:

أ-مشكلة التخصيص: هنا يتم تثبيت مقدار الكمية التي يجب إنتاجها من كل نوع من المخرجات من أجل مضاعفة الربح ,والهدف هو الوصول إلى اختيار كمية من المدخلات التي إذا ما اختيرت ستحقق أعلى ربحية من خلال بيع المنتج

ب-مشكلة التثبيت: هو تثبيت عنصر إنتاج إلى عنصر إنتاج آخر لإنجاز أعلى كفاية ممكنة لنظام الإنتاج الذي يحقق أعلى ربحية .



ج-مشكلة التوزيع: اختيار أفضل الطرائق من أجل الوصول إلى خفض كلف النقل من خلال تحديد الكميات الواجب نقلها من مركز الإنتاج إلى الأسواق

ه-مشكلة الجدولة: هي تعديل المنتجات و جدولتها على مدار السنة لكي يخفض كلفة المواد الأولية والعمل الإضافي والنقل

و-مشكلة الخلط: تخفيض كلفة إنتاج مادة معينة فيها صفات الخلط بتحديد الكميات الداخلة في الخلط بحيث تكون العملية بأقل كلفة وأكثر نفع

مثال تطبيقي حول صياغة البرنامج الخطي:

حتى تتمكن من وضع النموذج الخطي بمعطيات اقتصادية أو ادراية يجب معرفة مكونات البرنامج، وتتمثل في :

1- دالة الهدف؛ 2- القيود؛ 3- المتغيرات: الوحدات المنتجة أو الوحدات المطلوبة.

أ-القيود: على المخطط أو المسير التزامات يجب أخذها بعين الاعتبار عند الحل الأمثل والتقيد بها. إذا افترض انه توجد 28 ساعة عمل متاحة لدى المؤسسة في الورشة (1)، وان هذه الورشة تنتج وحدات أو منتج بحيث كل وحدة تتطلب 07 ساعات عمل هذه الورشة، إذا ما اعطي الرمز X_1 للمنتج، وطلب من المسير تحديد كمية X_1 التي يجب انتاجها بالورشة الأولى رياضيا مكن التعبير عنها:

$$7X_1=28 \text{ أي } 4=X_1$$

تم استعمال 28 ساعة استعمالا كاملا، أي الإنتاج كان بنسبة مئة بالمائة، لكن في بعض الأحيان تحدث مشكلة، يعني هل يمكن إنتاج 4 وحدات فعلا ويعود ذلك الى:

-يحدث خلل خلال العملية الإنتاجية.

-المادة الأولية المستعملة من أجل إنتاج الوحدة.

-العامل (غياب، توقف، إضراب....الخ)

هذه العوامل تحدث خلل في العملية الإنتاجية، هذا يعني انه يمكن إنتاج 4 وحدات على أساس ساعات العمل المتاحة، انه تم استغلال الطاقة الإنتاجية بنسبة مئة بالمائة.

عمليا لا يمكن الوصول الى هذه النسبة لأنه توجد عدة عوامل، تؤثر على العملية الإنتاجية

وبالتالي المتغير الرياضي الأصح: $7X_1 \leq 28$

إذا افترض أن نفس الورشة تنتج منتوجا آخر X_2 بمعدل 4 ساعات عمل للوحدة المنتجة،

$$7X_1+4X_2 \leq 28 \dots\dots(1)$$

يكون التعبير الرياضي كالتالي:

إذا كانت العملية الإنتاجية تتطلب تمرير X_1 و X_2 على ورشة ثانية من أجل أن تكون

المنتجات جاهزة الاستعمال وإذا كانت الطاقة الإنتاجية للورشة (2) 20 ساعة عمل .

وان وحدة واحدة من X_1 تتطلب 4 ساعات عمل ووحدة من X_2 تتطلب 5 ساعات عمل من هذه الورشة ، فالتعبير الرياضي يكون كالتالي : (2)..... $4X_1+5X_2 \leq 20$

اذا كان الطلب اليومي من الوحدات X_2 لا يتجاوز 3 وحدات ، فالتعبير الرياضي:

$$X_2 \leq 3.....(3)$$

ب-دالة الهدف : بالرغم من أن المتراجحة السابقة تعطي للمسير ، فكرة كاملة عن الشروط التي يجب توفرها وتقيد المؤسسة ساعات عمل متاحة للمنتوجين X_1 و X_2 الا أن البرنامج ينقصه معيار المفاضلة بين الحلول الممكنة لـ X_1 و X_2

إذا افترضنا أن المؤسسة تبحث عن تحقيق اكبر ربح وان كل وحدة من X_1 تحقق بها ربح قدره وحدتين نقديتين ، وان كل وحدة من X_2 تحقق ربحا قدره 3 وحدات نقدية ، اذا اعطي لدالة الهدف الرمز Z_p فان الصيغة الرياضية لدالة الهدف هي: $Z_p = 2X_1 + 3X_2$

حيث أن دالة الهدف هي تعظيم الربح فان الصيغة النهائية تكون :

$$\text{Max } Z_p = 2X_1 + 3X_2$$

وبهذا نكون قد وصلنا الى تكوين النموذج الخطي باستعمال المعطيات السابقة:

$$\text{Max } Z_p = 2X_1 + 3X_2$$

St:

$$7X_1 + 4X_2 \leq 28.....(قيد1)$$

$$4X_1 + 5X_2 \leq 20.....(قيد2)$$

$$X_2 \leq 3.....(قيد3)$$

$$X_1, X_2 \geq 0.....(\text{شرط اللاسلبية})$$

المحور الثاني

طرق حل نماذج البرمجة الخطية



المحور الثاني: طرق حل نماذج البرمجة الخطية

بعد صياغة المشكلة على شكل نموذج رياضي فإن المرحلة التالية هي محاولة الحصول على حل للمشكلة من النموذج الممثل لها حيث يعرف الحل انه مجموعة قيم المتغيرات المسيطر عليها والتي تؤدي إلى فعالية أفضل للنظام وفقاً للظروف والقيود الموضوعية على المشكلة، في بعض الأحيان لا يمكن الحصول على حل للمشكلة من النموذج الممثل لها حيث يعرف الحل انه مجموعة قيم المتغيرات المسيطر عليها والتي تؤدي إلى فعالية أفضل للنظام وفقاً للظروف والقيود الموضوعية على المشكلة. وفي بعض الأحيان لا يمكن الحصول على الحل بالطرق الرياضية الحتمية وهي التي سيتحصل منها تحت ظروف مؤكدة وفي مثل هذه الحالات يستخرج الحل بالطرق الاحتمالية أو بطرق المحاكاة. وهناك طريقتان أساسيتان لحل نماذج البرمجة الخطية

1- الطريقة البيانية

2- الطريقة البسيطة simplex

1- الطريقة البيانية:

- 1- تصلح هذه الطريقة لحل مشاكل البرمجة الخطية والتي تحتوي على متغيرين اثنين فقط
- 2- تستخدم هذه الطريقة إذا كانت المتغيرات مقيدة أو غير مقيدة بالإشارة وتعتبر هذه الطريقة من الطرق البسيطة والتي تعطي نتائج دقيقة إلا أنها طريقة غير كفوءة في معالجة مشكلات البرمجة الخطية في الحياة العملية

1-1 الخطوات:

- 1- نحول القيود من المترجمات إلى معادلات
- 2- إيجاد نقاط التقاطع لكل معادلة حيث نعوض بأحد المتغيرات في المعادلة الواحدة بقيمة صفر لاستخراج قيمة المتغير الثاني، ثم نكرر ذلك بالنسبة للمتغير الآخر، وبذلك تصبح لدينا نقطتين لكل معادلة (مستقيم) وبوساطة هاتين النقطتين يمكن رسم المستقيم الذي تمثله المعادلة.
- 3- رسم المستقيمات و إيجاد منطقة الحلول الممكنة (المنطقة التي تحقق فيها متغيرات القرار جميع القيود في آن واحد).
- 4- تحديد نقاط الأركان لمنطقة الحلول الممكنة (إيجاد إحداثيات هذه النقاط).
- 5- التعويض بنقاط الأركان في دالة الهدف واختيار النقطة التي تجعل دالة الهدف اكبر ما يمكن، تكون هي التي تمثل الحل الأمثل إذا كانت دالة الهدف من نوع التعظيم Max والعكس بالعكس أي أن النقطة التي تجعل دالة الهدف اقل ما يمكن في حالة كون دالة الهدف من النوع المتدني Min هي التي تمثل الحل الأمثل .

مثال تطبيقي:

$$\text{Max } Z_p = 2X_1 + 3X_2$$

St:

$$7X_1 + 4X_2 \leq 28 \dots\dots\dots (1 \text{ قيد})$$

$$4X_1 + 5X_2 \leq 20 \dots\dots\dots (2 \text{ قيد})$$

$$X_2 \geq 3 \dots\dots\dots (3 \text{ قيد})$$

$$X_1, X_2 \geq 0 \dots\dots\dots (\text{شرط اللاسلبية})$$

أولاً: إيجاد منطقة الحلول الممكنة

رسم المترajحات (1) إلى (3) ، أما المترajحة (4) فتمثل اللاسلبية ، أي أخذ النقاط في الربع الأول الموجب فقط لكل مترajحة. أتحويل المترajحات إلى معادلات:

$$5X_1 + 5X_2 = 30 \dots\dots\dots (1 \text{ المعادلة})$$

$$-X_1 + X_2 = 4 \dots\dots\dots (2 \text{ المعادلة})$$

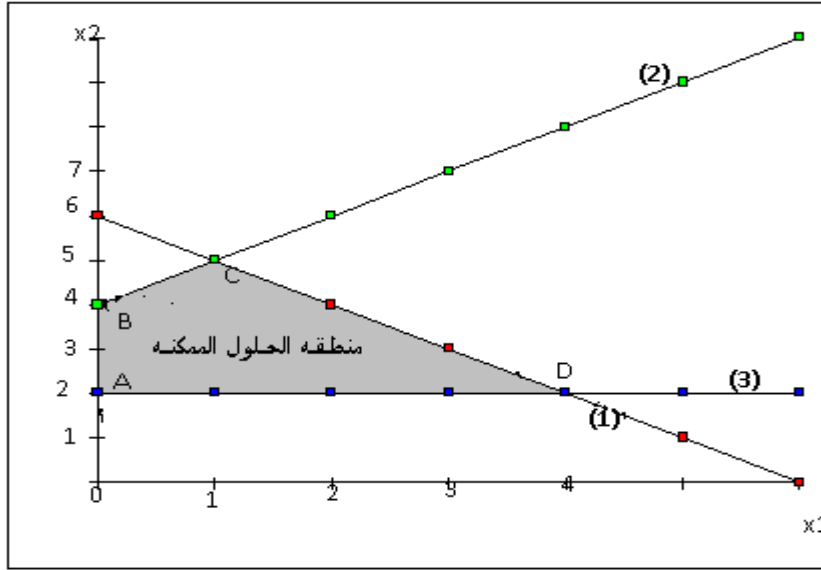
$$X_2 = 2 \dots\dots\dots (3 \text{ المعادلة})$$

ب- إيجاد نقاط التقاطع لكل معادلة:

(3) $2 = X_2$	4-	0	X1	(2)	6	0	X1	(1)
	0	4	X2		0	6	X2	

ولكي نحدد أين تقع المساحة الممثلة بالمترajحة نقوم بأخذ نقطة المبدأ على يمين الخط المستقيم أو على يساره ونعوض بقيمة هذه النقطة فإن تحققت المترajحة فإن المساحة التي في جهة النقطة هي المساحة المطلوبة وإن لم تتحقق المترajحة فالمساحة المقابلة هي المساحة المطلوبة.

وبرسم جميع المترajحات معا نحصل على المنطقة المظللة كما هو موضح في الشكل (1) **الشكل (1): رسم القيود**



- لمعرفة نقاط الأركان A.B.C.D نلاحظ أن النقطة A هي نقطة تقاطع المستقيم (3) مع محور X_2 أي $A(0.2)$

النقطة B هي نقطة تقاطع المستقيم (2) مع محور X_2 $B(0.4)$ والنقطة C هي نقطة تقاطع المستقيم (1) مع (2) نقوم بحل المعادلتين معا ، أي $4 = x_2 + x_1$ مع $30 = 5x_1 + 5x_2$ فنجد أن : $c(1.5)$

وبالمثل فان النقطة D هي تقاطع المستقيم (1) مع (3) أي حل $2 = x_2$ مع $30 = 5x_1 + 5x_2$

وبالتعويض المباشر بقيمة x_2 في المعادلة الأولى نجد أن: $x_1 = 4$ أي أن نقطة التقاطع $D(4.2)$

ثانيا- إيجاد الحل الأمثل:

- بالتعويض بنقاط الأركان في دالة الهدف واختيار اكبر قيمة

نقاط الأركان	$Z_p = 6x_1 + 4x_2$
$A(0.2)$	$6(0) + 4(2) = 8$
$B(0.4)$	$6(0) + 4(4) = 16$
$C(1.5)$	$6(1) + 4(5) = 26$
$D(4.2)$	$6(4) + 4(2) = 32$

يلاحظ أن قيمة دالة الهدف عند النقطة $D(4,2)$ هي أكبر قيمة وهي تمثل الحل الأمثل (أفضل الحلول الممكنة) .

2-1- طريقة الحل الخاص:

يمكن إيجاد النقطة D بطريقة أخرى كالتالي :

طريقة رسم دالة الهدف :

تتم على أساس دالة الهدف حيث يتم تمثيل الدالة بيانيا .

$$6x_1 + 4x_2 = 12$$

حيث 12 هي المضاعف المشترك الأصغر

$$6x_1 + 4x_2 = 12 \text{ لنعلم الآن المستقيم}$$

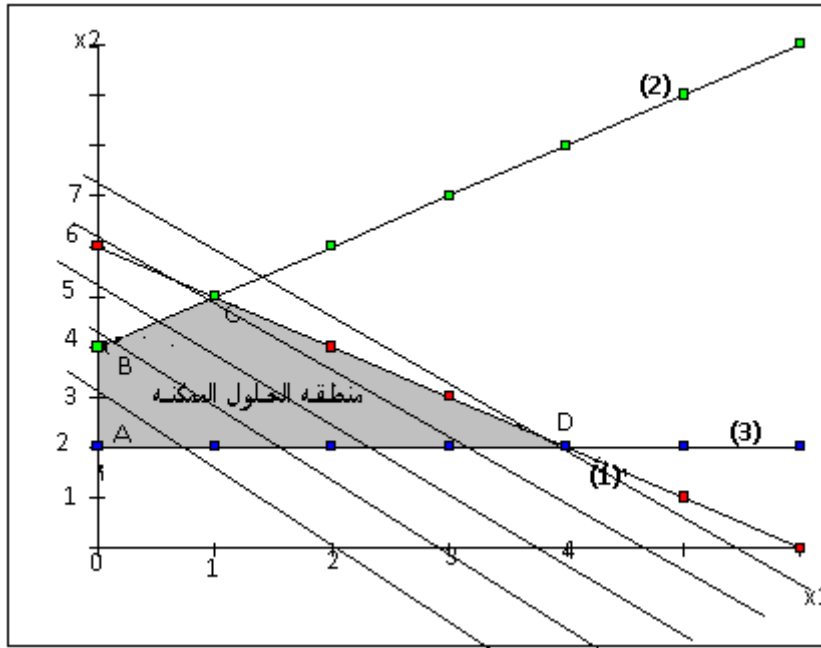
بوضع $X_1=0$ أولاً نجد النقطة $(0,3)$

وبوضع $X_2=0$ نجد النقطة $(2, 0)$

وبالتالي سنحصل على المستقيم المار بالنقطتين السابقتين كما في الشكل (2) :

وبأخذ المستقيمات المتوازية مع المستقيم السابق ، حتى نحصل على المستقيم الذي يمس أقصى نقطة في منطقة الحلول الممكنة ، وفي حالتنا هذه النقطة $D(4,2)$. وبالتالي فإن النقطة D هي نقطة الحل الأمثل .

الشكل (2): توضيح طريقة الحل الخاص



3-1- تصنيف القيود:

يتم تصنيف القيود في الطريقة البيانية إلى:

أ- قيود ملزمة: وهي لقيود التي تمر بركان الحل الأمثل وتسمى بالقيود النادرة وهذا يعني أنها امتلكت كلياً في العملية الإنتاجية.

ب- قيود غير ملزمة: وهي التي تشارك في منطقة الحلول العملية الممكنة ولا تشارك في ركن الحل الأمثل وتسمى بالقيود المتوفرة هذا يعني انه استهلك جزء منها في العملية الإنتاجية. ولم تستعمل بشكل كامل.

ت- القيود الفائضة: لاتستعمل في ركن الحل الأمثل ولا تشارك في منطقة لحلول لعملية الممكنة اي لا تستهلك لا كليا ولا جزئيا.
في المثال السابق القيد الثاني متوفر والقيد الأول والثالث نادرين لأنهما يمران بركن لحل الأمثل

2- حالات خاصة للحل في الطريقة البيانية:

1-2- أسلوب الحل الأمثل البديل:

هو الحل الأمثل الثاني الذي نحصل عليه من حل مسألة البرمجة الخطية وهذا يعني الحصول على أكثر من حل أمثل تحقق قيمهم دالة الهدف العظمى أو الصغرى وعادة نحصل على الحل الأمثل البديل عندما تكون دالة الهدف موازية لأحد القيود أي أن كل نقطة واقعة على القيد الموازي لدالة الهدف والتي تكون ضمن منطقة الحل الممكن تعطي قيمة عظمى أو قيمة صغرى لدالة الهدف وعند نقطة التعظيم أو التقليل تكون دالة الهدف متطابقة مع القيد الموازي لها

مثال:

حل مسألة البرمجة الخطية التالية بالطريقة البيانية

$$\text{Max } ZP=5X_1+10X_2$$

St :

$$2X_1+4X_2 \leq 8$$

$$5X_1+2X_2 \leq 10$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

الحل:

تحويل المتراجحات إلى معادلات:

$$\text{Max } ZP=5X_1+10X_2$$

St :

$$2X_1+4X_2=8 \quad \dots\dots\dots 1$$

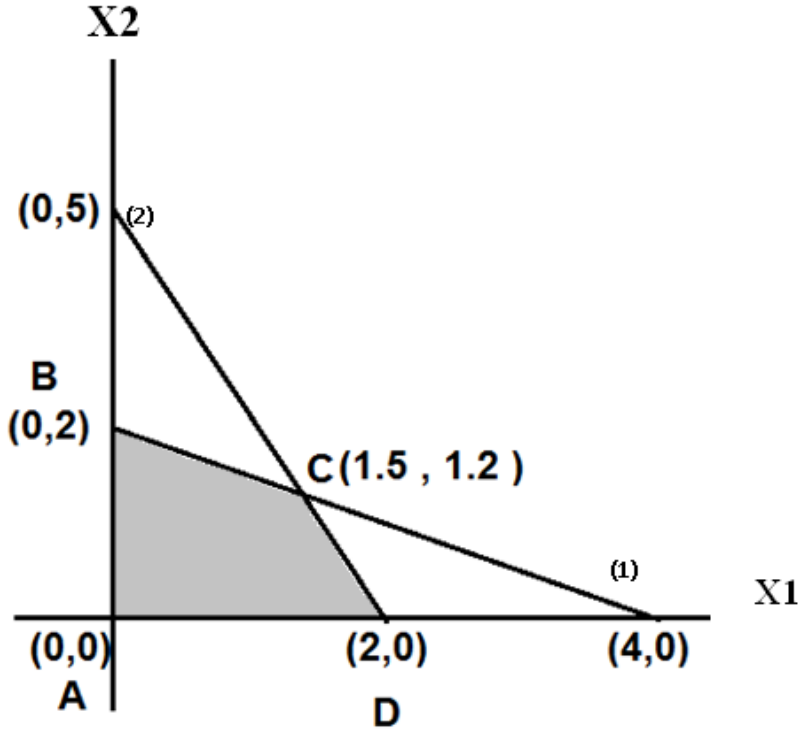
$$5X_1+2X_2=10 \quad \dots\dots\dots 2$$

نقاط التقاطع

$$(0,2) \quad (4,0) \quad (1)$$

$$(0,5) \quad (2,0) \quad (2)$$





منطقة الحلول العملية الممكنة هي المنطقة المشتركة للمعادلتين وتتحدد بالنقاط A,B,C,D

$$A(0,0) \dots\dots\dots Z_p=0$$

$$B(0,2) \dots\dots\dots Z_p=20$$

$$C(1.5,1.25) \dots\dots\dots Z_p=20$$

$$D(2,0) \dots\dots\dots Z_p=10$$

نلاحظ عند تعويض قيم النقطتين B,C في دالة الهدف فأنهما تعطيان نفس القيمة لـ ($Z_p=20$) وهذا يعني ان المسألة تحتوي على حلين أمثلين أي تحتوي على حل أمثل بديل.

2-2- أسلوب الحل الغير محدد:

يكون هذا النوع من الحلول عندما تكون منطقة الحلول الممكنة منطقة مفتوحة (غير منتهية) وعند تعيين أية نقطة بعيدة عن النقطة التي تم تسميتها بالحل الأمثل فيمكن الحصول على حل أمثل آخر وهكذا لا توجد نهاية للحلول وكما في المثال الآتي:

$$\text{Min } Z_p=2X_1+X_2$$

St :

$$X_1-X_2 \leq 10$$

$$2X_1 \leq 40$$

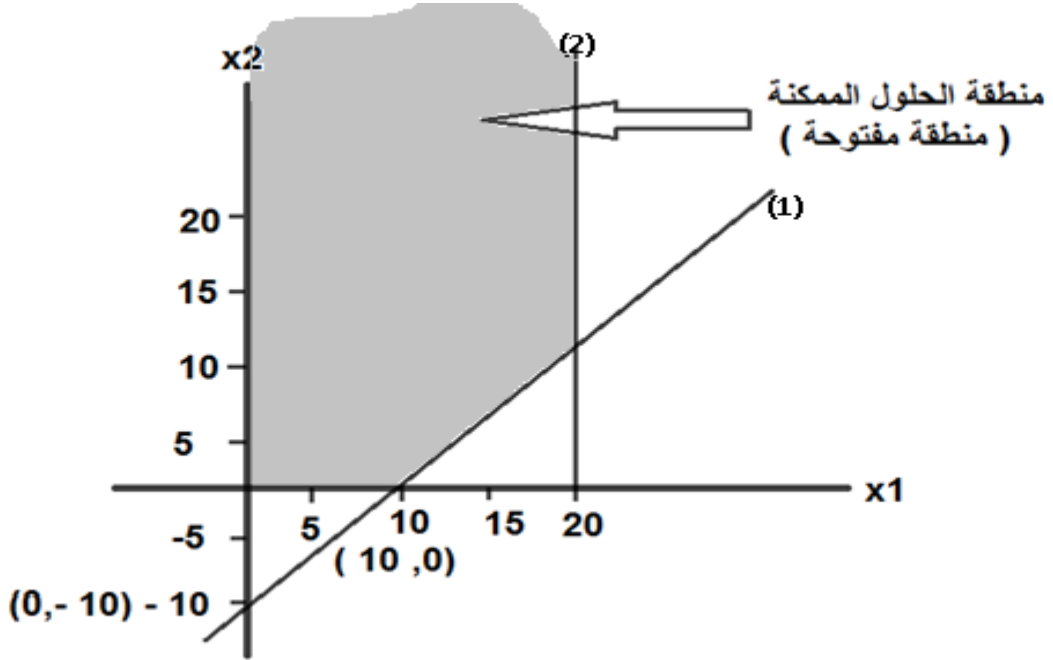
$$X_1, X_2 \geq 0$$

الحل:

$$X_1-X_2=10 \dots\dots\dots(0,-10)$$

$$2X_1=40 \dots\dots\dots X_1=20$$

بما أن المنطقة المشتركة منطقة غير محدودة إذن الحل الناتج غير محدود لعدم وجود منطقة محدودة للحل



3- الحل بطريقة SIMPLEX :

إن إيجاد الحل بيانيا لمشكلة البرمجة الخطية قد اتصف بالسهولة و ذلك لوجود متغيرين اثنين فقط, أما في حالة وجود أكثر من متغيرين لا يمكن استخدام الطريقة البيانية ففي هذه الحالة لا بد من استخدام طريقة (سمبلاكس) لحل المشكلة. وهي عبارة عن جداول يتم التنقل فيها من جدول إلى آخر حتى يتم الوصول إلى الحل الأمثل في اقل وقت ممكن. ومن مزايا طريقة السمبلاكس :

- 1- تعتمد إجراءات نظامية محددة وسهلة
 - 2- تجعل إمكانية الوصول إلى الحل الأمثل واضحا
 - 3- إتباعها أسلوب تحسين الحل الأولي مما يحقق إمكانية الوصول إلى حل أفضل
- تستخدم الطريقة اليدوية في حل جداول السمبلاكس في الحالات التي يكون فيها عدد من القيود وليكن (m) صغير جدا وعدد من المتغيرات (n) صغير جدا أما في الحالات التي يكون فيها (m)(n) كبيرة جدا فيمكن استعمال الإلغاء الآلي في هذه الحالة.

3-1- خطوات الحل بجداول SIMPLEX :

- 1- صياغة البرنامج الخطي.
- 2- كتابة البرنامج على الصورة أو الشكل المعياري هذا يعني تحويل المترجمات التي على الشكل (K) إلى مساواة ويعني أن كل القيود تكون في الطرف الأيمن موجبة .
- دالة الهدف يمكن أن تأخذ الصيغة Max أو Min
- 3- إضافة عدد من المتغيرات المساعدة S_i (أو تسمى الوهمية، الراكدة، المهملة، العاطلة) إلى قيود النموذج إلى الطرف الأقل في المعادلة وهو الطرف الأيسر، فمثلا لو كان هناك ثلاث قيود

فيضاف ثلاث من المتغيرات الوهمية إلى دالة الهدف (بمعاملات أصفار) وبواقع متغير واحد لكل قيد من القيود الثلاثة (وبمعاملات مقدارها واحد).

4- تحديد عدم السلبية أي أن كافة قيم المتغيرات في المشكلة تكون موجبة أو مساوية للصفر أي أن $(X_j, S_i \geq 0)$ حيث j عدد المتغيرات و i عدد القيود.

5-تنظيم جدول الحل الأساسي الممكن أو الابتدائي T_0 بالاعتماد على جميع معاملات المتغيرات X_j, S_i في قيود النموذج و دالة الهدف ويكون الجدول T_0 على النحو التالي:

المتغيرات الأساسية	X1	X2	Xn	S1	S2	Sm	عمود الموارد (T_0)
S1	a_{11}	a_{12}	a_{1n}	1	0	0	b_1
S2	a_{21}	a_{22}	a_{2n}	0	1	0	b_2
.	0	0
.	0	0
.
Sm	a_{m1}	a_{m2}	a_{mn}	0	b_m
Z_p	$\pm C_1$	$\pm C_2$	$\pm C_n$	0	0	0	0

6-تحديد المتغير الداخل و على أساس أكبر قيمة بإشارة سالبة في سطر دالة الهدف (Z) من نوع (Max) والعكس صحيح إذا كانت دالة الهدف من نوع (Min) أكبر قيمة بإشارة موجبة . ويطلق على العمود الذي يضم المتغير الداخل (عمود الدوران).

7-لتحديد المتغير الخارج أي المتغير الذي سيغادر عمود الأساس بعد أن كان متغيرا أساسيا، ذلك المتغير الذي يقابل أقل حاصل قسمة لعناصر عمود الموارد على عناصر العمود الداخل (الدوران) حيث بهمل القسمة على الصفر أو القيم السالبة . ويطلق على السطر الذي يضم المتغير الخارج (سطر الدوران).

8- القيمة الناتجة من تقاطع قيم عمود الدوران مع قيم سطر الدوران تسمى عنصر الدوران.

9-نستخرج قيم السطر المقابل إلى سطر الدوران في الجدول الجديد وذلك بقسمة جميع قيم سطر الدوران على عنصر الدوران

10-لاستخراج القيم الموجودة في العمود المقابل إلى عمود الدوران تكون هذه القيم اصفارا ما عدا القيمة المقابلة لعنصر الدوران إذ تكون عبارة عن واحد (العمود المقابل إلى عمود الدوران يأخذ قيم عمود المتغير الخارج)

11- أما بقية العناصر الموجودة في الجدول يتم استخراجها وفقا للعلاقة التالية:

(العنصر المقابل له في عمود الدوران)X(العنصر المقابل له في سطر الدوران)

العنصر الجديد = العنصر القديم -

عنصر الدوران

12- يعاد إجراء الخطوات السابقة نفسها بدءاً من تحديد المتغير الداخل و الخارج وعنصر الدوران إلى أن نصل إلى جدول الحل الأمثل حيث بعد استكمال كل جدول يتم التأكد من إذا ما كان الجدول يمثل جدول الحل الأمثل وذلك من خلال تحقق شرطين هما :

*شرط الامثلية: ملاحظة القيم في سطر Z_p حيث نصل للحل الأمثل عندما تكون جميع القيم في سطر Z_p موجبة أو صفرية في برنامج (Max). وسالبة أو صفرية في برنامج (Min)
*شرط العملية: يشترط ان تكون كل قيم عمود الموارد (الطرف الأيمن) موجبة لكي نصل إلى جدول عملي.

مثال تطبيقي حول طريقة سمبلاكس

جد الحد الأمثل لنموذج البرمجة الخطية باستخدام طريقة سمبلاكس

$$\text{Max : } Z=30X_1 + 18X_2$$

St :

$$X_1 + 2X_2 \leq 200 \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$3X_1 + 2X_2 \leq 300 \quad \dots\dots\dots (2)$$

$$X_1 \leq 150 \quad \dots\dots\dots (3)$$

$$X_1, X_2 \geq 0 \quad \text{شرط اللاسلبية}$$

الحل:

1- تحول البرنامج إلى الشكل المعياري ولان القيود جميعها من نوع اصغر من أو يساوي ،لذا فان عملية التحويل تتطلب إضافة متغير وهمي أو مساعد والذي سيرمز له بـ (Si) وكما يأتي:

$$\text{Max : } Z=30X_1 + 18X_2 + 0S_1 + 0S_2 + 0S_3$$

$$X_1 + 2X_2 + S_1 = 200 \quad (1)$$

$$3X_1 + 2X_2 + S_2 = 300 \quad (2)$$

$$X_1 + S_3 = 150 \quad (3)$$

$$X_1, X_2, S_1, S_2, S_3 \geq 0 \quad \text{شرط عدم السلبية}$$

2- نقوم بإعداد الجدول الابتدائي والذي سيضم المتغيرات الأساسية وغير الأساسية في معادلة دالة الهدف. حيث المتغير الأساسي هو المتغير الذي يكون معامل صفر في معادلة دالة الهدف أي (S1, S2, S3).

والقيم التي تقابل المتغير S1 هي معاملات المتغيرات في القيد (1) . أما القيم التي تقابل المتغير S2 هي معاملات المتغيرات في القيد (2). و القيم التي تقابل المتغير S3 هي معاملات المتغيرات في القيد (3).

عمود الأساس	X1	X2	S1	S2	S3	عمود الموارد T ₀
S1	1	2	1	0	0	200
S2	3	2	0	1	0	300
S3	1	0	0	0	1	150
Z _P	-30	-18	0	0	0	0

سطر الدوران ←

عمود الدوران ↗

3- اختيار المتغير الداخل وهو المتغير الذي يمثل أكبر قيمة بإشارة سالبة في سطر Z_P ومن الجدول اعلاه يكون X1 هو المتغير الداخل لان قيمته (-30) ويطلق على العمود الذي يضم المتغير الداخل (عمود الدوران).

اختيار المتغير الخارج وهو المتغير الذي يمثل اقل قيمة موجبة من حاصل قسمة قيم عمود الموارد على قيم عمود الدوران، وتهمل أية قيمة سالبة أو صفرية.

$$200/1=200$$

$$300/3=100$$

$$150/1=150$$

إذن المتغير S2 هو المتغير الخارج لأنه يمثل اقل ناتج قسمة موجب (100) وهو بذلك يمثل سطر الدوران أما القيمة التي يتقاطع فيها عمود الدوران مع سطر الدوران فهي تمثل عنصر الدوران وهو (3)

4- إيجاد قيم سطر المتغير الداخل X1 وذلك عن طريق قسمة كل قيمة في سطر الدوران على عنصر الدوران.
أما باقي القيم في الجدول فتحسب بالعلاقة:

(العنصر المقابل له في عمود الدوران) X (العنصر المقابل له في سطر الدوران)

العنصر الجديد = العنصر القديم -

عنصر الدوران

نتحصل على جدول الحل الثاني:

عمود الأساس	X1	X2	S1	S2	S3	عمود الموارد T ₁
S1	0	4/3	1	-1/3	0	100
X1	1	2/3	0	1/3	0	100
S3	0	-2/3	0	-1/3	1	50
Z _p	0	2	0	10	0	3000

بعد استكمال الجدول يتم التأكد من إذا ما كان الجدول يمثل جدول الحل الأمثل وذلك من خلال ملاحظة القيم في السطر Z_p ، ولأن دالة الهدف من نوع تعظيم (Max)، نصل للحل الأمثل عندما تكون جميع القيم في السطر Z_p موجبة أو صفرية. لذا في الجدول الثاني جميع القيم في السطر Z_p موجبة أو صفرية وبالتالي شرط الامثلية محقق فهو يمثل جدول الحل الأمثل .

اتخاذ القرار :حيث يتم إنتاج 100 وحدة من النوع الأول ($X_1=100$) لنتمكن من تحقيق ربح قدره 3000 و.ن ($Z_p=3000$).

5-طبيعة الموارد في جدول SIMPLEX:

من خلال جدول الحل الأمثل السابق يمكن معرفة طبيعة الموارد الموارد النادرة والموارد المتوفرة أما الموارد الفائضة فلا تظهر في جدول السمبلاكس بل في الطريقة البيانية فقط .

-الموارد التي تكون خارج عمود الأساس هي موارد نادرة ، حيث أن المورد الثاني (S_2) خرج من عمود الأساس فهو مورد نادر استهلك كليا من أجل إنتاج 100 وحدة من X_1
 - الموارد التي تبقى داخل عمود الأساس هي موارد متوفرة ، حيث أن الموردين الأول والثالث ($S_1.S_3$) بقيا في عمود الأساس فهما موردين متوفرين . فهناك جزء من المورد الأول قدره 100 لم يتم استعماله في العملية الإنتاجية ،وكذلك جزء من المورد الثالث قدره 50 لم يتم استعماله في العملية الإنتاجية .

6-سلسلة مسائل وتمارين:**المسألة الاولى:**

تقوم إحدى الشركات بإنتاج نوعين من المعدات (A & B), وتحقق الشركة ربحاً قدره (10000) دينار في الوحدة الواحدة من المنتج (A), و (15000) دينار في الوحدة الواحدة من المنتج (B), علماً بأن الشركة تحتاج الى (20) ساعة لإنتاج وحدة واحدة من منتج (A) و (30) ساعة لإنتاج وحدة واحدة من (B), وأن الوقت الأجمالي المسموح العمل به سنوياً (1200) ساعة كما أن الطلبات التي يمكن توقعها على المنتجين يتوقف على قدرة الشركة على الإنتاج, وتوجد إمكانية إنتاج كمية من (B) لا تزيد عن (40) وحدة والكمية المنتجة من (A), لا تزيد عن (30) وحدة في السنة.

-اكتب البرنامج الخطي .

المسألة الثانية:

المؤسسة (y) تقوم بصناعة نوعين من المصبرات لتجار الجملة (x1.x2) ، نستعمل مادتين أساسيتين للصناعة ،المادتين ممثلتين في A,B الحد الاقصى المتاح من A هو 6 طن في اليوم .بينما الحد الاقصى المتاح من B هو 8 طن .
الطلب اليومي من المادة الاولية بالطن للمنتوجين مبين في الجدول التالي :

المادة المتاحة (بالطن)	X2	X1	
6	2	1	المادة الاولية A
8	1	2	المادة الاولية B

بعد دراسة للسوق تم اعطاء الملاحظات التالية :

-الطلب اليومي على X2 ناقص الطلب اليومي على X1 لا يمكن ان يتجاوز 1 طن.

-الطلب اليومي على X2 لا يمكن ان يتجاوز 2 طن.

-اسعار الجملة قدرت ب 3 \$ لـ X1 و 2 \$ لـ X2 للطن الواحد .

المطلوب : اذا كنت مشرفا على دائرة الانتاج .كم يجب على هذه المؤسسة ان تنتج من هذين المنتجين لكي تحقق اكبر ربح ممكن ؟

المسألة الثالثة:

مؤسسة عائلية تنتج نوعين الحقائب ،لمؤسسة وعلى ضوء المعطيات السوقية المجمعة لديها اهدت بان هناك سوق للحقائب الصغيرة الحجم و كبيرة الحجم ،وحسب مصلحة التوزيع وحسب الجودة ويمكن للمؤسسة بيع كل ما تنتج .

بعد دراسة مستوفية للعملية الانتاجية ، ثم تحديد اربع مراحل هي :

-التفصيل والصبغة.

-الخيطة.

-التجميل.

-الرقابة والتغليف.

مصلحة الانتاج وبعد دراسة تحليلية للعملية الانتاجية اعطت الجدول التالي والذي يحدد وقت الانتاج مقدرا بالساعات .



المنتج	مرحلة التفصيل والصبغة	مرحلة الخياطة	مرحلة التجميل	الرقابة	مرحلة والتعليف
حقائب صغيرة	7/10	1/2	1		1/10
حقائب كبيرة	1	5/6	2/3		1/4

اما مصلحة المحاسبة وبعد دراسة العملية اعطت الربح الممكن تحقيقه من كل نوع من الانتاج للحقائب حيث الصغيرة منها تحقق ربح قدره 100 دج للوحدة بينما الكبيرة تحقق ربحا قدره 90 دج للوحدة. كما ان مصلحة الانتاج استطاعت هي الاخرى تحديد الساعات المتاحة لكل مرحلة على التوالي 630, 125,708,600 ساعة. **المطلوب:** اذا كلفت بادارة العملية الانتاجية لهذه المؤسسة، كم يجب أن تنتج من كل نوع من الحقائب، حتى يتحقق اكبر ربح لها؟

المسألة الرابعة:

منتج احد المصانع نوعين من المنتوجات ، مساهمة الأول في مقدار الربح يساوي 10 دج ومساهمة الثاني تساوي 12 دج . يمرر المنتوجين في ثلاثة أقسام للصنع ، حيث يحتاج كل منها الى ساعات عمل محددة تلزم لانتاجها في قسم من الاقسام الثلاثة ، كما هو مبين بالجدول :

الاقسام	ساعات العمل اللازمة للانتاج		وقت العمل المتاح /شهر
	X1	X2	
1	2	3	1500
2	3	2	1500
3	1	1	600

ترغب الادارة في تحديد الربح المناسب لإنتاج كل من المنتوجين بحيث تحقق اكبر ربح ممكن. **المطلوب:** اوجد البرنامج الخطي والحل الأمثل له ؟

المسألة الخامسة:

- مصنع ينتج ثلاث (3) أنواع من المنتجات P3,P2,P1 تمر هذه المنتجات على ثلاث ورشات (C.B.A) الساعات المتاحة لكل ورشة هي على الترتيب 416,624,2766 ساعة عمل في الشهر .

المردود الساعي في الساعة الواحدة			الورشة المنتوج
C	B	A	
45	12	3	P1
15	12	2	P2
12	-	10	P3

الطلبات الشهرية على المنتجات الثلاثة لا تزيد عن 250 وحدة من P1، 1250 وحدة من P2، 1500 وحدة من P3 اذا كان العائد من كل منتج مباع هو 1600,1250,1050 على الترتيب والتكلفة قدرت كما يلي: 2/3 من المبيعات بالنسبة لـP1 و 4/5 من المبيعات بالنسبة لـP2 و 3/4 من المبيعات بالنسبة لـP3. **المطلوب :**



- 1- ايجاد الحل الأمثل والذي يحقق للمؤسسة اكبر ربح ممكن؟
- 2- حدد طبيعة الموارد؟
- 3- حدد قيمة الوحدة لكل مورد؟
- 4- في رايك ماهو المورد الذي تعطى له الاولوية في هذا المصنع ولماذا؟

المسألة السادسة:

- اعتبر البرنامج الخطي التالي :

$$\begin{aligned} \text{MAX } ZP &= 3X_1 + 2X_2 \\ 4X_1 + 3X_2 &\leq 12 \quad \text{St} \\ 4X_1 + X_2 &\leq 8 \\ 4X_1 - X_2 &\leq 8 \\ X_1, X_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

الحل الأمثل للجدول معطى كالتالي :

الأساس	X1	X2	S1	S2	S3	T
X2	0	1	1/2	-1/2	0	2
X1	1	0	-1/8	-3/8	0	3/2
S3	0	0	1	-2	1	4
Z	0	0	5/8	1/8	0	17/2

- المطلوب: 1- حدد طبيعة الموارد؟
- 2- حدد قيمة الوحدة لكل مورد؟
- 3- حدد مجال التغير للمورد الأول الذي يبقي الحل الحالي حل عملي؟
- 4- حدد مجال التغير للمورد الثاني الذي يبقي الحل الحالي حل عملي؟

المسألة السابعة:

تنتج شركة كهربائية 3 أنواع من المنتجات ممثلة في : أجهزة التكييف ، أفران كهربائية ومجففات كهربائية وهذا حسب هامش الربح التالي وحسب التسلسل التتابعي : 210دج، 170دج، 40دج. تمر الأنواع الثلاثة بثلاث أقسام إنتاجية هي قسم التصنيع، التجميع والرقابة، وهذا حسب الجدول التالي الذي يوضح ساعات العمل المطلوبة لإنتاج وحدة واحدة من كل أنواع المنتجات الثلاثة.

المنتج	عدد الساعات المطلوبة للوحدة الواحدة		
	الرقابة	التجميع	التصنيع
أجهزة التكييف	1	3	3
أفران كهربائية	3/4	2	4
مجففات كهربائية	1/2	1/2	1
الساعات المتاحة	200	360	390

المطلوب:

- 1- اوجد حجم الانتاج الأمثل من المنتجات الثلاث؟

المحور الثالث

المسائل الثنائية في البرمجة الخطية



المحور الثالث: المسائل الثنائية في البرمجة الخطية

إن لكل نموذج البرمجة الخطية هناك نموذج مقابل (ثنائي بديل) ويسمى بالنموذج المقابل (الثنائي والبديل) ويتضمن النموذج الثنائي نفس البيانات التي يحتويها النموذج الأصلي (الأولي) لاحظنا في البرمجة الخطية أن حل مشكلة ما بطريقة السمبلاكس , وجد أن هنالك أسلوبا آخر يتم فيه التوصل إلى نفس النتائج ويطلق عليه أسلوب الحل الثنائي (المقابل, الازدواج) وكل مسألة تحل بطريقة السمبلاكس هناك إمكانية حلها بالأسلوب الثنائي وبالعكس إن الفائدة المنتظرة من الحل الثنائي هي سهولة إجراء العمليات مقارنة بطريقة السمبلاكس فإذا كانت لدينا ثلاث متغيرات أساسية مع وجود عشرة قيود للمشكلة فإن عدد القيود في الأسلوب الثنائي سيكون ثلاثة وهذا سيؤدي إلى الإسراع في الحل وسنصل إلى نفس النتيجة فيما لو استخدمنا طريقة السمبلاكس

1- أهمية التحويل للنموذج الثنائي (المقابل):

من فوائد التحويل من النموذج الأصلي إلى النموذج الثنائي

- 1- الحصول على نموذج يحتوي على عدد أقل من القيود وبذلك سوف يختصر العمل الحسابي لجداول السمبلاكس و الوصول إلى نفس الحل الأمثل سواء كان الحل للنموذج الأصلي أو الحل للنموذج الثنائي.
- 2- للتخلص من الإشارة السالبة من الجانب الأيمن (إن وجدت) أي عندما تكون المصادر ذات كميات سالبة وهو أهم ما يمكن الحصول عليه في حالة التحويل إلى النموذج الثنائي
- 3- لغرض التعرف على أبعاد المشكلة الأخرى (المشكلة الثنائية, البديلة) فإذا كان النموذج الأصلي وبصيغة ال Max أي المشكلة بالصيغة الربحية فبإمكاننا التعرف على النموذج الثنائي ويكون بصيغة ال Min وتمثيله لجانب التكلفة (في نفس المشكلة) .

2- الخطوات العامة لتكوين نموذج ثنائية :

- 1- نحدد متغير بديل غير سالب لكل قيد من قيود المشكلة الأولية
- 2- معاملات دالة الهدف في النموذج الأصلي تصبح ثوابت الطرف الأيمن لقيود نموذج الثنائية
- 3- ثوابت الطرف الأيمن في النموذج الأصلي تصبح معاملات دالة الهدف في نموذج الثنائية
- 4- تعكس اتجاه القيود في نموذج الثنائية إلى الاتجاه الآخر عندما كانت عليه القيود في النموذج الأصلي, فإذا كانت القيود مثلا من نوع أكبر أو يساوي في النموذج الأصلي فإنها تعكس في المسألة الثنائية إلى أقل أو يساوي والعكس صحيح
- 5- يعكس اتجاه دالة الهدف فإذا كانت تعظيم (Max) دالة الهدف في احد النموذجين فيقلب إلى تصغير (Min) في النموذج الآخر أو بالعكس

3- العلاقة بين نموذج الأصلية و الثنائية:

- 1- الأولية تأخذ (Max) والثنائية تأخذ (Min) وبالعكس
- 2- حدود القيود في الأصلية تحول إلى معاملات دالة الهدف والعكس صحيح
- 3- المتغيرات في الأصلية X_i يقابلها في الثنائية Y_i
- 4- معاملات دالة الهدف في الأصلية تتحول إلى حدود القيود في الثنائية
- 5- حدود القيود \leq في الأصلية يقابلها \geq في الثنائية والعكس صحيح
- 6- معاملات القيود الأفقية تتحول إلى معاملات قيود عمودية
- 7- إذا كان للبرنامج الأصلي حل أمثل فالثنائية لها حل أمثل أيضا ويساوي حل الأصلية.



8- في مسائل (Max) الأصلية فان قيمة دالة الهدف تكون في تزايد وصولا إلى الحل الأمثل بينما الثنائية لها تكون قيمة دالة الهدف في تناقص وصولا إلى الحل الأمثل والعكس صحيح في مسائل (Min)

ملاحظات عامة

- إذا كان شكل احد القيود غير متناسق مع القيود الأخرى نضرب القيد كله في (-1)
- عدد متغيرات النموذج الأصلي = عدد قيود النموذج الثنائي
- عدد قيود النموذج الأصلي = عدد متغيرات النموذج الثنائي
- دالة الهدف في حالة التعظيم يكون القيد اصغر أو يساوي \leq خلاف ذلك نضرب القيد في (-1)
- دالة الهدف في حالة التقليل يكون القيد اكبر أو يساوي \geq خلاف ذلك نضرب القيد في (-1)
- لو كانت دالة الهدف تعظيم وإشارة القيد - نفرض مرة \geq ونضرب القيد في (-1)
- لو كانت دالة الهدف تعظيم وإشارة القيد = نفرض مرة \leq يبقى كما هو.

4- أمثلة تطبيقية لثنائية:

النموذج الثنائي	النموذج الأصلي
Min : $w=24Y_1 + 3Y_2$ St : $6Y_1 + Y_2 \geq 3$ $4Y_1 \geq 2$ $Y_1, Y_2 \geq 0$	Max : $Z=3X_1 + 2X_2$ St : $6X_1 + 4X_2 \leq 24$ $X_1 \leq 3$ $X_1, X_2 \geq 0$
Min : $w=80Y_1 + 60Y_2$ St : $2Y_1 + 3Y_2 \geq 50$ $4Y_1 + Y_2 \geq 120$ $Y_1, Y_2 \geq 0$	Max : $Z=50X_1 + 120X_2$ St : $2X_1 + 4X_2 \leq 80$ $3X_1 + X_2 \leq 60$ $X_1, X_2 \geq 0$
Max : $W=100Y_1 + 200Y_2 + 150 Y_3$ St : $30Y_1 + 125Y_2 + 120 Y_3 \leq 4$ $10Y_1 + 12Y_2 + 15 Y_3 \leq 1$ $Y_1, Y_2, Y_3 \geq 0$	Min : $Z = 4X_1 + X_2$ St : $30X_1 + 10X_2 \geq 100$ $125X_1 + 12 X_2 \geq 200$ $120X_1 + 15 X_2 \geq 150$ $X_1, X_2 \geq 0$

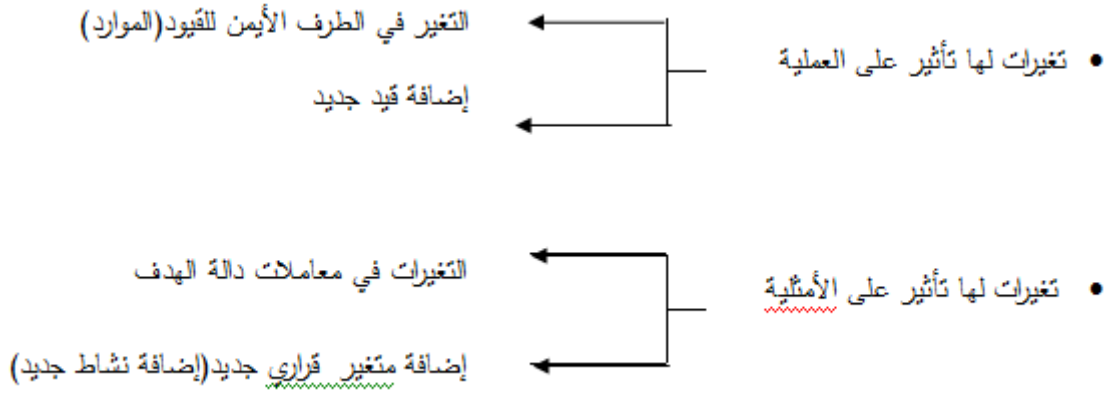
المحور الرابع

تحليل الحساسية



المحور الرابع: تحليل الحساسية.

إن الوصول إلى الحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطية هو غاية الحل، وإن الحل الأمثل هو الحل الذي نجده من خلال قيم المتغيرات الموجودة في نموذج البرمجة الخطية في ظل معاملات المتغيرات في دالة الهدف وداخل القيود ولوجود كميات في المصادر (الجانب الأيمن) محدودة ولكن ما العمل فيما لو وبعد استخراج الحل الأمثل تم تغيير في معاملات المتغيرات في دالة الهدف أي تغيير الأرباح أو التكلفة أو تغيير أسعار السوق وتبدل العرض.... إذن كيف يمكن الاستفادة من الحل الأمثل للوصول إلى الحل الأمثل تحت أي ظرف من هذه الظروف، إنه من الطبيعي أن تحصل كل هذه التغيرات أو بعضها لأن الواقع العملي يصعب السيطرة عليه، ومثل هذه الحالة لا يمكن توقعها بشكل صحيح لذا نلجأ إلى تحليل الحساسية لمعالجة كل تغيير، ومن هذه التغيرات نذكر:



من أجل مواصلة تحليل الحساسية يمكن وضع الخطوات التالية:

- 1- إيجاد الحل الأمثل للبرنامج الأصلي.
- 2- من أجل أي اقتراح للتغيير في البرنامج الأصلي وبعد إعادة حساب العناصر الجديدة للجدول الأمثل وباستعمال الحسابات الأصلية للثنائية، ننشأ الخطوة الثالثة.
- 3- إذا كان الجدول الجديد غير أمثل نتوجه إلى الخطوة (4) وإذا كان غير عملي نتوجه إلى الخطوة (5)، وإلا يتم تمثيل جدول جديد كجدول حل جديد أمثل.
- 4- استعمال طريقة simplex العادية.
- 5- استعمال طريقة simplex الثنائية للوصول إلى الجدول الأمثل الجديد.

مثال تطبيقي:

افترض البرنامج الخطي التالي:

$$\text{Max : } Z_p = 2X_1 + 3X_2$$

St :

$$7X_1 + 4X_2 \leq 28$$

$$4X_1 + 5X_2 \leq 20$$

$$X_2 \leq 3$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

إذا علمت أن جدول الحل الأمثل لهذا البرنامج هو كالتالي:



عمود الأساس	X1	X2	S1	S2	S3	عمود الموارد
S1	0	0	1	-7/4	19/4	29/4
X1	1	0	0	1/4	-5/4	5/4
X2	0	1	0	0	1	3
Zp	0	0	0	1/2	1/2	46/4

حيث يتم إنتاج 5/4 وحدة من النوع الأول ($X_1=5/4$)؛ و3 وحدات من النوع الثاني ($X_2=3$)

لنتمكن من تحقيق ربح قدره 46/4 ون ($Z_p=46/4$).

1-1- تغيرات لها تأثير على العملية :

1-1-1- تغيرات في الموارد المتاحة للطرف الأيمن:

بافتراض انه حدث تغيير للمورد الثاني من 20 إلى 22 فما هو تأثير هذا التغيير على الحل الأمثل.

إن هذا التغيير سوف يكون له تأثير على شرط العملية فقط وبالتالي فان عمود الموارد الجديد على ضوء أي تغيير سيكون كالتالي:

عمود موارد الجديد عمود الموارد مصفوفة المتغيرات الأساسية عمود الأساس

$$\begin{pmatrix} S1 \\ X1 \\ X2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -7/4 & 19/4 \\ 0 & 1/4 & -5/4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 28 \\ 22 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15/4 \\ 7/4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

عمود الأساس	X1	X2	S1	S2	S3	عمود الموارد
S1	0	0	1	-7/4	19/4	15/4
X1	1	0	0	1/4	-5/4	7/4
X2	0	1	0	0	1	3
Zp	0	0	0	1/2	1/2	50/4

شرط العملية لم يتأثر بل التغيير الذي حدث في قيم عمود الموارد الجديد حيث تصبح المؤسسة تنتج 7/4 وحدة من النوع الأول ($X_1=7/4$)؛ و3 وحدات من النوع الثاني ($X_2=3$) لنتمكن من تحقيق ربح قدره 50/4 ون ($Z_p=(7/4)2+(3)3=50/4$).

إذا افترضنا انه حدث تغيير للمورد الثاني والثالث معا حيث أن المورد الثاني تغير من 20 إلى 22 والمورد الثالث من 3 إلى 5 فما هو تأثير هذا التغيير على الحل الأمثل.

عمود الموارد الجديد عمود الموارد مصفوفة المتغيرات الاساسية عمود الاساس

$$\begin{pmatrix} S1 \\ X1 \\ X2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -7/4 & 19/4 \\ 0 & 1/4 & -5/4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 28 \\ 22 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 53/4 \\ -3/4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

عمود الاساس	X1	X2	S1	S2	S3	عمود الموارد
S1	0	0	1	-7/4	19/4	53/4
X1	1	0	0	1/4	-5/4	-3/4
X2	0	1	0	0	1	5
Zp	0	0	0	1/2	1/2	54/4

شرط العملية أصبح غير محقق وبالتالي سوف نكمل الحل للجدول بطريقة تسمى طريقة حل السمبلاكس الثنائية (لا يعني حل الثنائية) لم يتأثر بل التغيير الذي حدث في قيم عمود الموارد الجديد حيث تصبح طريقة حل السمبلاكس الثنائية وهي طريقة حل خاصة تجرى في حالة عدم تحقق شرط العملية

خطوات حل هذه الطريقة:

- 1- نحول البرنامج إلى الشكل المعياري إذا كان البرنامج من بدايته.
- 2- بعد وضع الجدول واختار سطر الدوران (المتغير الخارج) حيث يتم اختيار أكبر عنصر من عمود الموارد بإشارة سالبة (-) سواء للبرنامج (Max) أو (Min)
- 1- اختيار عمود الدوران (المتغير الداخل) يتم بقسمة عناصر السطر Zp على عناصر سطر الدوران وهذا للعناصر السالبة فقط ونهمل العناصر الأكبر أو تساوي الصفر

$$\left| \begin{array}{c|ccccc} Zp & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ X1 & 1 & 0 & 0 & 1/4 & -5/4 \end{array} \right|$$

تعمل

-نختار عمود لدوران في دالة الهدف (Z) من نوع (Max) لأكبر ناتج قسمة متبوع بإشارة سالبة ،و إذا كانت دالة الهدف من نوع (Min) على أساس أكبر ناتج قسمة متبوع بإشارة موجبة .

في هذا المثال فان X_1 هو المتغير الخارج له اكبر قيمة متبوعة بإشارة سالبة في عمود لموارد وبقسمة عناصر السطر Z_p على عناصر سطر الدوران X_1 لدينا قيمة واحدة سالبة إذن S_3 هو المتغير الداخل. وعنصر الدوران هو (- 4/5)
 3-وبإكمال حساب باقي قيم الجدول بنفس الخطوات والمراحل في طريقة السمبلكس العادية(الاختلاف الوحيد يكمن في اختار سطر وعمود الدوران)

عمود الأساس	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	عمود الموارد
S_1	19/5	0	1	-4/5	0	52/5
S_3	-4/5	0	0	-1/5	1	3/5
X_2	4/5	1	0	1/5	0	22/5
Z_p	2/5	0	0	3/5	0	528/40

1-2-إضافة قيد جديد:

بالنسبة للتغيرات التي تحدث على أساس إضافة قيد جديد فينظر إلى طبيعة هذا القيد:
 -إذا كان هذا القيد الأخير يحقق شروط الحل الأمثل نقول أن هذا القيد متوفر وبالتالي لا يؤثر على شرط العملية
 - إذا كان هذا القيد الأخير لا يحقق شروط الحل الأمثل نقول أن هذا القيد نادر وبالتالي سوف يؤثر على شرط العملية وعلى الحل الأمثل السابق.
 إذا افترضنا انه تم إضافة قيد جديد:

$$X_2 \leq 2$$

يصبح البرنامج

$$\text{Max : } Z_p = 2X_1 + 3X_2$$

St :

$$7X_1 + 4X_2 \leq 28$$

$$4X_1 + 5X_2 \leq 20$$

$$X_2 \leq 3$$

$$X_2 \leq 2$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$



بإضافة هذا القيد يتم إجراء الحسابات التالية

1- تحويل هذا القيد إلى الشكل المعياري:

2- حساب قيمة X_2 من جدول الحل الأمثل حتى يمكن إجراء تعويض في هذا القيد الجديد

باستخراج سطر X_2 نحصل على:

$$X_2 + 1 S_3 = 3$$

$$X_2 = 3 - S_3 \dots\dots\dots 2$$

بتعويض المعادلة 2 في المعادلة 1 نجد $3 - S_3 + S_4 = 2$

$$- S_3 + S_4 = -1$$

نتيجة الحساب الاخيرة يتم إضافتها إلى جدول الحل الأمثل

عمود الأساس	X1	X2	S1	S2	S3	S4	عمود الموارد
S1	0	0	1	-7/4	19/4	0	29/4
X1	1	0	0	1/4	-5/4	0	5/4
X2	0	1	0	0	1	0	3
S4	0	0	0	0	-1	1	-1
Zp	0	0	0	1/2	1/2	0	46/4

شرط العملية غير محقق الجدول ليس جدول حل أمثل نكمل الانتقال إلى جدول آخر بطريقة السمبلكس الثنائية والجدول الجديد يكون بعد اختيار سطر الدوران S4 وعمود الدوران S3 وعنصر الدوران هو (-1)

عمود الاسيس	X1	X2	S1	S2	S3	S4	عمود الموارد
S1	0	0	1	-7/4	0	19/4	10/4
X1	1	0	0	1/4	0	-5/4	10/4
X2	0	1	0	0	0	1	2
S3	0	0	0	0	1	-1	1
Zp	0	0	0	1/2	0	1/2	11

شرط العملية محقق تصبح المؤسسة تنتج 10/4 وحدة من النوع الأول ($X_1=10/4$) و 2 وحدات من النوع الثاني ($X_2=2$)
لنتمكن من تحقيق ربح قدره 11 و.ن ($Z_p=(10/4)2+(2)3=11$).

2-تغيرات لها تأثير على الامثلية:

1-2-تغيرات في معاملات دالة الهدف:

إذا كانت التغيرات تشمل معاملات المتغيرات التي تظهر أساسية في جدول الحل الأمثل للبرنامج الأصلي فسيتم حساب قيم جديدة للثنائية من أجل استعمالها في حساب عناصر السطر Z_p .

أما إذا كانت التغيرات تشمل معاملات المتغيرات الغير أساسية في جدول الحل الأمثل للبرنامج الأصلي فنستعمل قيم الثنائية من الحل الأمثل للبرنامج الأصلي لحساب عناصر السطر Z_p .

بافتراض انه حدث تغيير لدالة الهدف في البرنامج الأصلي حيث:

$$\text{Max} : Z_p = 3X_1 + 5X_2$$

هذا التغيير يشمل المتغيرات الاساسية وبالتالي يجب حساب قيم ثنائية جديدة وحسابها

الطريقة التالية يتم

$$[Y_1, Y_2, Y_3] = [0, 3, 5] * \begin{bmatrix} 1 & -7/4 & 19/4 \\ 0 & 1/4 & -5/4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [0, 3/4, 5/4]$$

$$Y_1=0, \quad Y_2=3/4, \quad Y_3=5/4$$

بعد إيجاد قيم الثنائية الجديدة من حساب ضرب المصفوفات يتم حساب عناصر السطر Z_p وهذا بأخذ الفرق بين الطرف الأيمن والأيسر لقيد الثنائية المشارك مع كل متغير أصلية.

مع X_1 : (قيد الثنائية بالنسبة لـ X_1) $7Y_1 + 4Y_2 + 0Y_3 - 3$

بتعويض قيم Y_1, Y_2, Y_3 نجد

$$7(0) + 4(3/4) + 0(5/4) - 3 = 0$$



$$4Y_1 + 5Y_2 + 1Y_3 - 5 \quad (\text{ قيد الثنائية بالنسبة لـ } X_2) \quad \text{مع } X_2 :$$

بتعويض قيم Y_1, Y_2, Y_3 نجد:

$$4(0) + 5(3/4) + 1(5/4) - 5 = 0$$

$$Y_1 - 0 = 0 \quad \text{مع } S_1 :$$

$$Y_2 - 0 = 3/4 \quad \text{مع } S_2 :$$

$$Y_3 - 0 = 5/4 \quad \text{مع } S_3 :$$

مداوم البرنامج على شكل Max وان عناصر السطر Z_p التي تم حسابها لم يؤثر على شرط الامتلية إذن التغير الوحيد الذي حدث يكون في قيمة Z_p

2-2- إضافة نشاط جديد:

بافتراض انه حدث تغيير في البرنامج الأصلي بإضافة نشاط جديد حيث:

$$\text{Max : } Z_p = 2X_1 + 3X_2 + 2X_3$$

St :

$$7X_1 + 4X_2 + X_3 \leq 28$$

$$4X_1 + 5X_2 + 2X_3 \leq 20$$

$$X_2 - X_3 \leq 3$$

$$X_1, X_2, X_3 \geq 0$$

لمعالجة هذا التغيير يتم إيجاد قيد الثنائية المشترك مع المتغير الجديد حيث:

$$Y_1 + 2Y_2 - Y_3 \geq 2$$

مادام X_3 غير أساسي في جدول الحل الأمثل للبرنامج الأصلي على أساس حساب عنصر السطر Z_p لهذا المتغير الجديد وبنفس الطريقة السابقة. الفرق بين الطرف الأيمن والأيسر لقيد الثنائية المشترك.

$$Y_1 + 2Y_2 - Y_3 - 2 \quad (\text{ قيد الثنائية بالنسبة لـ } X_3) \quad \text{مع } X_3 :$$

$$Y_1 = 0$$

$$Y_2 = 1/2$$

$$Y_3 = 1/2$$

بتعويض قيم Y_1, Y_2, Y_3 نجد:

$$0 + 2(1/2) - (1/2) - 2 = -3/2$$

بالنسبة لحساب باقي عناصر عمود X_3 تتم بالطريقة التالية:

$$\begin{pmatrix} S_1 \\ X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -7/4 & 19/4 \\ 0 & 1/4 & -5/4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -29/4 \\ 7/4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

↑ عناصر عمود X_3

جدول الحل الأمثل بعد إضافة النشاط X_3



عمود الاساس	X1	X2	X3	S1	S2	S3	عمود الموارد
S1	0	0	-29/4	1	-7/4	19/4	29/4
X1	1	0	7/4	0	1/4	-5/4	5/4
X2	0	1	-1	0	0	1	3
Zp	0	0	-3/2	0	1/2	1/2	46/4

شرط الامثلية غير محقق قيمة سالبة في السطر Zp نقوم بالحل بطريقة السمبلاكس العادية فنجد الحل الأمثل كالتالي يتم إنتاج 5/7 وحدة من النوع الثالث (5/7) و 26/7 وحدات من النوع الثاني (X2=26/7) لنتمكن من تحقيق ربح قدره 88/7 ون (2=88/7) $(Z_p = (26/7)3 + (5/7))$.

3-مسائل وتمارين:

المسألة الاولى: لديك البرنامج التالي :

$$\text{Max } Z_p = 3x_1 + 2x_2$$

St

$$x_1 + 2x_2 \leq 6$$

$$2x_1 + x_2 \leq 8$$

$$-x_1 + x_2 \leq 1$$

$$x_2 \leq 2$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

جدول الحل الامثل معطى كالتالي :

	X1	X2	S1	S2	S3	S4	
X2	0	1	2/3	-1/3	0	0	4/3
X1	1	0	-1/3	2/3	0	0	10/3
S3	0	0	-1	1	1	0	3
S4	0	0	-2/3	1/3	0	1	2/3
ZP	0	0	1/3	4/3	0	0	38/3

المطلوب:

- 1- بافتراض انه حدث تغيير للمورد الاول من 6 الى 7 اوجد قيمة كل من $ZP, X2, X1$
- 2- بافتراض انه حدث تغيير للمورد الاول والثاني على الترتيب من 6 الى 7 ومن 8 الى 4 اوجد قيمة كل من $ZP, X2, X1$
- 3- بافتراض انه تم اضافة قيد جديد $x_1 \leq 3$ هل يتاثر الحل الامثل ؟
- 4- بافتراض انه تم اضافة قيد جديد $x_1 \geq 3$ هل يتاثر الحل الامثل ؟

المسألة الثانية : لنفترض البرنامج التالي :

$$\text{Max } Z_p = 18.5 x_1 + 20 x_2$$

St

$$0.05 x_1 + 0.05 x_2 \leq 1100$$

$$0.05 x_1 + 0.1 x_2 \leq 1800$$

$$0.1x_1 + 0.05 x_2 \leq 200$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

جدول الحل الامثل معطى كالتالي :

	X1	X2	S1	S2	S3	
S1	-0.05	0	1	0	-1	900
S2	-0.05	0	0	1	-2	1400
X2	2	1	0	0	20	4000
ZP	21.5	0	0	0	400	80000

المطلوب :

1- افترض انه حدث تغيير للموارد على الترتيب كالتالي : 190 ، 350 ، 200 اوجد الحل الامثل الجديد؟

2- افترض اضافة قيد جديد $0.05x_1 + 0.05 x_2 \leq 100$ اوجد الحل الامثل الجديد؟

3- لو حدث تغيير لمعاملات الهدف كالتالي : $\text{Max } Z_p = 25x_1 + 18x_2$ اوجد الحل الامثل الجديد؟

4- لو تم اضافة نشاط جديد كالتالي :

دالة الهدف $14x_3$

القيد الاول $0.05x_3$

القيد الثاني $0.05x_3$

القيد الثالث $0.05x_3$

-اوجد الحل الامثل الجديد؟

المحور الخامس

تحليل الشبكات (تقييم ومراجعة المشاريع بتقنية CPM و PERT)



المحور الخامس: تحليل الشبكات (تقييم ومراجعة المشاريع بتقنية CPM وPERT)

يعرف المشروع بأنه مجموعة من الأنشطة المترابطة منطقياً فيما بينها والتي يجب أن تنفذ في توقيت زمني معين قبل أن يتم إنجاز المشروع الكلي، و يتطلب تعقد المشاريع الحالية استخدام أساليب تخطيطية أكثر كفاءة وفاعلية بهدف تحقيق الكفاءة المثلى عند التنفيذ، وتأتي هذه الكفاءة من إمكانية تقليص الوقت المطلوب لانجاز المشروع الكلي ضمن شروط مقبولة اقتصادياً من خلال استخدام الموارد المتاحة. لقد تطورت جدولة ومراجعة المشاريع كثيراً بفضل الأسلوبين التحليليين الجديدين وهما :

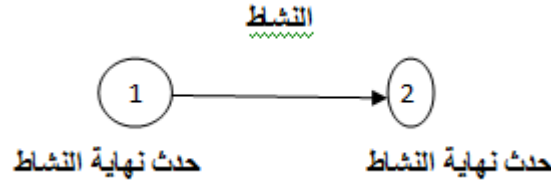
- أسلوب المسار الحرج: (CPM) Critical Path Method

- وأسلوب تقييم البرامج ومراجعتها Program Evaluation and Review Technique (PERT)

ويعرف كل من الأسلوبين أعلاه بأنهما أسلوبين تستخدمهما الإدارة في التحليل والتخطيط ويعتمدان على خرائط التحليل الشبكي التي توضح مراحل تنفيذ المشروع وجدولة العمليات المختلفة وتحليلها لتحقيق الرقابة التامة على استخدام الموارد المختلفة وخاصة العمال والمواد الأولية وغيرها من المستلزمات، حيث تهدف هذه الأساليب إلى مراقبة تنفيذ مشروع أو برنامج معين يتكون من عدة مراحل أو عمليات، وتحديد العمليات التي ينبغي وضعها تحت رقابة مستمرة لأنها قد تسبب تعطيل المشروع كله، كذلك يجب تحديد المسار الذي ينبغي مراقبته باستمرار لأن أي تأخير في تنفيذه يؤدي إلى تأخير المشروع كله. تعتمد هذه الأساليب على الخرائط التوضيحية لتتابع العمليات المختلفة المكونة للمشروع وتتكون الخرائط من مجموعة من الخطوط المتصلة ببعضها بدوائر أو مربعات، حيث تمثل هذه الدوائر الأحداث (Events) أي النقاط الزمنية التي تحدد البدء والانهاء من عمل معين، أما الخطوط فتتمثل الأنشطة (Activities) اللازمة لانجاز العمليات المكونة للمشروع وتتطلب الأنشطة وقتاً وموارد لانجاز العمليات المختلفة بها. وعند سوف نتطرق إلى ذلك بالتفصيل عند عرض طرق تحليل شبكات الأعمال .

1-تحديد المفاهيم:

***تعريف النشاط:** هو وظيفة عمل تأخذ وقت وموارد مثل بناء حائط
***الحدث:** هو مقطع من الوقت بداية لنشاط ونهايته.

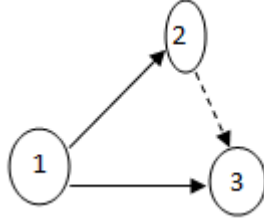


*النشاط الوهمي (Dummy):

هذا النشاط لا يستهلك وقت او موارد ويستعمل للمساعدة في تمثيل النشاطات مع الاحداث التي لها نفس حدث البداية ونفس حدث النهاية ويمثل على الشبكة بالشكل التالي:



ويمثل في شبكة كالتالي:



1-1- تعريف الشبكة:

- هي مجموعة من النشاطات و الأحداث والنشاطات الوهمية إن وجدت، حسب التسلسل المنطقي وحسب فواعد لتنفيذ الشبكي. أو هي مجموعة من الخطوط أو القنوات المرتبطة فيما بينها بدوائر حيث تمثل هذه الدوائر الأحداث (Events) وهي نقاط زمنية تحدد تاريخ الابتداء بنشاط معين والانتهاه من نشاط أو أنشطة أخرى، أما الأسهم أو الخطوط فتمثل العمل اللازم لتنفيذ كل مرحلة وبذلك فهي تستغرق وقتاً وتتطلب موارد كالأيدي العاملة، المواد الأولية، المعدات، ... الخ. وترقم الدوائر بحيث تتجه الأسهم من الرقم الأقل إلى الأعلى للحفاظ على التسلسل المنطقي لأنشطة المشروع. والأمثلة كثيرة على شبكات منها خطوط الاتصالات، خطوط السكك الحديدية، شبكات الأنابيب، المباني، شبكات الطيران وغيرها

1-2- قواعد بناء (رسم) الشبكة:

هذه القواعد موضوعة كلها وضعا منطقيا ويجب الرجوع إليها ومراجعتها قبل رسم الشبكة:

- أ- الشبكة يجب أن تكون لها نقطة بداية واحدة (حدث البداية) ونقطة نهاية واحدة (حدث النهاية).
- ب- كل نشاط يجب أن يمثل بسهم واحد فقط على المخطط الشبكي.
- ج- كل نشاط يجب أن يبدأ وينتهي بحدث.
- د- لا يجوز أشراك نشاطين أو أكثر بحدثي البداية والنهاية لأن ذلك يؤدي إلى تدخل أنشطة المشروع.
- هـ- يجب الحفاظ على العلاقة التصميمية المنطقية لتتابع مراحل تنفيذ المشروع وهذا يتم بتحديد الأنشطة التي يجب أن تنفذ قبل أن يبدأ تنفيذ نشاط معين، وما هي الأنشطة التي تعقبه وكذلك تحديد الأنشطة المترامنة، وبالنسبة للمخطط الشبكي ترقم الدوائر التي تربط بين القنوات ترقيم تصاعدي بحيث تتجه الأسهم دائماً من الرقم الأقل إلى الرقم الأعلى.
- و- الرجوع إلى الشبكة غير مسموح به حيث أن مجموع النشاطات تكون في تتابع إلى الأمام.

1-3- أساسيات رسم الشبكة:

بالإضافة إلى قواعد رسم الشبكة المذكورة سابقا يجب مراعاة الآتي:

- 1- الشبكة تكون موجهة من اليسار إلى اليمين.
- 2- طول أو قصر السهم في الشبكة لا يرمز إلى طول أو قصر الوقت.
- 3- ليس بالضرورة رسم الأسهم عرضيا يمكن إن تكون أفقيا أو عموديا إلى على أو إلى أسفل.
- 4- الأحداث يجب إن ترقم من اليسار لى ليمين.
- 5- النشاطات يمكن إن تعرف حسب الأحرف الأبجدية مثل A.B.C... أو تعرف بحدث البداية وحدث النهاية، حدث بداية المشروع يعطى له لرقم 0 ثم ترقم تسلسليا.



2-تحليل الوقت:

تحليل الوقت يتعامل مع نفس هدف التحليل الشبكي على أساسه يحدد الزمن العام لنهاية المشروع وهذا بحساب المسار الحرج .
حيث بعد التمثيل الشبكي للمشروع يتم وضع زمن انجاز كل مشروع لمعرفة الزمن العام للمشروع ككل.

أ- لوقت لمقدر: تحليل زمن المشروع يمكن أن يتحقق باستعمال زمن واحد لكل نشاط وهذا الزمن يتم تحديده عادة عن طريق التقدير الشخصي أو باستعمال معطيات تاريخية في بعض الحالات بحيث تكون هذه لمعطيات متشابهة.

ب- وقت مضاعف لكل نشاط الوقت المضاعف يتكون من 3 أوقات تقديرية لكل نشاط

-الوقت المتفائل "O"

-الوقت المتشائم "P"

-الوقت المعتدل "M"

نستخدم هذه الأوقات لحساب الوقت المتوقع E_i حيث يجب أن يكون الزمن متجانس لكل مشروع حتى يكون التقدير صحيحا.

$$E_i = \frac{O+P+4M}{6}$$

3-طريقة المسار الحرج (CPM) Critical Path Method

يعرف المسار الحرج بأنه سلسلة من الأنشطة الحرجة التي تربط نقطة البداية والنهاية في المخطط الشبكي، وسميت هذه الأنشطة بالأنشطة الحرجة لأن الوقت الفائض في تنفيذها يساوي صفر، لذلك فإن أي تأخير فيها يؤدي إلى تأخير تنفيذ المشروع الكلي.
يمكن أن يكون هناك عدة مسارات حرجة في مشروع واحد كما يمكن أن يمر المسار الحرج بنشاط وهمي.

وقبل التطرق إلى خطوات إيجاد لمسار لخرج نوجز بعض لمفاهيم فيما يلي:

-البداية المبكرة Earliest Start : تعبر عن زمن البداية المبكرة أو أبكر موعد يمكن فيه البدء في نشاط معين.

-البداية المتأخرة Latest Start : تعبر عن آخر وقت يمكن أن يبدأ فيه النشاط شريطة أن لا يؤثر ذلك على بدء النشاطات الأخرى (زمن البداية المتأخرة = زمن النهاية المتأخرة - الوقت المقدر لأداء النشاط) .

-النهاية المبكرة Earliest Finish : تعبر عن زمن إتمام النشاط إذا ما بدأ مبكرا أو أبكر موعد يمكن الانتهاء فيه من نشاط معين (زمن النهاية المبكرة = زمن البداية المبكرة + الوقت الذي يستغرقه النشاط) .

-النهاية المتأخرة Latest Finish : تعبر عن زمن النهاية المتأخر أو آخر موعد يمكن فيه إتمام نشاط معين .

4- توضيح المسار الحرج عبر الوقت العائم الكلي TF والحرFF:

1- تتضمن حسابات المسار الحرج تطبيق نوعين من الحسابات الأولى تسمى بالحسابات المتقدمة (forward pass calculation) وهذه تبدأ من أول نقطة زمنية في المخطط الشبكي وتتجه إلى آخر نقطة زمنية في المخطط الشبكي وعند كل نقطة زمنية نحسب رقم (يوضع داخل مربع صغير) ويمثل هذا الرقم وقت الحدوث أو زمن البداية المبكر لتلك الأنشطة التي تبدأ بالحدث (i) وهو أقرب وقت متوقع لإتمام عمل معين. فإذا افترضنا (EST_i) يمثل وقت البداية المبكر لكل الأنشطة التي تبدأ بالحدث (i) فإذا كانت ($i = 1$) فإن:

$$EST_1=0.....1$$

يشكل بداية الحسابات وعلية يستخرج (EST_j) لحدث نهاية النشاط ($i \& j$) حيث ($i < j$) وفقاً للقاعدة التالية:

$$EST_j=Max(EST_i+T_{ij}).....2$$

ولكافة الأنشطة ($i \& j$).

حيث يمثل (T_{ij}) وقت تنفيذ النشاط ($i \& j$) مقدراً بالساعات أو الأيام أو الأسابيع أو الشهر أو أية وحدة زمنية أخرى.

2- أما الخطوة الثانية من الحسابات فتشمل استخراج ما يسمى بوقت النهاية المتأخر لكافة الأنشطة المؤدية للحدث (i). فإذا كانت ($i = n$) تمثل الحدث الأخير، فإن:

$$LST_n= EST_k.....3$$

يوضح أساس الحسابات المتأخرة، وبصورة عامة لأية نقطة زمنية (حدث i) نستخدم القاعدة التالية:

$$LST_i=Min(LST_j-T_{ij}).....4$$

ولكافة الأنشطة ($i \& j$). (يوضع داخل مثلث صغير)

بداية العمل على LST يكون من حدث النهاية ويكون الحساب حسب التوجه إلى الوراء وهذا عن طريق التخفيض من حدث إلى آخر

1- الوقت العائم: هذا الوقت عادة ما يكون مع النشاطات التي لا تمثل المسار الحرج، أي أن

النشاطات على المسار الحرج لا يوجد لها وقت عائم ويوجد أنواع من الوقت العائم:

أ- الوقت العائم الكلي TF وهو جزء من الوقت لمسار من النشاطات التي يمكن تأخيرها

دون تأثير على انجاز المشروع ككل يمكن حساب TF بالعلاقة التالية:

$TF = \text{وقت النهاية المبكر لحدث النهاية} - \text{وقت البداية المبكر لحدث البداية} - \text{وقت النشاط}$

$$TF= LST_i- EST_i- T_{ij}$$

ب- الوقت العائم الحر FF : وهو جزء من الوقت للنشاط الذي يمكن تأخيره دون تأثير على بداية

النشاط اللاحق لوقت البداية المبكر وهذا الوقت يمكن أن يؤثر في نشاطات أخرى بإحداث وقت

كلي لها ويمكن حساب FF بالعلاقة التالية:

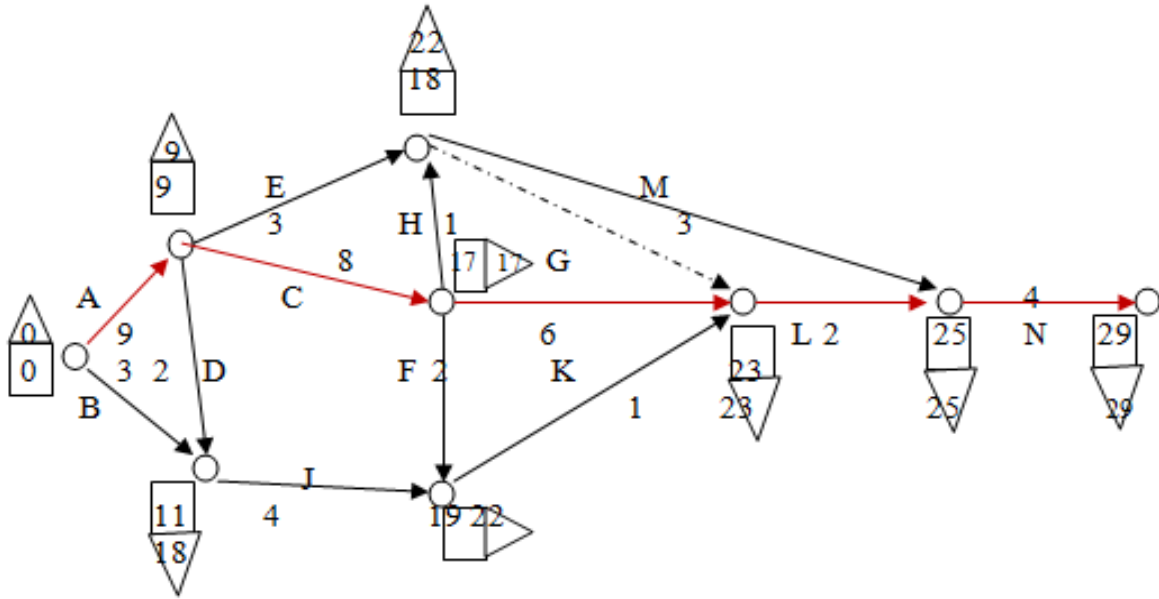
$FF = \text{وقت البداية المبكر لحدث النهاية} - \text{وقت البداية المبكر لحدث البداية} - \text{وقت النشاط}$

$$FF = LST_i- EST_i- T_{ij}$$

مثال تطبيقي: المشروع التالي يحتوي على النشاطات من A إلى N مع المعطيات التالية:

N	M	L	K	J	H	G	F	E	D	C	B	A	النشاط
M	E	E-	F	B	C	C	C	A	A	A	/	/	النشاط السابق
L	H	H	J	D									مباشرة
		G-											
		K											
4	3	2	1	4	1	6	2	3	2	8	3	9	الزمن(اسابيع)

التمثيل الشبكي للجدول:



بحساب EST_i و LST_i وفقا للقاعدتين

$$\boxed{EST_i} \quad EST_i = \max(EST_j + T_{ij}) -$$

$$\triangle LST_i \quad LST_i = \min(LST_j - T_{ij}) -$$

نقول أن النشاط حرج إذا تحقق ما يلي:

$$\left\{ \begin{array}{l} LST_i = EST_i \\ LST_j = EST_j \\ EST_j - EST_i = LST_j - LST_i = T_{ij} \end{array} \right.$$

المسار الحرج الذي يحقق هذا الشرط هو

A-C-G-L- N

مثلا النشاط A

$$\begin{aligned} LST_0 &= EST_0 \quad (0=0) \\ LST_1 &= EST_1 \quad (9=9) \\ EST_1 - EST_0 &= LST_1 - LST_0 = T_{01} \quad (9-0=9-0=9) \end{aligned}$$

وزمن انجاز المشروع هو 29 أسبوعا

5- أسلوب تقييم البرامج ومراجعتها (بيرت)

Program Evaluation and Review Technique (PERT)

هذا الجزء من التحليل يتعامل مباشرة مع التكاليف والموارد وعلاقتها بالزمن :

تعريف :

***التكلفة العادية** : هي التكلفة المباشرة وتحسب لجميع نشاطات المشروع .

***التكلفة الغير عادية** : هي تكلفة غير مباشرة وتسمى بالتكلفة المضغوطة وتحسب هذه التكلفة

نتيجة التخفيض في الزمن لبعض النشاطات أو كل نشاطات المشروع.

***الوقت العادي** : وهو زمن انجاز المشروع في ظل الظروف العادية ويحدد عن طريق المسار

الخرج.

* **الوقت المضغوط** : وهو الزمن الذي يتم على أساسه تخفيض زمن انجاز المشروع بحيث

تريد المؤسسة ان تنتهي المشروع باقل وقت من الزمن العادي.

***معدل التكلفة**: ويحسب على أساس تخفيض زمن النشاط بوحدة زمن واحدة يعرف مصطلح

آخر يسمى ميل التكلفة ويحسب بلصورة التالية:

$$\text{معدل التكلفة} = \frac{\text{التكلفة المضغوطة} - \text{التكلفة العادية}}{\text{الوقت العادي} - \text{الوقت المضغوط}}$$

حيث يتم العمل على لتكلفة لمضغوطة والزمن المضغوط على النشاطات الحرجة ، ويؤخذ بعين الاعتبار معدل التكلفة الاقل في اغلبية التخفيض .

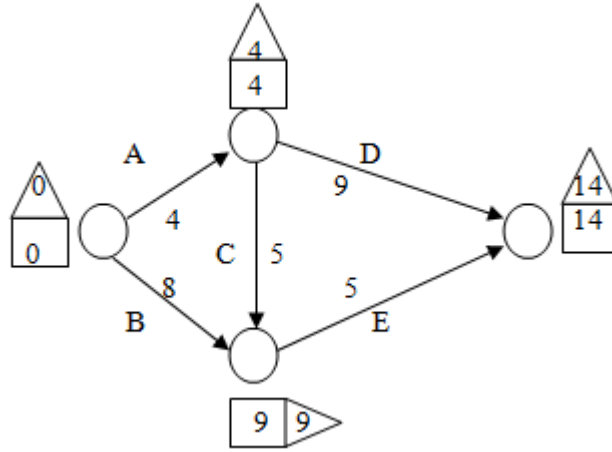
نتيجة التخفيض من مرحلة إلى الاخرى يمكن ان يحدث مسارات حرجة وبالتالي في عملية التخفيض اللاحقة تؤخذ المسارات الجديدة بعين الاعتبار.

مثال تطبيقي : مشروع له خمس نشاطات يمثل كالتالي

النشاط	النشاط السابق	الوقت العادي (اشهر)	الوقت المضغوط	التكلفة العادية	التكلفة المضغوطة
A	-	4	3	360	420
B	-	8	5	300	510
C	A	5	3	170	270
D	A	9	7	220	300
E	C-B	5	3	200	360

التمثيل الشبكي:





المسار الحرج هو A-C-E

زمن الانجاز هو 14 شهر

التكلفة المباشرة (مجموع التكلفة العادية) = 1250

-حساب معدل التكلفة :

$$60 = \frac{360 - 420}{3 - 4} = A : \downarrow$$

$$70 = \frac{300 - 510}{5 - 8} = B : \downarrow$$

$$50 = \frac{170 - 270}{3 - 5} = C : \downarrow$$

$$40 = \frac{220 - 300}{7 - 9} = D : \downarrow$$

$$80 = \frac{300 - 360}{3 - 5} = E : \downarrow$$

اقل معدل تكلفة هو 50 بالنسبة للنشاطات الحرجة الخط المتقطع في المخطط هو الوقت الاحتياطي بالنسبة للنشاط التخفيض في الزمن يتم على أساس معدل التكلفة الأقل للنشاط الحرج تخفيض النشاط C بوحدة واحدة المسار الحرج عن التخفيض من خلال المخطط أدناه يصبح .

1- المسار الأول: AD 2- المسار الثاني: ACE 3- المسار الثالث: BE

زمن الانجاز هو 13 شهر

تكلفة الانجاز = 1250 + 50 = 1300

في التخفيض الثاني فان معدلات تكلفة تساوي:

-إحداث تخفيض في E وD في أن واحد معدل التكلفة = 120 = 80 + 40

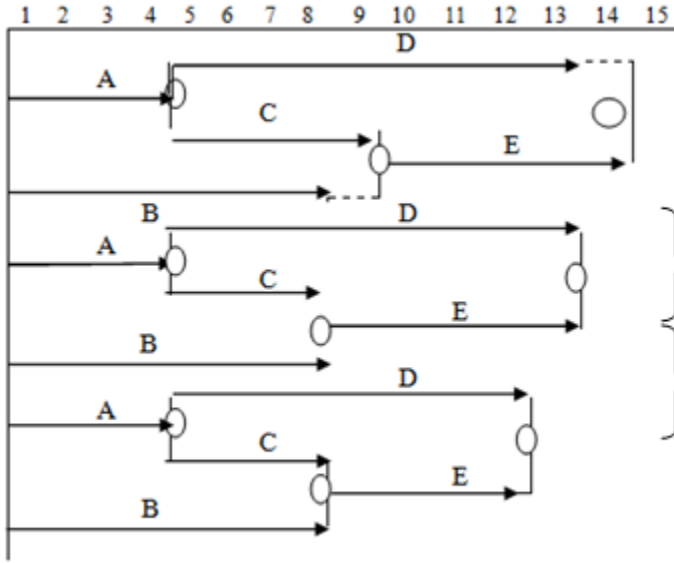
-إحداث تخفيض في C وB في أن واحد معدل التكلفة = 160 = 40 + 50 + 70

-إحداث تخفيض في A وB في أن واحد معدل التكلفة = 130 = 70 + 60

-اقل معدل تكلفة هو 120 إذن نختار التخفيض في E وD بمدة زمن واحدة



زمن الانجاز هو 12 شهر
تكلفة الانجاز = 1300 + 120 = 1420
وبنفس الخطوات يمكن مواصلة التخفيض



التخفيض الأول في

C

التخفيض الثاني

في D و E

المحور السادس

مسائل النقل



المحور السادس: مسائل النقل

إن مسائل النقل تتعلق بمشاكل النقل للأشخاص، سلع، خدمات، شحن... إلخ من مجموعة من المصادر إلى مجموعة المراكز، ويتم تمثيل ذلك بجداول النقل.

1- مفهوم جدول النقل وتمثيله:

رياضيا نموذج النقل يأخذ الشكل التالي:

باعتبار أن (x_{ij}) تمثل الوحدات المنقولة أو المرحلة من المصدر i إلى المركز J بتكلفة (c_{ij}) فإن النموذج يكون كالتالي:

$$\text{Min} z = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m C_{ij} X_{ij}$$

حيث:

- المجموعة الأولى: قيود العرض $\sum_{i=1}^n X_{ij} \leq S_i$
- المجموعة الثانية: قيود الطلب $\sum_{i=1}^m X_{ij} \leq D_j$

$$X_{ij} \geq 0$$

حيث المجموعة الأولى من القيود التي تمثل مجموع الوحدات المنقولة من أي مركز لا يمكن أن تتجاوز عرض المصدر.

والمجموعة الثانية من القيود تمثل مجموع الوحدات المنقولة إلى أي مركز لا يمكن أن تتجاوز طلب المركز.

وحتى يكون نموذج النقل متوازن أي يكون مجموع الوحدات المعروضة يساوي مجموع الوحدات المطلوبة أي

$$\sum_{i=1}^n S_i = \sum_{j=1}^m D_j$$

بهذه الفرضية يمكن تعديل نموذج النقل بالصورة التالية

$$\sum_{i=1}^n X_{ij} = S_i$$

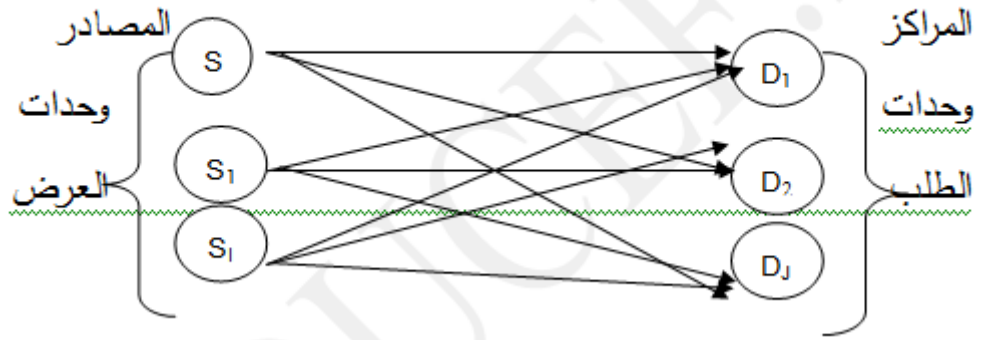
$$\sum_{j=1}^m X_{ij} = D_j$$

وعليه يمكن كتابة نموذج النقل رياضيا كالتالي

$$\text{Min} z = \sum_{ij=1}^n C_{ij} X_{ij}$$

أما شبكيا فنموذج النقل العام يمكن تمثيله بالصورة التالية:





أما تنفيذ النموذج عن طريق الجدول فيكون بالشكل التالي: وبافتراض مراكز

		1	2	3	m
مصادر	1	$C_{11} X_{11}$			S_1
	2				S_2
	n				

ويتم وضع جدول النقل التالي:

	1	2	3
1	X_{11}	X_{12}	X_{13}
	C_{11}	C_{12}	C_{13}
2	X_{21}	X_{33}	X_{23}
	C_{21}	C_{22}	C_{23}
3	X_{31}	X_{32}	X_{23}
	C_{31}	C_{32}	C_{33}

فمثلا الوحدات المتاحة الممثلة كالتالي على الكمية المتاحة

3	2	1	المصدر
1200	1500	1000	الكمية المتاحة

2	1	المركز
1400	2300	الكمية المطلوبة

أما التكلفة فممثلة كالتالي:

	مركز	
	80	215
مصدر	10	108
	102	68

		مراكز		
		1	2	
مصادر	X_{11}		X_{12}	1000
	80		215	
	X_{21}		X_{22}	1500
	10		108	
	X_{31}		X_{32}	1200
	102		68	
		2300	1400	

أما عن طريق البرمجة الخطية فيمكن وضع نموذج النقل بالصورة التالية:

$$\text{Min } \lambda p = 80X_{11} + 215X_{12} + 10X_{21} + 108X_{22} + 102X_{31} + 68X_{32}$$

$$X_{11} + X_{12} = 1000 \quad \leftarrow 1$$

$$X_{21} + X_{22} = 1500 \quad \leftarrow 2$$

$$X_{31} + X_{32} = 1200 \quad \leftarrow 3$$

$$X_{11} + X_{21} + X_{31} = 2300 \quad \leftarrow 4$$

$$X_{12} + X_{22} + X_{32} = 1400 \quad \leftarrow 5$$

$$X_{ij} \geq 0$$

يمكن تلخيص جدول النقل في المعطيات التالية:

1. المصادر (i) ممثلة في وحدات أو محطات أو نقاط بيع أو تخزين أو استقبال أو مدن...
 2. المراكز (j) ممثلة في وحدات أو محطات أو نقاط بيع أو تخزين أو استقبال أو مدن.
 3. (X_{ij}) تمثل الوحدات المنتجة أو الموزعة أو المنقولة وتشمل البضائع السلع، الأفراد.
 4. (C_{ij}) تمثل تكلفة النقل أو توزيع وحدة واحدة من المصدر (i) إلى المركز (j).
 5. الخلية (X_{ij}) و (C_{ij}) وهي الخلية التي يتم على أساسها البحث عن الطريقة المثلى للنقل وتشمل الخلية: - تكلفة النقل (تكلفة الإنتاج).
- الوحدات المنقولة أو المنتجة.
-صافي التغير في التكلفة.

2-تقنيات النقل:



تتمثل الخطوات الأساسية لتقنية النقل في الآتي:

- 1 حدد حل عملي ابتدائي أو أولي.
- 2 حدد متغير داخل من بين المتغيرات غير الأساسية، إذا كانت كل المتغيرات تحقق شرط الأمثلية يتوقف العمل وإذا لم يتحقق ننقل إلى الخطوة الثالثة.
- 3 حدد المتغير الخارج من بين المتغيرات الأساسية لحل الجدول السابق، ثم أوجد المتغير الأساسي الجديد للحل، في حالة عدم الوصول إلى الحل الأمثل نتوجه إلى الخطوة (2) حتى الوصول إلى الحل الأمثل للبرنامج.

3-تحديد الحل لنماذج النقل:

نماذج النقل تشتمل على نوعين من الحلول:

أ. الحلول الأولية (الابتدائية): نعلم أن $(\sum_{i=1}^m S_i = \sum_{j=1}^n D_j)$ ، هذا يعني أن جدول النقل للنموذج أو البرنامج هو مجموع $(m+n)$ ، مما يعني أن جدول النقل يجب أن يشمل على $(m+n-1)$ متغير أساسي أي مجموع الخلايا التي يتم بواسطتها النقل (الخلايا المشغلة) يساوي $(m+n-1)$.

3-1-طرق الحل الابتدائي:

- طريقة زاوية الشمال الغربي.
- طريقة أقل تكلفة.
- طريقة VAM.
- طريقة RAM.

ب. تحديد الحل الأمثل: لتحديد الحل الأمثل لنموذج ما يجب أن يحتوي كذلك على $(m+n-1)$ متغير أساسي و $(m+n-1)$ خلايا مشغولة.

هذا يعني لتحديد الحل الأمثل يجب أن ننطلق من أحد الحلول الابتدائية ويفضل أن يكون الحل بطريقة زاوية الشمال الغربي.

وهناك طريقتين للوصول إلى الحل الأمثل: - طريقة الأحجار المتحركة، - طريقة التوزيع المعدلة وتسمى بطريقة MODi.

مثال: مؤسسة وطنية تنتج آلات صناعية بأربع وحدات إنتاج بمجموع طاقة 700 آلة، تريد نقل هذه المنتجات إلى 5 نقاط بيع بأقل تكلفة ممكنة، حسب المصالح المختلفة للمؤسسة فقد تم تحديد المعطيات التالية:

المصادر	1	2	3	4
المنتجات	200	150	250	100

المراكز	1	2	3	4	5
الوحدات المطلوبة	170	160	140	120	110

بالتكلفة التالية:

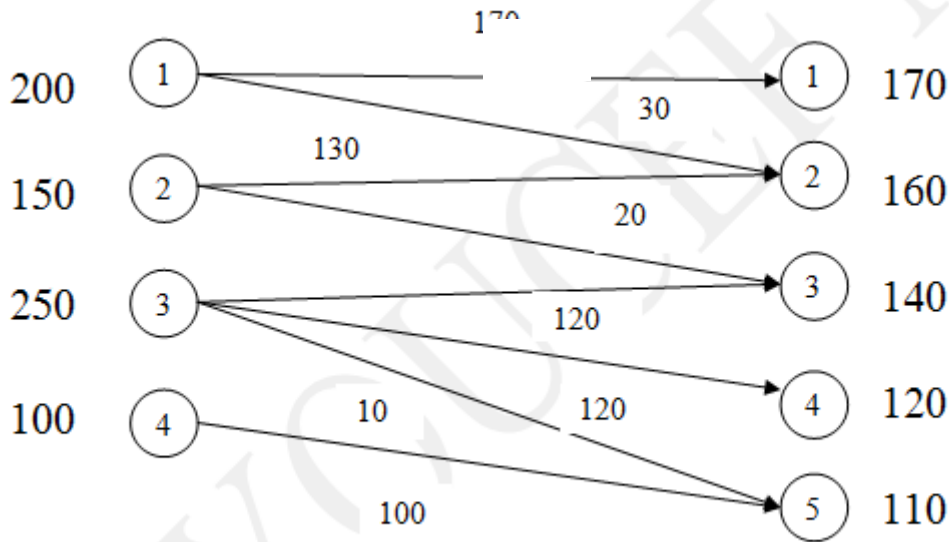


2	2.5	2	3	1.5
3	1.5	1.5	2	3
1.5	3	2	1	1.5
2.5	2	2	2	2

- وضع هذه المعطيات في نموذج نقل ثم البحث عن الحل الابتدائي
3-1-1-1 طريقة زاوية الشمال الغربي:

	1	2	3	4	5	
1	170	30				200 30 0
2		130	20			150 20 0
3			120	120	10	250 130 10 0
4				100		100 0
	170 0	160 130 0	140 120 0	120 0	110 10 0	

- الكمية المتاحة = 0 بعد عملية التشغيل يتم انتقال عموديا إلى الأسفل
- إذا كانت الكمية المطلوبة هي نفسها المنتجة في العمود أو السطر يتم الانتقال قطريا للخلية (2-2)
- تم تكرار الخطوة الأولى والثانية حتى تنتهي من عملية النقل.
- الخلايا المشغولة = $8 = (m+n-1)$
- عدد المتغيرات الأساسية = 8.
- التكلفة = $(2 \times 170) + (2.5 \times 30) + (1.5 \times 130) + (1.5 \times 20) + (2 \times 120) + (1 \times 120) + (2 \times 100) + (1.5 \times 10) = 1215$



3-1-2- طريقة أقل التكلفة:

	1	2	3	4	5				
1	40	2	10	2.5	40	2	3	110	200 90 50 10 0
2		3	150						150 0
3	130	1.5		3	2	120			250 130 0
4		2.5	2		100	2	1	1.5	100 0
	170	160	140		120			110	
	40	10	40		0			0	
	0	0	0						

خانة أقل تكلفة

في جدول ونبدأ بها

ملاحظة: في حالة الخلايا بتكلفة متساوية نختار الخلية التي يمكن إعطاؤها أكبر عدد ممكن من الوحدات.

• لما التكلفة تكون 1: الخلية (3.4) قيمتها: 120.

- لما التكلفة = 1.5 : - الخلية (1.5) يمكن تشغيلها بـ 110
 - الخلية (2.2) يمكن تشغيلها بـ 150
 - تخفف لأن عدد وحدات في سطر 2 أصبح = 0- الخلية (2.3) يمكن تشغيلها بـ 140
 - الخلية (3.1) يمكن تشغيلها بـ 130
 - الخلية (3.5) يمكن تشغيلها بـ 100. نفس سبب تخفف عدد وحدات = 0 في عمود.
- الخلية التي يمكن تشغيلها بأكثر عدد ممكن من الوحدات هي الخلية (2.2) ننطلق منها

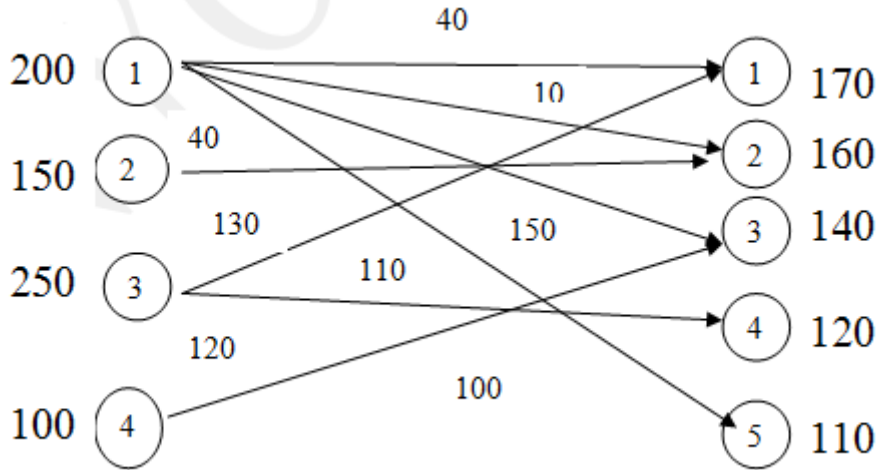
- لما التكلفة = 2 - الخلية (1.1) يمكن تشغيلها بـ 40
 - الخلية (13) يمكن تشغيلها بـ 90
 - الخلية (4.2) يمكن تشغيلها بـ 10
 - الخلية (4.3) يمكن تشغيلها بـ 100
- نبدأ التشغيل بأكثر قيمة وهي الخلية (4.3)

أما الخلايا (2.4) (3.3) (4.4) (4.5) فهي تخفف من حساب لأن عدد الوحدات في سطر الثاني والثالث والعمود الرابع والخامس أصبح يساوي 0 وبنفس الطريقة نكمل باقي التكاليف

التكلفة 2.5: الخلية (1.2) = 10.

التكلفة الإجمالية = $(2 \times 40) + (2.5 \times 10) + (2 \times 40) + (1.5 \times 150) + (1.5 \times 110) + (1 \times 120) + (2 \times 100) = 1040$

ملاحظة: تكلفة هذه الطريقة 1040 أقل من تكلفة الطريقة الأولى (زاوية الشمال الغربي) والتي تساوي 1215، وبالتالي هي أفضل من الأولى. ومنه مخطط النقل:



3-1-3-طريقة VAM: (نختار العمود 4 لأن أكبر فرق فيه = 1)

	1	2	3	4	5			
1	2	2.5	2		3	1.5	200	$0.5=1.5-2$
							150	0
2	3	1.5	1.5		2	3		
				120			250	0
3	1.5	3	2		1	1.5	130	
4	2.5	2	2		2	2	100	0
	170	160	140		120	110		
	0.5	0.5	0.5		1	0		

أصبح يساوي 0 يتم

شطب العمود 4

- الخطوة (1):** إحداث الفرق بين أقل التكاليفتين أو بين التكلفة والتكلفة المولية لها، يوضع هذا الفرق في عمود فرق التكلفة ونفس الشيء بالنسبة لسطر فرق التكلفة.
- الخطوة (2):** تعيين ناتج الفرق الأكبر هو لعمود الفرق أو سطر الفرق وعلى أساس النتيجة الأكبر يحدد العمود أو السطر المعني بالتشغيل.

- الخطوة (3):** بعد تحديد السطر أو العمود المعني وبالتشغيل، ثم اختيار الخلية التي بها أقل تكلفة وتشغيلها بأكبر عدد ممكن من الوحدات.
- الخطوة (4):** بعد عملية التشغيل يتم شطب والتخلص من: العمود أو السطر أو الاثنين معا في حالة ما إذا كان فرق الوحدات يساوي (0).
- الخطوة (5):** بعد عملية الشطب يتم الانتقال إلى جدول جديد ثم تكرار خطوات الحل من جديد. إذن لدينا:

	1	2	3	5		
1	2	2.5	2	1.5	200	$0.5=1.5-2$
2	3	150	1.5	1.5	150	0
					0	0
3	1.5		3	2	130	0
4	2.5		2	2	100	
	170	160	140	110		
		0.5	0.5	0		
				0.5		

يشطب لأن فرق الوحدات = 0

أفضل عمود لأن به أفضل خلية (3.2) والتي يتم شغلها بأكبر عدد من الوحدات الممكنة بأقل تكلفة.

	1	2	3	5			
1		2	2.5	2	1.5	200	0.5
3	130	1.5	3	2	1.5	130	0
4		2.5	2	2	2	100	0
	170						
	40	10	140	110			
	0.5	0.5	0	0			

نفس تبرير الحذف في الجدول السابق

	1	2	3	5		
1	2	2.5	2	110	200	0.5
					1.5	90
4	2.5	2	2		2	100
	40	10	140		110	
	0.5	0.5	0		0.5	

	1	2	3			
1	40	2	2.5	2	90 50	0.5
4		2.5	2	2	100	0
	40	10	140			
	0.5	0.5	0			

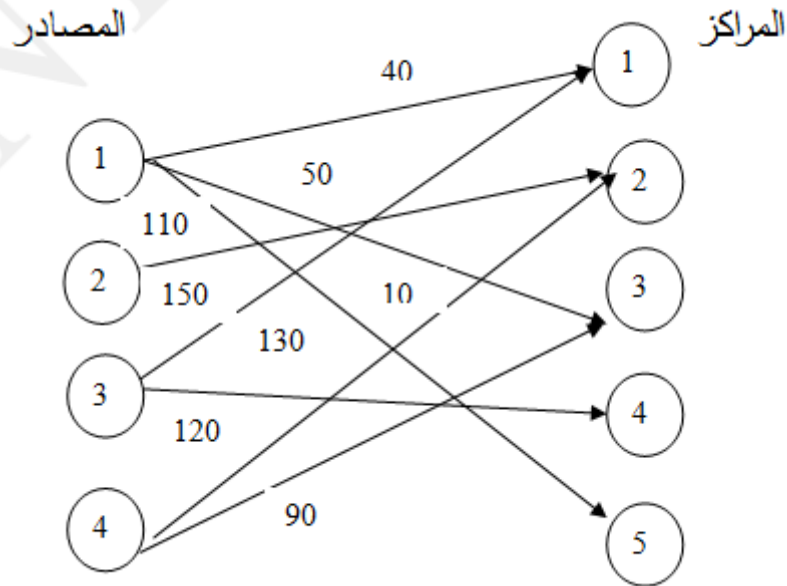
	2	3		
1	2.5	50	2	50 0.5
4	2	2	100	0
	10	140		
		90		
	0.5	0		

	2	3		
4	10	90	2	100 0
			2	0
	10	90		
	0	0		

إذن جدول الحل يصبح:

	1	2	3	4	5				
1	40	2	2.5	50	2	3	110	1.5	200
2		3	150	1.5			2	3	150
3	130	1.5			2	120	1	1.5	250
4		2.5	10	2	90		2	2	100
	170	160	140	120	110				

التكلفة الاجمالية = 985



3-1-4- طريقة RAM:

هذه الطريقة من الطرق الابتدائية للوصول إلى الحل الأمثل وفي حالات كثيرة ممكن أن تعطي حل أمثل للبرنامج كما أن هذه الطريقة تعطي أهمية كبرى للتكلفة.

ولمعرفة خطوات الحل نعطي جدول النقل التالي الذي تضمن اربع مصادر وخمس مراكز ويوضح تكلفة نقل كل خلية في الجدول:

	1	2	3	4	5	
1	2	2.5	2	3	1.5	200
2	3	1.5	1.5	2	3	150
3	1.5	3	2	1	1.5	250
4	2.5	2	2	2	2	100
	170	160	140	120	110	

خطوات الحل:

1. حساب الفرق لكل خلية في الجدول على أساس الصفوف وهذا حسب العلاقة التالية:

الفرق التكلفة = تكلفة الخلية - أكبر تكلفة لسطر الخلية - أكبر تكلفة لعمود الخلية.

مثلا السطر الأول: الخلية (1.1) $4 - 3 - 3 - 2 = 3 - 3 - 2 = 4 -$

الخلية (1.2) $3.5 - 3 - 3 - 2.5 = 3 - 3 - 2.5 = 3.5 -$

وبنفس الطريقة نكمل باقي خلايا والسطر الثاني والثالث والرابع

2. بعد حساب فرق التكلفة نختار الخلية الأكبر فرق متبوع بإشارة سالبة، يتم تشغيل هذه الخلية

بأكبر عدد ممكن من الوحدات مثل الطريقة التي أتبعته في طريقة أقل تكلفة، مع مراعاة

الكمية المتاحة والكمية المطلوبة، إذا تكررت التكاليف المتساوية نختار الخلية التي يمكن

تشغيلها بأكبر عدد ممكن من الوحدات.

3. بعد عملية التشغيل للخلية المعنية، يتم شطب السطر الذي تم نقل كل وحداته (عدد وحدات

$= 0$) أو العمود الذي تم نقل كل وحداته (ع وحدات $= 0$) أو الإثنين معاً، ثم الانتقال إلى

جدول جديد بدون السطر أو العمود المشطب.

4. يتم العمل وفق هذه الخطوات (3.2.1) حتى الوصول إلى الحل بهذه الطريقة.

السطر الأول: (1.1) $4 - 3 - 3 - 2 = 3 - 3 - 2 = 4 -$

(1.2) $3.5 - 3 - 3 - 2.5 = 3 - 3 - 2.5 = 3.5 -$

(1.3) $3 - 2 - 3 - 2 = 3 - 2 - 3 - 2 = 3 -$

(1.4) $3 - 3 - 3 - 3 = 3 - 3 - 3 - 3 = 3 -$

(1.5) $4.5 - 3 - 3 - 1.5 = 3 - 3 - 1.5 = 4.5 -$

ونجد السطر الثاني والثالث والرابع بنفس الطريقة

	1	2	3	4	5	
1	-4	-3.5	-3	-3	-4.5	200
2	-3	-4.5	-3.5	-4	-3	150
3	-4.5	-3	-3	-5	-3.5	250
4	-3.5	-3	-3	-4	-4	100
	170	160	140	120	110	

أكبر فرق تكلفة متبوع بـ (-) هو (-5) وبالتالي يتم تشغيل الخلية (3.4) بأكبر عدد من الوحدات وهو 120.

وبالتالي يتم شطب وحذف عمود الرابع ومواصلة العمل حتى الوصول إلى الحل الأمثل بنفس خطوات طريقة VAM ولكن بالاعتماد على فرق التكلفة وأخذ أكبر فرق متبوع بإشارة (-)

2-3- طرق الحل الأمثل:

سيكون الحل الأمثل إذا كانت التكلفة المباشرة للخلايا غير الأساسية (غير المشتغلة) يزيد عن صافي التخفيض في التكاليف غير المباشرة الناتجة عن إعادة التشغيل من خلال الخلايا الأخرى، لتوضيح ذلك نأخذ المثال الافتراضي التالي:

	C	D	
A	4	7	40
B	12	6	40
	30	50	

لإيجاد الحل من خلال زاوية الشمال الغربي نجده كالتالي:

	C	D			
A	30	-4	10	+7	40
B		+12	40	-6	40
	30	50			

لو تم تشغيل الخلية غير الأساسية (BC) بوحدة واحدة يترتب على ذلك الآتي:
- تخفيض الخلية (BD) بوحدة واحدة.

- زيادة الخلية (AD) بوحدة واحدة.

- تخفيض الخلية (AC) بوحدة واحدة.

لو نظرنا إلى هذه العملية عن وجهة نظر التكاليف يمكن طرح السؤال التالي: هل أن هذا التغيير يكون لصالح العملية أم لا (يؤدي لتخفيض تكاليف أم لا)

● بتشغيل الخلية (BC) بوحدة واحدة يترتب عليه زيادة التكاليف بـ 12 ون.

● زيادة الخلية (AD) بوحدة واحدة يترتب عليه زيادة التكاليف بـ 7 ون.

● تخفيض الخلية (BD) بوحدة واحدة يترتب عليه تخفيض التكاليف بـ 6 ون.

● تخفيض الخلية (AC) بوحدة واحدة يترتب عليه تخفيض التكاليف بـ 4 ون.

● هذا يعني أن العملية كلها تكون كالتالي:

$$9=4-6-7+12$$

هذا يعني أنه إذا تم تشغيل الخلية BC وحدة واحدة فغنه يترتب عليه زيادة التكلفة بمقدار 9 ون، وهذا يعني أيضا أن الحل السابق أفضل من الحل الجديد.

وهذه العملية توضح لنا فكرة تشغيل الخلايا على أساس تخفيض التكاليف من جدول إلى آخر أو زيادة الأرباح من جدول إلى آخر باستعمال طرق الحل الأمثل، كطريقة القفز على الصخور (طريقة الأحجار المتقلبة) وطريقة MODI (طريقة معدلة).

3-2-1-طريقة الأحجار المتقلبة:

هذه الطريقة تؤدي إلى حل أمثل لأي نموذج نقل إذا كانت تركيبته صحيحة.

الخطوة 1: حل النموذج بإحدى طرق الحل الابتدائي ويفضل أن تكون بطريقة زاوية الشمال الغربي.

في حالة عدم تحقيق الشرط $m+n-1$ يتم وضع خلية شاغرة بوحدة (0) بحيث هذه الخلية تسهل لنا طريقة النقل.

الخطوة 2: حساب صافي التغير للتكلفة للخلايا غير المشغلة يتبع خط السير التالي:

● يجب أن يكون التحرك أو ما يطلق عليه مسار الحلقة المغلقة أفقيا يمينا أو يسارا، رأسيا إلى الأعلى أو الأسفل التحرك القطري غير مقبول، وبالتالي فإن أي انعطاف أو رجوع ينتج عنه زاوية قائمة.

ويكون هذا الرجوع مع خلية مشغلة.

● خط السير يجب أن يمر بخلايا مشغلة فقط في حالة إنعطاف الخلايا وسط الطريق لا تؤخذ بالاعتبار.

● مسار الحلقة المغلقة عبارة عن شكل مغلق أركانه تتشكل من خلايا أساسية (مشغلة) ما عدا الخلية التي يراد تقييمها.

● حساب صافي التغير في التكلفة ينتج عنه الإشارات التالية: (+،-،+،-،....).

الخطوة 3: بعد حساب صافي المتغير في التكلفة للخلايا غير المشغلة يمكن الوصول الآتي:

- كل صافي التغير في التكلفة $0 \leq$ هذا يعني أن الجدول الذي وصلنا إليه يمثل جدول حل أمثل.

- إذا ظهر صافي التغير في التكلفة لخلية أو أكثر أقل من الصفر ($0 >$) هذا يعني أن الجدول لا يمثل جدول حل أمثل وبالتالي ننتقل للخطوة الرابعة.

الخطوة 4: نختار الخلية شاغرة التي بها أكبر صافي تغير في التكلفة وبإشارة (-) وتشغيلها بأكبر عدد ممكن من الوحدات مراعيًا في ذلك الكمية المتاحة والكمية المطلوبة. إذا كان تساوي في صافي التغير في التكلفة السالب اختيار الخلية التي بها أقل تكلفة، وإذا كان هناك تساوي في التكاليف نختار الخلية التي يمكن تشغيلها بأكبر عدد ممكن من الوحدات.

الخطوة 5: بعد عملية التشغيل يتم الانتقال إلى جدول جديد مع إهمال الجدول القديم وتكرار الخطوات من جديد.

	1	2	3	4	5					
1	170	30	2.5	-0.5	2	1.5	3	-0.5	1.5	200
2	2	130	1.5	20	1.5	1.5	2	2	3	150
3	0	1	3	120	2	120	1	10	1.5	250
4	0.5	2.5	0.5	2	-0.5	2	0.5	2	100	100
	170	160	140	120	110					

1	170	2	20	2.5	0.5	2	1.5	3	10	1.5	200
2	2	3	140	1.5	10	1.5	1.5	2	2.5	3	150
3	0	1.5	1	3	130	2	120	1	0.5	1.5	250
4	0	2.5	-1	2	-1	2	0	2	100	2	100
	170		160		140		120		110		

نختار خلية C_{42} بها أكبر صافي تغير
سالب وأكبر عدد من وحدات

$$\text{الخلية (1.3)} \quad C_{23} - C_{22} + C_{12} - C_{13} =$$

$$0.5 - = 1.5 - 1.5 + 2.5 - 2 =$$

$$\text{الخلية (1.4)} \quad C_{35} - C_{33} + C_{23} - C_{22} + C_{22} - C_{14} =$$

$$1.5 = 1 - 2 + 1.5 - 1.5 + 2.5 - 3 =$$

$$\text{الخلية (1.5)} \quad C_{35} - C_{33} + C_{23} - C_{22} + C_{12} - C_{15} =$$

$$-0.5 = 1.5 - 2 + 1.5 - 1.5 + 2.5 - 1.5 =$$

$$\text{الخلية (2.1)} \quad \dots\dots\dots \text{مع كل الخلايا الشاغرة.}$$

الجدول أعلاه يكون أو يشكل على أساس الخانة أو الخلية (1.5) بها أكبر صافي تغير بإشارة سالبة ويقابله أقل تكلفة وأكبر عدد من الوحدات، نضع الإشارة لتخفيض والزيادة وننتقل إلى جدول جديد أعلاه.

نختار أقل عدد من الوحدات به إشارة سالبة التغير حسب الخلايا التي بها إشارات فقط وفي جدول أعلاه هي (20) ننتقل للجدول جديد

	1	2	3	4	5		
1	170	2	2.5	2	3	30	1.5
2	3	140	1.5	10	1.5	2	3
3	1.5	3	130	2	120	1	1.5
4	2.5	20	2	2	2	80	2

ونكمل جدول بنفس طريقة الجدول السابق حتى نصل إلى جدول الحل الأمثل تكون كل قيم صافي تغير تكلفة موجبة، أما إذا وصلنا إلى جدول الحل الأمثل ووجد إحدى صافي التغير في التكاليف تساوي (0) أو أكثر، هذا يعني أن البرنامج له حلول مثلى بديلة، أما إذا لم يوجد أي صافي تغير يساوي (0) فإنه يوجد حل أمثل وحيد للبرنامج.

2-2-3- طريقة التوزيع المعدلة: MODI.

تعتمد طريقة التوزيع المعدلة العلاقة $U_i + V_j = C_{ij}$.

حيث C_{ij} تكلفة النقل.

U و V تمثل المتغيرات الثنائية.

طريقة الحل:

- 1- إيجاد الحل الابتدائي باحدى الطرق الابتدائية ويفضل أن تكون زاوية الشمال الغربي، لكي يتحقق لنا عدد الخلايا الأساسية $n+m-1$.
- 2- إيجاد متغيرات U_i و V_j عن طريق العلاقة التالية $U_i + V_j = C_{ij}$ وهذا انطلاقاً من وضع واحد من هذه المتغيرات يساوي (0) حتى يسهل إيجاد المتغيرات الأخرى.
- 3- إيجاد صافي التغير في التكلفة عن طريق العلاقة: $C_{ij} - (U_i + V_j)$ في هذه الحالة تكون الخلايا غير الأساسية أو الخلايا غير المشغلة.
- 4- بعد حساب صافي التغير للتكلفة في الخلايا غير المشغلة يمكن الوصول إلى الآتي:
أ. كل صافي التغير في التكلفة ($0 \leq$) هذا يعني أن الجدول الذي وصلنا إليه جدول الحل الأمثل.



ب. إذا وجد صافي التغير في التكلفة للخلية أو أكثر (>0) هذا يعني أننا لم نصل إلى جدول الحل الأمثل وبالتالي ننتقل إلى الخطوة (5).

5- نختار خلية غير مشغلة والتي بها أكبر صافي تغير متبوع بإشارة سالبة إذا كان هناك الكثير من الخلايا لها تساوي في صافي التغير الأكبر المتبوع بإشارة سالبة.

نختار الخلية التي بها أقل تكلفة وفي حالة تساوي التكاليف، نختار الخلية التي يمكن تشغيلها بأكثر عدد ممكن من الوحدات، كما يمكن أن يكون الاختبار عشوائياً. بعد تحديد الخلية المعنية بالتشغيل مروراً بالخلايا الأساسية التي تحدث لنا رجوع أو انعطاف بزواوية قائمة رجوعاً إلى نفس الخلية المعنية بالتشغيل.

6- بعد اختيار الخلية المعنية بالتشغيل ووضع الإشارات يتم تشغيلها بعدد الوحدات الأقل في الخلايا التي بها إشارة سالبة فلا يكون هناك فرق سالب.

7- بعد عملية تشغيل الخلية الجديدة يتم الرجوع للخطوة رقم (2) وهكذا حتى الوصول إلى حل أمثل.

- تطبيق خطوات طريقة توزيع المعدلة MODI.

	1	2	3	4	5					
1	170	30	-0.5	2	1.5	3	0.5	1.5	200	$U_1=0.5$
2		130	20	1.5	1.5	2	2	3	150	$U_2=-0.5$
3			120	2	120	1	10	1.5	250	$U_3=0$
4				0.5	2	0.5	2	100	100	$U_4=0.5$
	170	160	140	120	110					
	$V_1=1.5$	$V_2=2$	$V_3=2$	$V_4=1$	$V_5=1.5$					

نعدم أي متغير ولتسهيل الحساب نعدم U_3 لأنه يحوي أكبر عدد ممكن من الوحدات وعن طريق المعادلات التالية نكمل البحث عن U_i و V_j :

$$U_3 + V_3 = C_{33}$$

$$U_3 + V_4 = C_{34}$$

$$U_3 + V_5 = C_{35}$$

$$U_4 + V_5 = C_{45}$$

$$U_1 + V_1 = C_{11}$$

$$U_1 + V_2 = C_{12}$$

$$U_2 + V_2 = C_{22}$$

$$U_2 + V_3 = C_{23}$$

أما صافي التغير في التكلفة فيحسب كما يلي مثلا:

$$\begin{aligned} C_{ij} - (U_i + V_j) &= C_{13} - (U_1 + V_3) \\ &= 2 - (0.5 + 2) = -0.5 \end{aligned}$$

ونكمل الخلايا الباقية بنفس الطريقة

	1	2	3	4	5	
1	170	20	0.5	2	10	200
2	2	140	10	1.5	2.5	150
3	0	1	130	2	120	250
4	0	-1	-1	0	100	100
	170	160	140	120	110	
	$V_1=2$	$V_2=2.5$	$V_3=2.5$	$V_4=1.5$	$V_5=1.5$	

بعد اختيار أكبر صافي تكلفة بإشارة (-) (-1) نختار أكبر عدد وحدات

	1	2	3	4	5		
1	170 2		0.5		30 1.5	200	$U_1=0$
		2.5	2	2.5	3		
2	3	140	10 1.5	1.5	1.5	150	$U_2=0$
		1.5		2	3		
3	1.5	1	130	2	120 1	250	$U_3=0.5$
		3			-0.5		
					1.5		
4	2.5	20	0	1	80 2	100	$U_4=0.5$
		2	2	2			
	170	160	140	120	110		
	$V_1=2$	$V_2=1.5$	$V_3=1.5$	$V_4=0.5$	$V_5=1.5$		

	1	2	3	4	5		
1	90	0	-0.5	1.5	110	200	$U_1=0.5$
	2	2.5	2	3	1.5		
2	2	60	90	1.5	2.5	150	$U_2=-0.5$
	3	1.5	1.5	2	3		
3	80	1	50	120	0.5	230	$U_3=0$
	1.5	3	2	1	1.5		
4	1	100	0	1	1	100	$U_4=0$
	2.5	2	2	2	2		
	170	160	140	120	110		
	$V_1=1.5$	$V_2=2$	$V_3=2$	$V_4=1$	$V_5=1$		

	1	2	3	4	5			
1	40	2	0.5	50	1.5	110	200	$U_1=0$
			2.5		2	3		
2	1.5	60	90	1	2		150	$U_2=-0.5$
		3	1.5	1.5	2	3		
3	130	1.5	0.5	120	0.5		250	$U_3=-0.5$
		1.5	3	2	1	1.5		
4	0.5	100	0	0.5	0.5		100	$U_4=0$
		2.5	2	2	2	2		
	170	160	140	120	110			
	$V_1=2$	$V_2=2$	$V_3=2$	$V_4=1.5$	$V_5=1.5$			

كل قيم صافي التكلفة موجبة إذن هذا هو جدول الحل الأمثل.
الحالات الخاصة:

1. حالة الانحراف: عدم تحقق العلاقة $(m+n-1)$ تشغيل الخلية بوحدات الصفر (0) وبفضل الحل عن طريق الأخذ بعين الاعتبار الخلية التي بها أقل تكلفة
2. حالة Dummy: هي حالة عدم تساوي مجموع عملية متاحة مع المطلوبة نضيف عمودا أو سطر وهمي.
3. حالة Max (الربح): نختار الخلية التي بها أكبر ربح ونضع فيها (+) والوصول إلى الحل الأمثل عندما نصل إلى كل قيم صافي تغيير أقل أو يساوي (0).

4-مسائل وتمارين

1- مؤسسة جهوية لها ثلاث (03) مصادر انتاج متمثلة في الاتي :

المصدر	1	2	3
الكمية المنتجة /ألف وحدة	5000	6000	2500

تريد توزيعها على اربع (04) مراكز والتمثلة في الآتي :

المركز	1	2	3	4
الكمية المطلوبة/الف وحدة	6000	4000	2000	1500

نقل وحدة واحدة يتطلب تكاليف /1000 دج والمبينة بالجدول التالي :

6	7	2	3
3	2	5	7
5	4	5	2

المطلوب : ضع هذه المعطيات في نموذج ثم اوجد الحل الابتدائي بمختلف الطرق ؟
2- اوجد الحل الابتدائي بمختلف الطرق لنموذج النقل التالي :

	R_1	R_2	R_3	R_4	
P_1	2	8	10	9	50
P_2	6	11	6	7	40
P_3	12	7	9	8	30
	45	15	30	30	

3- اوجد الحل الابتدائي بطريقة زاوية الشمال الغربي وطريقة اقل تكلفة وطريقة VAN
لنموذج النقل التالي :

	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4	
T_1	7	11	8	13	50
T_2	20	17	12	10	40
T_3	8	18	13	16	30
	45	15	30	30	



4- مؤسسة إنتاجية بها ثلاث وحدات إنتاج A_1 A_2 A_3 تنتج منتج معين حسب الطاقة الإنتاجية التالية :

الوحدة	A_1	A_2	A_3
الطاقة الإنتاجية/مليون	10	15	20

المنتج يسوق الى اربع مراكز (C_1 . C_2 . C_3 . C_4) حسب طاقة الاستقبال التالية:

المركز	C_1	C_2	C_3	C_4
طاقة الاستقبال /مليون	15	10	10	20

وهذا حسب التكاليف التالية :

3	2	1	3
1	3	2	2
2	3	1	1

المطلوب :

-باستعمال طريقة زاوية ش غ كحل ابتدائي وطريقة MODI . اوجد الحل الامثل حسب النموذج الممكن تكوينه ؟

المحور السابع

نظرية الألعاب



المحور السابع: نظرية الألعاب

1- تعريف النظرية:

تحليل رياضي يبين فيه احتمالات تضارب المصالح لطرفين أفراد أو جماعات يهدف تحديد أفضل الخيارات الممكنة للمساعدة في اتخاذ القرار المناسب في ظل الظروف المتاحة وصولاً إلى النتيجة.

ومجالات نظرية الألعاب متعددة علوم اجتماعية والسياسية والاقتصادية.. الخ

2- أهمية نظرية الألعاب:

كانت أهمية نظرية الألعاب في البدايات تكمن في الأعمال ذات الطابع العسكري ، ومع التطور التقني والمعرفي في مختلف المجالات ودخول حاسوب ، أصبحت من أهم الأدوات المساعدة لمتخذي القرار في ظل الظروف الاقتصادية المتعددة والتنافس بين مختلف القوى الإنتاجية في العالم خاصة الصناعي.

3- فروض نظرية الألعاب:

هذه النظرية تعتبر كجزء من الرياضيات التطبيقية

-مجموعة لاعبين يحاولون تحقيق احتمالية أي ربح لهم ممكناً.

• مجموعة من الحركات (استراتيجيات) الممكنة لهؤلاء اللاعبين ، أي لا يمكن كل طرف لاعب بما يمكن أن يتصرف الطرف الآخر مدخلاً ذلك في اعتباره.
-مصفوفة مدفوعات لكل توليفة أي العوائد الناتجة من اللعبة أما المقصود باللاعبين فهو اعد العناصر الرئيسية.

- الإستراتيجية هي مجموع القواعد الموضوعه للاعبين تمكن اللاعب من اختيار الموقف التنافسي الذي يناسبه.

-مصفوفة الدفع و هي مجموعة من الصفوف والأعمدة و التي تشمل على نتائج محتملة للطرفين حيث ربح الطرف الأول يمثل خسارة الطرف الآخر.
وتنطلق الفروض الأساسية من مبدأ وجود طرفين متنافسين، -إستراتيجية، -حصيلة نتائج، -عملية اتخاذ القرار مع وجود بدائل تتم المفاضلة بينهما .

4 – أشكال الألعاب:

1-الألعاب المتناسبة والألعاب غير المتناسبة :

وهي التي تكون فيها مصفوفة المدفوعات فيها ذو إستراتيجية خاصة تعتمد فقط على إستراتيجيات الآخرين الملعوبة وليس من يلعبها أي إذا تغير ذات الأشخاص اللاعبين دون تغير مصفوفة مدفوعات الإستراتيجية فاللعبة هي متناسبة . أما عندما تكون مجموعة الإستراتيجيات لدى الطرفين غير متماثلة فهذه غير متناسبة .

2-الألعاب ذات الناتج الصفري والناتج غير الصفري:

الألعاب ذات الناتج الصفري حالة خاصة من نظرية الألعاب حيث خيارات اللاعبين يمكن أن تزيد أو تنقص من مصادر ممكنة ،فالربح الكلي لطرفي اللعبة محصلتها تساوي الصفر ، حيث أن ربح طرف يكون على حساب الطرف الآخر .
أن الكثير من الألعاب المدروسة من قبل منظري الألعاب، هي من الألعاب ذات ناتج غير صفري، ليس من الضرورة ربح طرف هو ما يخسره الطرف الآخر.



4-3- الألعاب المتزامنة و المتعاقبة (غير متزامنة):

المتزامنة تكون فيها حركات اللاعبين متزامنة أي اختيار استراتيجياتهم في نفس الوقت واللحظة ، أما المتعاقبة (العاب حركية) يكون فيها الطرف الثاني متأخر ويكون على اطلاع بحركات الطرف الأول.

4-4-المعلومات التامة والمعلومات غير التامة:

طرف أول من اللاعبين على علم بالحركات التي قام بها طرف الآخر فالألعاب متتالية ومتعاقبة يمكن أن تكون العاب تامة.

4-5-الألعاب الطويلة اللانهائية: أن علماء الرياضيات لا يقرون بان الألعاب

تنتهي بعدد محدد من الحركات حيث استنتج وان الحركات لانهاية للرابح وان مصفوفة المدفوعات غير معروفة حتى تكتمل كل هذه الحركات.

5 – طرق التوصل إلى الاستراتيجيات:

أن الهدف النهائي للاستراتيجيات المختلفة هو في النهاية تحقيق أفضل وأعظم الإرباح ، والتقليل من الخسائر وهناك عدة طرق :

5-1-اللعب بأسلوب الناتج الصفري:

ويقصد بالناتج الصفري أن تكون نتيجة اللعبة النهائية صفرا حيث ربح طرف هو على حساب الطرف الآخر.

مثال توضيحي 1: لدينا لاعبان كل منهما يلعب ثلاث استراتيجيات كما يلي:

		B		
		Bs1	Bs2	Bs3
A	As1	4	-4	40
	As2	-16	0	-14
	As3	7	4	16

لتحديد أفضل الاستراتيجيات لكل منها يمكن أن نستخدم الطرق التالية:

1-طريقة أدنى الأعظم Minimax

تقوم فكرة هذا الأسلوب على تحديد أسوأ نتيجة يتوقعها الطرف الأول في ظل الإستراتيجية التي يتبعها ، وبالتالي فهو سيحاول الحصول على أفضل مايمكن من ذلك الأسوأ أي أحسن الموجود.

2-طريقة أعظم الأدنى Maxmini

تقوم فكرة هذا الأسلوب على تحديد أفضل نتيجة يتوقعها الطرف الثاني في ظل الإستراتيجية التي يتبعها، وبالتالي فهو سيحاول الحصول على أحسن الموجود من أسوء النتائج.

من خلال مصفوفة المدفوعات واضح أن الطرف الأول يركز أن تكون خسارته أدنى ما يمكن كي يقلل من ربح الطرف الثاني ما امكن وبالتالي سيختار أدنى القيم من المصفوفة لكل إستراتيجية



- من اس1 يختار 4-
 من اس2 يختار 16-
 من اس3 يختار 4
 في حين الطرف الثاني سوف يختار من استراتيجيات الثلاثة
 من bs1 يختار 7
 من bs2 يختار 4
 من bs3 يختار 40
 ويمكن تصور الجدول كما هو وارد

		B			
		Bs1	Bs2	Bs3	
A	As1	4	-4	40	4-
	As2	-16	0	-14	16-
	As3	7	4	16	4
		7	4	40	

من خلال الجدول أعلاه توجد نقطة مشتركة بين الإستراتيجيتين وهي عندما يلعب الطرف الأول الإستراتيجية As3 ويلعب الطرف الثاني الإستراتيجية Bs2 والنقطة تساوي 4 ون أي أن الطرف الأول يحقق ربح قدره 4 ون و الطرف الثاني خسارة 4 ون أي $0=4-4$ وهي نقطة توازن أو التعادل وتسمى بنقطة السرج **saddle point**

2-5- أسلوب الإستراتيجية السائدة:

والمقصود بها أن تكون إحدى الاستراتيجيات المتبعة أفضل من غيرها بالنسبة للطرفين

مثال: نفس معطيات المثال 1

بالنسبة لـ A فان As3 تسود الإستراتيجية As2 وذلك أن جميع عائداتها أفضل من عائدات الإستراتيجية As2 وبالتالي يمكن استبعاد الإستراتيجية As2 والاستغناء عنها ويصبح الجدول الجديد كما يلي :

		B			
		Bs1	Bs2	Bs3	
A	As1	4	-4	40	
	As3	7	4	16	



وبالنسبة للطرف B فان الإستراتيجية Bs2 تسود الإستراتيجية Bs3 إذن ربح 4 أفضل من خسارة 40 و خسارة 4 أفضل من خسارة 16 وفقا لـ Bs3 . وبالتالي يمكن استبعاد الإستراتيجية Bs3 من الجدول :

		B	
		Bs1	Bs2
A	As1	4	-4
	As3	7	4

3-5- الإستراتيجيات المختلطة:

هي تلك الاستراتيجيات التي لا تتحقق فيها نقطة التوازن أي الحالة التي لا تتساوى فيها أدنى الأعظم وأعظم الأدنى، وهنا يلعب اللاعب جزءا من الوقت بإستراتيجيته ويلعب الآخر جزءا من الخاصة به، فلكل طرف خطة مزيج من أكثر من الخطط، وفي هذا النوع من الخطط كل لاعب لا بد له من :

1- معرفة نسبة الوقت الذي يلعب به كل خطة على حدى والهدف المتحقق بها أو خسارة.

2- متوسط الربح أو الخسارة لكل لاعب نتيجة إتباع خطة مختلفة، ولمعرفة نسبة الوقت الذي يلعبه كل لاعب وهذه الإستراتيجية تأخذ الشكل التالي:

		B	
		Bs1	Bs2
		t_2	$1-t_2$
A	As1	V_{11}	V_{12}
	As2	V_{21}	V_{22}
		t_1	$1-t_1$

حيث t_1 و $1-t_1$ الزمن الذي يلعب فيه اللاعب الأول وفق الإستراتيجية $As1$ و $As2$ و t_2 و $1-t_2$ الزمن الذي يلعب فيه اللاعب الثاني وفق الإستراتيجية $bs1$ و $bs2$ كل لاعب يرغب باستراتيجية تعطيه أفضل كسب بصرف النظر عن استراتيجية الطرف الآخر.

مثال: في جدول الألعاب التالي للاعبين

		B	
		Bs1	Bs2
A	As1	6	3
	As2	5	7

أدنى قيم استراتيجيات A هي 3 و 5
 أعظم قيم استراتيجيات B هي 6 و 7
 1- حساب متوسط الزمن لكل منهما:
من اجل الطرف الاول A :

		B	
		Bs1	Bs2
A	As1	6	3
	t_1	t_1	t_1
	As2	5	7
	$1-t_1$	$1-t_1$	$1-t_1$

- العائد:

- إذا اختار B الإستراتيجية Bs1: $6(t_1)+5(1-t_1)$
 - إذا اختار B الإستراتيجية Bs2: $3(t_1)+7(1-t_1)$
 تساوي عائد للحالتين: $3(t_1)+7(1-t_1)= 6(t_1)+5(1-t_1)$
 من خلال حل معادلة نجد نسبة الزمن:

$$5/3=1-t_1 \text{ و } 5/2=t_1$$

من اجل الطرف الاول B :

		B	
		Bs1	Bs2
		t_2	$1-t_2$
A	As1	6	3
	t_1	t_2	$1-t_2$
	As2	5	7
		$1-t_1$	t_2

العائد:

-إذا اختار A الإستراتيجية As1: $6(t_2)+3(1-t_2)$

-إذا اختار A الإستراتيجية As2: $5(t_2)+7(1-t_2)$

تساوي عائد للحالتين: $5(t_2)+7(1-t_2)=6(t_2)+3(1-t_2)$ من خلال حل معادلة نجد نسبة الزمن:

$$5/1=1-t_2 \text{ و } 5/4=t_2$$

وبالتالي فان مصفوفة المدفوعات تصبح :

		B	
		Bs1	Bs2
		$4/5$	$1/5$
A	As1	6	3
	As2	5	7
		$2/5$	$3/5$

متوسط العائد لكل منهما:

النسبة لـ A:

هو ما يربحه من B خلال فترتي $5/2$ و $5/3$ من الوقت، فهو يربح في $5/2$ من الوقت 6 و $5/3$ من الوقت يربح 5 في الوقت الذي يلعب فيه B $5/4$ من الوقت.

و $5/2$ من الوقت يربح 3 و $5/3$ من الوقت يربح 7 في الوقت الذي يلعب فيه B $5/1$ من الوقت وما يربحه من مجموع الاثنتين يساوي

$$\text{عائد} = \frac{4}{5} \left(6 \times \frac{2}{5} + 5 \times \frac{3}{5} \right) + \frac{1}{5} \left(3 \times \frac{2}{5} + 7 \times \frac{3}{5} \right)$$

$$= \frac{4}{5} \left(\frac{12}{5} + \frac{15}{5} \right) + \frac{1}{5} \left(\frac{6}{5} + \frac{21}{5} \right) =$$



$$\frac{27}{5} =$$

النسبة لـ B :

فهو ما يخسره من B خلال فترتي $5/4$ و $5/1$ من الوقت ،فهو يخسر في $5/4$ من الوقت 6 و $5/1$ من الوقت يخسر 3 في الوقت الذي يلعب فيه A $5/2$ من الوقت .
و $5/4$ من الوقت يخسر 5 و $5/1$ من الوقت يخسر 7 في الوقت الذي يلعب فيه A $5/3$ من الوقت وما يربحه من مجموع الاثنين يساوي

$$\text{عائد} = \frac{2}{5} \left(6 \times \frac{4}{5} + 3 \times \frac{1}{5} \right) + \frac{3}{5} \left(5 \times \frac{4}{5} + 7 \times \frac{1}{5} \right)$$

$$= \frac{2}{5} \left(\frac{24}{5} + \frac{3}{5} \right) + \frac{3}{5} \left(\frac{20}{5} + \frac{7}{5} \right) =$$

$$\frac{27}{5} =$$

أن المقدار الذي يربحه A يساوي المقدار الذي يخسره B $\frac{27}{5} - \frac{27}{5} = 0$



المحور الثامن

نظرية صفوف الانتظار



المحور الثامن: نظرية صفوف الانتظار

هي أحد الأدوات الهامة في تخطيط ومراقبة العمليات الإنتاجية والمستخدمة على نطاق واسع في هذا المجال ومن الأمثلة على المشكلات التي يحتاج فيها متخذ القرار إلى الاستعانة بنظرية الصفوف ، مشكلة انتظار السيارات للإصلاح والصيانة في محطة خدمة ، مشكلة الكتب التي تنتظر دورها في الطباعة في المطبعة،مشكلة الآلات التي تنتظر دورها في الصيانة الوقائية أو الإجرائية في مصنع ما .
ويمكن الاستفادة من نظرية صفوف الانتظار في كل من التصنيع وتقديم الخدمات، ويساعد تحليل خطوط الانتظار من خلال تحليل طول خط الانتظار، ومتوسط وقت الانتظار إلى تحسين الأداء والخدمات المقدمة وتدنيه التكاليف أيضاً.

1- مفهوم وأهمية صفوف الانتظار:

1-1-تعريف صفوف الانتظار: تتكون نماذج صفوف الانتظار من معادلات وعلاقات رياضية يمكن توظيفها من أجل تحديد خصائص تشغيل (أو مقياس أداء) لخط انتظار. ومن أهم خصائص التشغيل موضع الاهتمام في نطاق خطوط الانتظار ما يلي :

- 1-احتمال عدم وجود وحدات داخل النظام .
- 2-متوسط عدد الوحدات داخل خط الانتظار .
- 3-متوسط عدد الوحدات في النظام (عدد الوحدات في خط الانتظار مضافاً إليه عدد الوحدات التي تم خدمتها).
- 4-متوسط الوقت الذي تقضيه الوحدة الواحدة في خط الانتظار .
- 5-متوسط الوقت الذي تقضيه الوحدة الواحدة في النظام(زمن الانتظار مضافاً إليه زمن الخدمة).
- 6-احتمال انتظار وحدة للحصول على الخدمة من بين الوحدات التي تم وصولها.
- 7-احتمال وجود (n) من الوحدات في النظام .

1-2- أسباب اهتمام الإدارة بصفوف الانتظار.

- هناك عدد من الأسباب التي تبرز اهتمام الإدارة بخطوط الانتظار وهي:
- 1- تكلفة تهيئة مكان الانتظار.
 - 2- احتمال فقدان مجال النشاط نظراً لمغادرة العملاء لخط الخدمة قبل حصولهم على الخدمة أو رفض الانتظار من أساسه.
 - 3- احتمال فقدان السمعة.
 - 4- احتمال انخفاض رضا العميل.
- احتمال حدوث ارتباك في بقية أعمال المنشأة و/ أو العملاء

2-التحليل الاقتصادي لصفوف الانتظار :

القرارات التي تشمل تصميم صفوف الانتظار سوف تعتمد على تقييم موضوعي لخواص عملية صف الانتظار، مثلاً المدير قد يقرر أن متوسط وقت الانتظار دقيقة أو أقل وأن وجود عميلين أو أقل في النظام يعد من الأهداف المعقولة..
من جهة أخرى قد يرغب المدير في التعرف على تكلفة عملية نظام صف الانتظار ثم يحدد القرار الخاص بتصميم النظام على أساس أقل تكلفة ممكنة للساعة أو اليوم ، قبل أن يتم عمل



تحليل اقتصادي لصف الانتظار ، يجب أن يتم القيام بنموذج لإجمالي التكلفة يشمل تكلفة الانتظار وتكلفة الخدمة .
وللقيام بعمل هذا النموذج لإجمالي التكلفة لصف الانتظار ، سوف نبدأ بتحديد الرموز المستخدمة .

Cw = تكلفة الانتظار لكل فترة زمنية لكل وحدة .

L = متوسط عدد الوحدات في النظام.

Cs = تكلفة الخدمة لكل فترة زمنية لكل قناة.

k = عدد القنوات

TCU = إجمالي التكلفة لكل فترة زمنية

إجمالي التكلفة هي مجموع تكلفة الانتظار وتكلفة الخدمة أي :

$$Tc = CwL + CsK$$

يمكن التعبير عنها بطريقة أخرى كما يلي:

التكلفة الكلية = تكلفة الانتظار + تكلفة الخدمة

التكلفة الكلية = (تكلفة الانتظار لكل وحدة × متوسط عدد الوحدات في النظام) + (تكلفة الخدمة لكل منفذ × عدد المنافذ)

لكي نقوم بعمل تحليل اقتصادي لصف الانتظار ، فإننا يجب أن نحصل على تحديدات معقولة لتكلفة الانتظار وتكلفة الخدمة ومن بين هاتين التكلفة، تكون تكلفة الانتظار هي الأصعب في التقييم ، ففي مشكلة المطعم الذي يقدم الوجبات السريعة تكلفة الانتظار لكل دقيقة ينتظرها العميل لكي يحصل على الخدمة ، هذه التكلفة ليست مباشرة بالنسبة للمطعم ، إذا تجاهل المطعم هذه التكلفة وسمح بوجود صفوف طويلة للانتظار ، سوف يحاول العملاء أن يحصلوا على الخدمة في مكان آخر ، وبالتالي سيعاني المطعم من نقص المبيعات وزيادة التكلفة .

ويمكن القول بأن الهدف التقليدي لتحليل صفوف الانتظار هو تحقيق التوازن بين تكلفة تقديم مستوى معين من طاقة الخدمة وتكلفة انتظار العملاء لحين الحصول على الخدمة ، على سبيل المثال ، إنه في حالة تزايد طاقة الخدمة تزداد تكلفتها في شكل علاقة خطية . من جانب آخر إنه كلما زادت طاقة الخدمة (عدد منافذ تقديم الخدمة) كلما انخفض عدد العملاء المنتظرين لحين الحصول على الخدمة وكلما انخفض وقت انتظارهم ومن ثم انخفض تكاليف الانتظار. وبالتالي يكون الهدف من التحليل الاقتصادي لصفوف الانتظار هو تحديد مستوى معين من طاقة الخدمة يترتب عليه انخفاض التكلفة الكلية .

3-مقاييس أداء النظام:

هناك خمسة مقاييس نوردتها بغرض تقييم نظم صفوف الانتظار وهي:

- 1- متوسط عدد العملاء المنتظرين إما في الصف أو في النظام.
- 2- متوسط زمن الانتظار للعملاء سواء في الصف أو في النظام.
- 3- معدل استغلال أو الاندفاع بالنظام، ويعبر عنه بنسبة الطاقة المستغلة .
- 4- التكلفة الخاصة بمستوى معين من الطاقة وصف الانتظار المرتبط بها .
- 5- احتمال انتظار طالب الخدمة من أجل الحصول على الخدمة .



4-أنواع نماذج صفوف الانتظار (حالة وجود عدد لا نهائي من العملاء) :

هناك العديد من نماذج صفوف الانتظار المتاحة أمام المدير للاختيار من بينها. وفيما يلي أهم أربعة نماذج والتي تفترض معظمها أن معدل الوصول يتبع توزيع (بواسون) كما تفترض أن متوسط معدل الوصول ومعدل الخدمة ثابتين ومستقرين . وهذه النماذج هي :

- 1- مركز خدمة واحد ، وزمن خدمة يتبع التوزيع الأسي.
- 2- مركز خدمة واحد ، وزمن خدمة ثابت.
- 3- عدة مراكز للخدمة ، وزمن خدمة يتبع التوزيع الأسي.
- 4- عدة مراكز خدمة مع وجود أولويات ، وزمن خدمة يتبع التوزيع الأسي

5- المعالجة الرياضية لنماذج صفوف الانتظار:

تمكن الباحثون الذين عملوا في مجال نظرية صفوف الانتظار من وضع نماذج رياضية تهدف إلى دراسة سلوك أنظمة صفوف الانتظار و تحديد مؤشراتنا بشكل سهل وسريع. ونظرا للعدد الكبير من هذه النماذج الرياضية فإننا نركز في هذه الدراسة على النماذج التي تتبع التوزيع البواسوني في عملية الوصول للوحدات، والتوزيع الأسي لأوقات الخدمة، ومن أهم المؤشرات:

μ : معدل تقديم الخدمة(كم من شخص سوف يخدم هذا العدد من الاشخاص)
 λ : معدل وصول العملاء(عدد الاشخاص لتلقي الخدمة).

L_Q :متوسط عدد الوحدات في الصف. L_S : متوسط عدد الوحدات في النظام.
 W_Q : متوسط الوقت المستغرق في الصف W_S : متوسط الوقت المستغرق في النظام
وفي صفوف الانتظار لا بد من تحقق الشرط التالي ($\lambda < \mu$)

حيث ρ هو احتمال ان يكون هذا النظام مشغول

$$\rho < 1 \quad \rho = \frac{\lambda}{\mu}$$

$$\rho_0 = 1 - \rho = 1 - \frac{\lambda}{\mu} \quad (\text{احتمال ان لا يكون النظام مشغولا})$$

-عدد الاشخاص الموجودين في النظام

$$L_S = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} = \frac{\rho}{1 - \rho}$$

-عدد الاشخاص الواقفين في الصف

$$L_q = L_S \times \rho = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} \times \frac{\lambda}{\mu} = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)}$$

- متوسط وقت الذي يمضيه الشخص في النظام

$$W_S = \frac{L_S}{\lambda} = \frac{1}{\mu - \lambda}$$



- متوسط وقت الذي يمضيه الشخص في الصف

$$W_q = \rho \times w_s = \frac{\lambda}{\mu (\mu - \lambda)}$$

مثال 1:

في ميناء لنقل البضائع كان معدل وصول السفن الى هذا الميناء 4/ساعة ومعدل تقديم الخدمة لهذه السفن هو 6/ساعة - ماهي مقاييس الاداء لهذا النظام؟

الحل:

لدينا: $\lambda = 4$ و $\mu = 6$

الشرط محقق $\mu > \lambda$

-احتمال وجود سفن في النظام $\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{4}{6} = 0.667 = 6.67\%$

-احتمال عدم وجود سفن في النظام $\rho_0 = 1 - \rho = 1 - 0.667 = 0.333 = 3.33\%$

-عدد الوحدات الموجودة في النظام $L_s = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} = \frac{4}{6 - 4} = 2$ سفينة

- عدد الوحدات الموجودة في الصف

$$L_q = L_s \times \rho = 0.667 \times 2 = 1.334 \text{ سفينة}$$

-متوسط وقت الانتظار في النظام $W_s = \frac{L_s}{\lambda} = \frac{2}{4} = 0.5 \times 60 = 30$ دقيقة

-متوسط وقت الانتظار في الصف

$$W_q = \rho \times w_s = 0.667 \times 0.5 = 0.3335 \times 60 = 20 \text{ دقيقة}$$

مثال 2:

وجدت إدارة مطعم لتقديم الأكل الطازج ان معدل الوصول عشوائي وبواقع 9 زبون/ ساعة، كما ان معدل الخدمة يتبع التوزيع الاسي وبواقع 8 زبون/ ساعة . احسب ملامح هذا النظام باستخدام صفوف الانتظار مع حساب احتمال وجود 10 اشخاص في النظام.

الحل : لدينا: $\lambda = 8$ و $\mu = 9$

الشرط محقق $\mu > \lambda$ $9 > 8$

احتمال وجود اشخاص في النظام $\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{8}{9} = 0.888 = 8.88\%$

-احتمال عدم وجود اشخاص في النظام

$$\rho_0 = 1 - \rho = 1 - 0.888 = 0.112 = 1.12\%$$



$$L_s = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} = \frac{8}{9 - 8} = 8 \text{ شخص}$$

- عدد الاشخاص الموجودين في النظام

$$L_q = L_s \times \rho = 0.888 \times 8 = 7.3 \text{ شخص}$$

- عدد الاشخاص الموجودين في الصف

$$W_s = \frac{L_s}{\lambda} = \frac{8}{8} = 1 \times 60 = 60 \text{ دقيقة}$$

- متوسط وقت الانتظار في النظام

- متوسط وقت الانتظار في الصف

$$W_q = \rho \times w_s = 0.888 \times 60 = 53 \text{ دقيقة}$$

- احتمال وجود 10 اشخاص في النظام

$$\rho_{10} = \rho^{10} \times \rho_0 = (0.888)^{10} \times 0.112 = 3.4\%$$

ملاحظة: في حالة ما يكون مقدمي الخدمة (مركز الخدمة) اكثر من مقدم خدمة واحد نفس القوانين ماعدا قانون واحد خاص بصف الانتظار

$$L_q = \frac{P^s \times \lambda \times \mu \times P_0}{(S - 1)! \times (s \times \mu - \lambda)^2}$$

:

حساب التكلفة الاجمالية

$$TC = C_s + C_q$$

حيث C_s : تكلفة الاشخاص الذين يقدمون الخدمة، و C_q : تكلفة الاشخاص في صف الانتظار

$$C_s = C_2 \times s \times t$$

حيث C_2 : تكلفة الشخص مقدم الخدمة في ساعة و s : عدد مقدمي الخدمة، t عدد ساعات العمل

$$C_q = C_1 \times t \times L_q$$

حيث C_1 ما يكلفه الشخص في صف الانتظار و L_q : احتمال وجود الاشخاص في صف الانتظار، t عدد ساعات العمل

مثال عددي:

لدينا المعطيات التالية: $\lambda = 15$ و $\mu = 25$

و $s = 2$: شخصين يقدمان الخدمة، $C_1 = 20$ دج ، $C_2 = 2$ دج/سا

معدل طبيعي للعمل هو 8 ساعات

احسب التكاليف الكلية

$$\rho = \frac{15}{25} = 0.6 \text{ لدينا}$$



$$L_q = \frac{(0.6)^2 \times 15 \times 25 \times 0.5385}{(2-1)! \times (2 \times 25 - 15)^2} = 0.06 = 6\%$$

قيمة الاحتمال 0.5385 تم استخراجها من جدول توزيع عند درجة 2 واحتمال 0.6

$$C_q = 20 \times 8 \times 0.06 = 9.6 \text{ دج}$$

$$C_s = 2 \times 2 \times 8 = 32 \text{ دج}$$

$$TC = 32 + 9.6 = 41.6 \text{ دج}$$



المحور التاسع

تسيير المخزون



المحور التاسع : تسيير المخزون

1- تعريف تسيير المخزون :

تسيير المخزون يعني العمل بطريقة تجعل من المخزن قادر على تلبية طلبيات الزبائن أو المستعملين للمواد المخزنة وهذا في كل الأوقات، السير الجيد يعني أيضاً أن المخزون يلبي الاحتياجات في ظل ظروف اقتصادية وعقلانية.

حيث أن مضمون الإشكالية هو أن حجم المخزون من أي صنف ليس ثابتاً بل هو متغير، فعند وصول الطلبية يزداد حجم المخزون من الصنف، ثم يبدأ بالتناقص نتيجة السحب منه لمواجهة طلب الإنتاج (أو البيع). لذا فإن حجم المخزون يرتبط تماماً بسياسة الشراء ولذلك فإن المهم في عملية السيطرة على المخزون. أن يتبلور عن سياسة المؤسسة نحو شراء الصنف ما يلي :

- توقيت شراء الصنف أو توقيت طلبه؛
- حجم الطلبية الواحدة.

أي أن رسم سياسة الشراء تتلخص في الإجابة عن سؤالين :

- متى تتم عملية الشراء، وكيف يمكن تحديد مواعيد طلب الكميات الجديدة؟ - كم نشترى في كل مرة؟

أما العوامل التي تؤثر في عملية السيطرة على المخزون فهي :

- سرعة السحب من الصنف أو معدل بيعه؛
- طول فترة الانتظار بين تاريخ الأمر بالطلبية الجديدة وتاريخ وصولها؛
- موسم ظهور الصنف؛
- احتمالية تغير أسعار الصنف؛
- سرعة تلف الصنف.

2- إيجابيات وسلبيات المخزون :

1- إيجابيات المخزون :

- يمكن إبراز أهم الإيجابيات لعملية التخزين التي تقوم بها المؤسسة في النقاط التالية:
- الاحتياط للندرة، حيث يتم تكوين المخزون احتياطاً لحدوث ندرة، وكذلك للمضاربة؛
- ضمان استهلاك منتظم من مادة ما، مما يؤدي إلى انتظام إنتاجها؛
- الاستفادة من تخفيض الأسعار عند الشراء بكميات كبيرة، لذا يتوجب تكوين مخزون للاستفادة من هذه الوضعية؛
- لضرورة النقل، حيث لا تستطيع المؤسسة استلام كميات صغيرة من منتج معين، بل التسليم يتم بحمولة كاملة أو شاحنة كاملة هنا يستوجب تكوين مخزون لتخزين الكمية الفائضة؛

- يتم تكوين المخزون للاحتياط من عمليات الإستهلاك التي عادة ما تكون ثابتة؛
- يتم تكوين المخزون للاحتياط من عدم انتظام عمليات التسليم؛
- يتم تكوين المخزون عندما يفوق الإنتاج الإستهلاك.

2- سلبيات المخزون :

عملية التخزين التي تقوم بها المؤسسة تصاحبها عدة اخطار محتملة منها :



- أولها ترجع إلى قابلية التلف لبعض المواد المخزنة؛ - تجميد جزء معتبر من الأموال على شكل سلع غير مباعة، وهو ما يؤدي إلى تسجيل خسائر في المحاسبة والحل الوحيد هو بيعها بتخفيضات معتبرة؛ - إنقطاع المخزون، وهو أحد سلبيات عملية التخزين وهو ما يؤدي إلى فقدان زبائن (التجار والمؤسسات) أو توقف عملية الإنتاج.

3- مفهوم الوظيفة التخزينية:

يتوقف النمو المنتظم للمنشآت (صناعية أو تجارية) على الانسياب المنتظم لاحتياجات الإنتاج والبيع بصورة سلسلة اقتصادية بالحجم المناسب وفي الزمن المناسب بما يضمن عدم حدوث ضياع في طاقة الإنتاج أو البيع المتاحة للمنشأة.

3-1- تحليل وظيفة التخزين :

3-1-1 سياسة التخزين:

وهي مرحلة تتميز برسم سياسات التخزين، و قد يتولى القيام بها جهاز التخزين في حالة المؤسسات التجارية بالتعاون مع مصلحة البيع وبإشراف مدير عام المؤسسة، ويمكن أن يشترك في ذلك عدة مصالح أخرى مثل الإنتاج والتخطيط في حالة المؤسسات الصناعية.

أ- مرحلة الإعداد للمخزون :

في هذه المرحلة يتم تحديد حجم المخزون المناسب لكل فئة من الفئات السلعية ولكل صنف على حدة، للتأكد من أن ذلك يتناسب مع حجم المساحة المخصصة للتخزين وكذلك الجوانب الاقتصادية للنشاط. ويجب التحقق من ان سياسات التخزين وما ينتج عنها من سياسات الشراء ستجعل تكلفة التخزين عند أدنى حد ممكن مع توافق ذلك مع أقتصاديات السحب من المخازن والإرتباط بظروف السوق والإنتاج.

ب- مرحلة الحصول على المخزون :

عندما تقترب وظيفة التخزين من التفاعل مع وظيفة الشراء حيث نجد ضوابط طلب المواد، وأهمية التعرف الفوري والصحيح على الأرصدة الفعلية للمخزون لأنه سيتم طلب المواد بناء على وصول رصيد المخزون من نوع عنصر إلى مستوى معين. في هذه المرحلة يتم استلام الأصناف طبقاً للضوابط الصحيحة المنظمة لعملية الاستلام سواء خصص مخزن مستقل للاستلام المبدئي أو لم يخصص، وضوابط الاستلام هي استلام الأصناف التي تم طلبها من طرف المؤسسة، بالكميات المطلوبة و في التوقيت المناسب وبالسعر المنفق عليه مسبقاً. ومن الأهمية في هذه المرحلة الدقة في استلام الأصناف، مع استخدام وحدة القياس المناسبة والتي تحدد في ضوئها وحدة السحب.

ج- مرحلة حفظ المخزون :

نتأكد في هذه المرحلة من توفير المكان المناسب وشروط الحفظ الخاصة بالسلعة وملائمة أساليب المناولة لهذه السلعة بمعنى أن تضع السلعة في المكان المناسب، و يجب مراعاة طبيعة السلعة في مرحلة حفظ المخزون من حيث المكان المناسب للتخزين وكفاية السلعة المخزنة وفي استخدام أساليب المناولة والسحب الخاص بها ومراعاة التوقيت المناسب لسحبها.

في هذه المرحلة يستطيع أمين المستودع ان يتعرف على طبيعة المادة التي يتعامل معها بحيث يمكنه أن يصحح الكثير من الإجراءات والأساليب التي يتبعها في حفظ المواد تداولها وطلبها.

3-1-2- مظاهر التخطيط والتنظيم السيئ للمخازن

- هناك عدد من المظاهر التي إذا لاحظتها في مخازنك يجب عليك إعادة النظر في طريقة التنظيم وهذه تعتبر علامات خطر يجب التنبيه إليها ومن أهم هذه المظاهر:
- تكدس للمواد دون نظام أو ترتيب داخل المخازن، مما يعوق عملية الوصول إليها أو فصلها وفرزها وتوزيعها؛
 - صرف المواد الواردة حديثاً وترك المواد القديمة أي عدم أماكن تطبيق مبدأ الوارد أولاً. والذي يترتب على عدم تطبيقه تقادم أو تلف المواد؛ - تعرض المواد للتلف عند استخدامها وتوزيعها؛
 - تلف بعض المواد بسبب تخزينها مجاورة للمواد الأخرى تؤثر عليها؛
 - سوء استخدام المساحة المتوفرة سواء الأرضية أو الفراغ العلوي؛
 - تعطل وسائل المناولة والنقل الداخلي أو عدم توافرها أصلاً؛
 - ارتباك العاملين في المخازن وحوادث خطأ في العدد والوزن والجرد؛
 - تكرار تعرض المخازن للحرائق والحوادث لعدم توافر وسائل الأمن والوقاية؛
 - إهمال التنسيق والاتصال المنتظم مع الأقسام والجهات المتعاملة مما يؤدي إلى سوء توقيت التوزيع والاستلام، الأمر الذي يشجع الفوضى في المخزن ولا يتيح للعاملين به فرصة التنظيم والترتيب للأصناف؛
 - عدم تحديد أماكن خاصة لكل صنف من الأصناف في المخزون واختلاط الأصناف بعضها ببعض؛
 - صعوبة القيام بعمليات الجرد الدورية أو المفاجئة لصعوبة حصر الأصناف.

3-2-3- كلفة حيازة المخزون:

- تتضمن تكلفة التخزين على التكاليف الجزئية التالية:
- تكلفة التأمين (ضد الحريق، السرقة) عادة ما تكون في حدود 1%؛
 - تكاليف تسيير المخازن وتتضمن أجور العمال، اهتلاكات سائل الرفع والمباني إذا كانت ملك للمؤسسة وقيمة التأجير إذا كانت ليست ملك للمؤسسة، استهلاك الماء والكهرباء؛
 - تكلفة خطر الفساد والتلف
 - تكلفة الأموال المستثمرة، على الأقل بنسبة الفوائد إذا كان المخزون ممون من استثمارات أجنبية (قروض بنكية مثلاً)، وكذلك يجب أخذ في عين الاعتبار نسبة المردودية لأموال المؤسسة في حالة ما إذا كان المخزون ممون من أموال المؤسسة. ويصعب تحديد هذه التكاليف عملياً لذلك تلجأ المؤسسات في غالب الأحيان إلى التعبير عنها بالنسبة المئوية من المخزون المتوسط، هذه التكلفة قد تصل من 15% إلى 20%.
 - ترتبط تكلفة التخزين بحجم السلع والمواد المخزنة وكذا مدة تخزينها (مدة بقاءها في المخازن)، ويشير الرمز إلى تكلفة تخزين وحدة واحدة ولمدة زمنية واحدة (يوم، أسبوع، شهر، سنة،...).

4- نماذج تحديد الكمية الاقتصادية للطلب في ظروف اليقين:

- في نظام المخزون المستمر عندما يصل المخزون إلى مستوى محدد يعرف بنقطة إعادة الطلب يتم إصدار أمر بحجم ثابت والطريقة الأكثر استخداماً في تحديد حجم الأمر في النظام المستمر هو نموذج حجم الأمر الاقتصادي (نموذج الكمية الاقتصادية) ووظيفة



هذا النموذج تتمثل في تحديد حجم الأمر الأمثل الذي يسمح بتخفيض إجمالي تكاليف المخزون وتوجد عدة صيغ وتختلف باختلاف الفرضيات التي توضع عن نظام المخزون، ويعود الفضل لأول استنتاج لهذا النموذج إلى الباحث (Ford Haris 1915) من مؤسسة (Wisinghouse) حيث حدد معادلة أقل مجموع تكاليف المخزون وتكاليف الإعداد بافتراض أن الطلب معروف وثابت وأن معدل الإنتاج أعلى من هذا الطلب، لكن أغلب الباحثين ينسبون هذا النموذج إلى الباحث (Wilson) الذي قام بنشره 1930 بطريقة مستقلة ودون أن يكون على علم بنتائج الباحث (Ford Haris).

4-1-1- النموذج القاعدي لـ (Wilson)

يعتبر هذا النموذج أساس كل صيغ النماذج الأخرى وقدم من قبل الباحث (Wilson)

4-1-1-1- فرضيات النموذج:

- أهم الفرضيات التي بني على أساسها النموذج:
- المؤسسة تقوم بتسيير مخزون مادة واحدة فقط
- الطلب على هذه المادة ثابت ومعروف-
- مهلة الإستلام معروفة وثابتة
- لا يوجد مخزون أمان
- سعر المادة ثابت وغير مرتبط بحجم الطلبية
- عند وصول المخزون إلى نقطة إعادة الطلب يتم الطلب في كل مرة
- لا يوجد مرجعات سواء عند الإستلام أو البيع
- إستلام الكمية المطلوبة يكون دفعة واحدة

4-1-2- ثوابت ومتغيرات النموذج:

أ- الثوابت:

- تكلفة الإرسال الوحدوي للطلبية هي: C_L
- تكلفة الحيازة وهي: C_p
- معامل الحيازة i وهو عبارة عن نسبة مئوية من قيمة المخزون المتوسط.
- السعر الوحدوي للمادة (تكلفة تخزين الوحدة) وهو: u
- الطلب المتوسط خلال مدة التخزين (عادة ما تكون سنة) هو: D

ب- المتغيرات:

الكمية المثلى لطلبية: Q^* ، العدد الأمثل للطلبات: n^* . والذان يخفضان التكلفة الإجمالية لتسيير المخزونات إلى أدنى مستوى ممكن.

4-1-3- تدنية التكاليف:

من الممكن الآن تفسير التكاليف حيث Q^* هي التكلفة الإجمالية لتسيير المخزون، وهي عبارة عن مجموع تكلفة إرسال الطلبية، وتكلفة الحيازة، ويجب حساب تكلفة الحيازة على أساس المخزون المتوسط وليس على الكمية المطلوبة، ويمكننا التعبير عن CT بواسطة Q أو n حيث:

$$CT(Q) = C_L + C_p = \left(\frac{D}{Q}\right)C_L + 1/2 QUi$$

ولتدنية التكاليف الإجمالية المعبر عنها بدلالة كمية الطلب Q ، نبحث عن نقطة تساوي C_L مع C_p (أي نبحث عن النهاية الحدية الصغرى لمنحنى التكلفة الإجمالية بالنسبة لكمية الطلب Q مساويا للصفر. $\frac{\delta CT}{\delta Q}(Q)=0$).

$$CT(Q) = -\frac{D}{Q^2} C_L + 1/2 U_i = 0$$

$$Q^* = \sqrt{\frac{2C_L D}{U_i}}$$

هذه الكمية المثلى سوف نسميها الكمية الاقتصادية للطلب (EOQ) أو كمية Wilson ومنها يمكن حساب العدد الأمثل للطلبات

$$n^* = \frac{D}{Q^*} = \sqrt{\frac{D U_i}{2C_L}}$$

مثال تطبيقي :

افترض ان مصنع يحتاج إلى 2000 جزء صغير خلال العام القادم ، سعر الوحدة الواحدة \$ 5 ، فاذا كانت كلفة اصدار الطلبية الواحدة \$ 5 وكلفة الاحتفاظ بالمخزون خلال السنة الواحدة \$ 2 . فما هو حجم الطلبية الاقتصادية حتى تكون كلفة التخزين في حدها الأدنى .
-وماهو العدد الأمثل للطلبات خلال السنة .

الحل:

$$U_i = 2\$ \quad ; \quad C_L = \$5 \quad ; \quad D = 2000 \text{ وحدة}$$

1- حجم الطلبية الاقتصادية :

$$Q^* = \sqrt{\frac{2C_L D}{U_i}} = \sqrt{\frac{2(2000)5}{2}} = 100 \text{ وحدة}$$

2- تكلفة التخزين :

$$CT(Q) = C_L + C_p = \left(\frac{D}{Q}\right) C_L + 1/2 Q U_i$$

$$CT(Q) = \left(\frac{2000}{100}\right) 5 + 1/2 (100)(2) = 200\$$$

4-1-4-ضعف ونقائص نموذج wilson:

على الرغم من اتساع استخدام هذا النموذج إلا أن هناك مجموعة انتقادات وجهت له أهمها- :وجود عدد من الفرضيات الغير واقعية يستند عليها النموذج لكن يمكن تجنب هذه السلبية ببناء نماذج رياضية أكثر تعقيدا وتحتاج أيضا لحسابات معقدة ولذلك فالهدف هو

الوصول إلى نقطة توازن بين تحسين جودة النتائج التي يتم الحصول عليها من النموذج وبين الجهود اللازمة لبناء تلك النماذج والحصول على نتائج جيدة منها
-أما الانتقاد الآخر فهو عندما تكون تكلفة إعداد وتجهيز الدفعة الإنتاجية عالية مما يدفع المؤسسات إلى إنتاج دفعات كبيرة لاحتواء التكاليف وهو ما يزيد في تعقيد جدولة الإنتاج وزيادة الحاجة إلى مساحات أكبر للتخزين وزيادة وقت التأخر قبل تسليم البضاعة للعملاء كما يزيد حجم رأس المال المستثمر في المخزون، وهذه المشكلات يمكن تجنبها بافتراض قيمة عالية لتكلفة الاحتفاظ بالمخزون والسماح بإنتاج دفعات صغيرة وهذا يسمح بوجود نوع من التوازن بين الأهداف المتعارضة

-قد يقترح النموذج قيمة كسرية لأشياء لا يمكن إنتاجها بقيم كسرية

-قد لا يتمكن الموردون من تجزئة بعض العبوات النمطية الحج

4-2- نموذج التدفق المستمر :

افترضنا في النموذج السابق بان استلام الكمية المطلوبة يكون دفعة واحدة ولكن يحدث ان تكون وتيرة الإنتاج بطيئة مقارنة مع وتيرة الادخال وهذا ما يؤدي الى حدوث كساد في المخزون بشكل دائم.

او يكون معدل الإنتاج اكبر من معدل الطلب مما يؤدي الى حدوث انقطاع في المخزون بشكل دائم ولحل هذا الإشكال يفترض نموذج التدفق المستمر بان استلام الكميات المطلوبة ، يكون وفق وتيرة مستمرة (E) اذن فالكميات المستلمة وفق الوتيرة (E) تكون من خلال المدة (Q/E)

اما المخرجات من المخزون فتكون بوتيرة (S) لكمية مساوية إلى (SQ/E) فمستوى المخزون اذن لا يصل الى الكمية Q لكن إلى الكمية

$$Q - \frac{SQ}{E} = Q \left(1 - \frac{S}{E}\right)$$

والكمية المتوسطة في المخزون ليست هي $\frac{Q}{2}$

$$\frac{Q}{2} \left(1 - \frac{S}{E}\right)$$

وبالتالي تكون التكلفة الإجمالية هي:

$$CT(Q) = \frac{D}{Q} CL + \frac{Q}{2} \left(1 - \frac{S}{E}\right) \times U_i$$

ومن ثم فإن :

$$Q^* = \sqrt{\frac{2D CL}{\left(1 - \frac{S}{E}\right) U_i}}$$

اي

$$Q^* = \sqrt{\frac{2D CL}{U_i}} \sqrt{\frac{E}{E - S}}$$



4-3- نموذج تجميع الطلبيات (المجمعة):

نستطيع في غالب الأحيان تخفيض التكاليف الإدارية، أو تكاليف النقل بواسطة تجميع عدد من الطلبيات لمواد مختلفة، والموجهة لمورد واحد في نفس التاريخ. ويبحث هذا النموذج عن العدد المثالي للطلبات الموجهة للمورد.

لدينا U_e : التكلفة الوحديّة للمادة (e)، حيث تتغير (e) من 1 إلى n
i: معامل الحيازة، ويفترض انه نفسه بالنسبة لكل المواد.

D_e : الطلب خلال فترة للمادة (e)

C_{Lg} : تكلفة إرسال الطلبية المجمعة

N_g : عدد الطلبيات المجمعة خلال فترة

وتكتب التكلفة الإجمالية بواسطة عدد الطلبيات المجمعة كما يلي:

$$CT(N_g) = N_g C_{Lg} + \frac{1}{2N_g} \sum_{e=1}^n D_e U_e$$

وبنفس طريقة
الحل المعتمدة في
نموذج Wilson
نحصل على:

$$N_g^* = \sqrt{\frac{i \sum_{e=1}^n D_e U_e}{2C_{Lg}}}$$

وهو العدد الأمثل

للطلبات المجمعة خلال الفترة، أما الكميات الاقتصادية المثلى المطلوبة لكل مادة من المواد المجمعة (e=1.2.3.....n)

$$Q_e^* = \frac{D_e}{N_g^*}$$

ويمكن توضيح هذا النموذج أكثر من خلال استعراض المثال التالي:

الطلب السنوي على التوالي هو: 600 . 1200 . 300

والتكاليف الوحديّة هي على التوالي: 100 . 20 . 50

تكلفة إرسال الطلبية هي نفسها لكل مادة في إطار الطلب المجمع وتساوي 120 ون، ومنه تكلفة الإرسال الإجمالية هي 360 ون. أما معامل الحيازة هو 25% في السنة ونتحصل على:

$$N_g^* = \sqrt{\frac{0.25[(300 \times 50) + (1200 \times 20) + (600 \times 100)]}{2(3 \times 120)}} = 6$$

$$Q_1^* = \frac{300}{6} = 50$$

$$Q_3^* = \frac{600}{6} = 100$$

$$Q_2^* = \frac{1200}{6} = 200$$



قائمة المراجع



قائمة المراجع المعتمدة:

1-المراجع باللغة العربية:

- العبد جلال ابراهيم، استخدام الأساليب الكمية في اتخاذ القرارات الإدارية، دار الجامعة الجديدة للنشر، مصر، 2004
- العبيدي محمود ، بحوث العمليات في منظمات الاعمال ، دار الوراق ، عمان، 2004
- الجواد دلال صادق والفتال حميد ناصر، بحوث العمليات، دار اليازوري، عمان، الاردن، 2008.
- أديب كولو ، بحوث العمليات:التقنيات الكمية في الادارة، الطبعة الرابعة، دار النشر الطربين، دمشق، 2014
- اسماعيل جمعة(واخرون)،بحوث العمليات في اتخاذ القرارات،الدار الجامعية للنشر والتوزيع، الاسكندرية، 2003
- إسماعيل السيد، الأساليب الكمية في مجال الأعمال، الدار الجامعية، الإسكندرية، 2001
- برهان محمد(واخرون)،بحوث العمليات، الطبعة الثانية منشورات جامعة القدس المفتوحة، عمان، 2004
- حسن شرقي، نظرية القرارات الإدارية: مدخل كمي في الإدارة، ط 1 ، دار المسيرة للنشر والتوزيع والطباعة، عمان، 1997
- حسن ياسين طعمه ، بحوث العمليات ، دار الصفاء ، عمان ، 2009
- حسين السامرائي ، الأساليب الكمية ، دار الهلال للنشر ، عمان ، 1997
- كعبور محمد محمد، أساسيات بحوث العمليات : نماذج وتطبيقات، أكاديمية الدراسات العليا، طرابلس، 2005
- ماضي محمد توفيق، إدارة و ضبط المخزون، الدار الجامعية، الإسكندرية، 1998
- محمد صالح حناوي، محمد توفيق ماضي، بحوث العمليات في تخطيط ومراقبة الإنتاج، الدار الجامعية، الإسكندرية، 2006
- محمد الطراونة ، سليمان عبيدات ، مقدمة في بحوث العمليات أساليب وتطبيقات، 1998
- محمد نور قوته ، سعود محمود مندورة، بحوث العمليات وتطبيقاتها في القرارات الإدارية ، الطبعة الأولى، مطابع الشرق الأوسط، جدة.
- محمد راتول، بحوث العمليات، الطبعة الثانية، ديوان المطبوعات الجامعية، الجزائر، 2006
- مؤيد الفضل ، الأساليب الكمية ، دار مجدلاوي ، عمان، 2004
- منعم الموسوي، الاساليب الكمية و بحوث العمليات في الإدارة، دار زهران للطباعة والنشر، عمان، 2006



-مصطفى محمد محمود، إدارة المخزون والمواد : مدخل كمي، دار صفاء، عمان، الأردن، 2003.

- نجم عبود نجم ، مدخل إلى الأساليب الكمية ، مؤسسة الوراق للنشر ، عمان ، 2003 ،
-فائلة اليمين، إدارة المخزون باستخدام التقنيات الكمية الحديثة لتخفيض التكاليف، ايتراك،
القاهرة، مصر، 2008

-قرياقص رسمية زكي وحنفي عبد الغفار، الإدارة الحديثة في إدارة الإمداد والمخزون، الدار
الجامعية، الإسكندرية، مصر، 2004

-سليمان محمد مرجان، بحوث العمليات، ط 1 ، دار الكتب الوطنية، ليبيا، 2002
-سهيلة عبد الله سعيد، الجديد في الأساليب الكمية وبحوث العمليات، دار الحامد، عمان،
2007

-شفيق ، بحوث العمليات، الطبعة الأولى ، دار المناهج ، 2006 .
-الالوسي عبد الستار احمد محمد، أساليب بحوث العمليات: الطرق الكمية المساعدة في
اتخاذ القرار، دار القلم، دبي، الإمارات العربية المتحدة، 2002.

2-المراجع باللغة الأجنبية:

- Anderson D-J. Sweeney & T.A- Williams , Quantitative Methods for Business , southern , Australia , 2001 .

- Anderson , An Introduction to Management science , Ohio, south western, 2003.

-B- Render & R.M . stair M.E. Hanna, Quantities Analysis for Management, th edition , Prentice Hall , Inc ,2003 .

-C. Rama Gopal, Accountig For Management, New Age International (P) Ltd,New Delhi, 2009.

N.Suresh, S. Anil Kumar, Production and Operations management , Second Edition, New Age International (P) Ltd, New Delhi, 2008

-Philippe Berne, la rotation des stocks dans les magasin, Chtard et associes, paris, 1989.

- Taha H.A, **Operations Research** , Prentice Hall Newlersey .1997
- Hillier lieberman, **Introduction to the operations research**, Published by McGraw –hill, Eighth Edition. 2005
- Hillier Lieberman, **Introduction to Operations Research**, Seventh Edition, The McGraw Companies, USA, 2001.
- R. Anderson , **An Introduction to Management science** , Ohio, south western, 2003