المحتـــــــويات

تمهيد:

ان دراسة الاقتصاد القياسي جزءا أساسيا لكل المهتمين و الدارسين للاقتصاد، وهذا لكون أهمية الاقتصاد التطبيقي في تزايد مستمر بالاضافة الى أن تقدير وتقييم نظريات وفرضيات الاقتصاد يشكل الآن أكثر من أي وقت مضى ضرورة حتمية .

قد توحي النظرية الاقتصادية بأن هناك علاقة بين اثنين أو أكثر من المتغيرات الاقتصادية، و لكن الاقتصاد التطبيقي يتطلب منا أدلة على وجود هذه العلاقة في الحياة اليومية، وتقدير نوع العلاقة بين المتغيرات. تعرف دراسة الطرق التي تمكننا من تحديد العلاقات الاقتصادية باستخدام البيانات بالاقتصاد القياسي.

يعني الاقتصاد القياسي Econometric حرفيا وسيلة "القياس للاقتصاد" و يشمل في جوهره الاقتصاد القياسي تلك الأساليب الإحصائية والرياضية التي تستخدم في تحليل البيانات الاقتصادية؛ يتمثل الهدف الرئيسي من استخدام هذه الأدوات الإحصائية والرياضية هو محاولة إثبات أو رفض أطروحة اقتصادية معينة أونماذج معينة.

الفصل الأول
كيفية بناء النموذج القياسي

تطلب عملية بناء النموذج القياسي اتباع مجوعة من المراحل، هذا ما ستنطرق اليه في المرحلة الأولى من هذا الفصل، ثم نتطرق الى كيفية معرفة نوعية المعطيات المستعملة وكيفية تحديد هيكلها وكيفية التعامل معها.

1-1-مراحل تطبيق الاقتصاد القياسي :

يتمثل تطبيق الاقتصاد القياسي في الممارسة دائما (أو ينبغي على الأقل أن تكون كنقطة انطلاق نموذج أو نظرية اقتصادية. ويمكن تلخيص المراحل فيمايلي :

المرحلة الأولى: صياغة نموذج اقتصادي قياسي يمكن استخدامه في شكل قابل للاختبار.

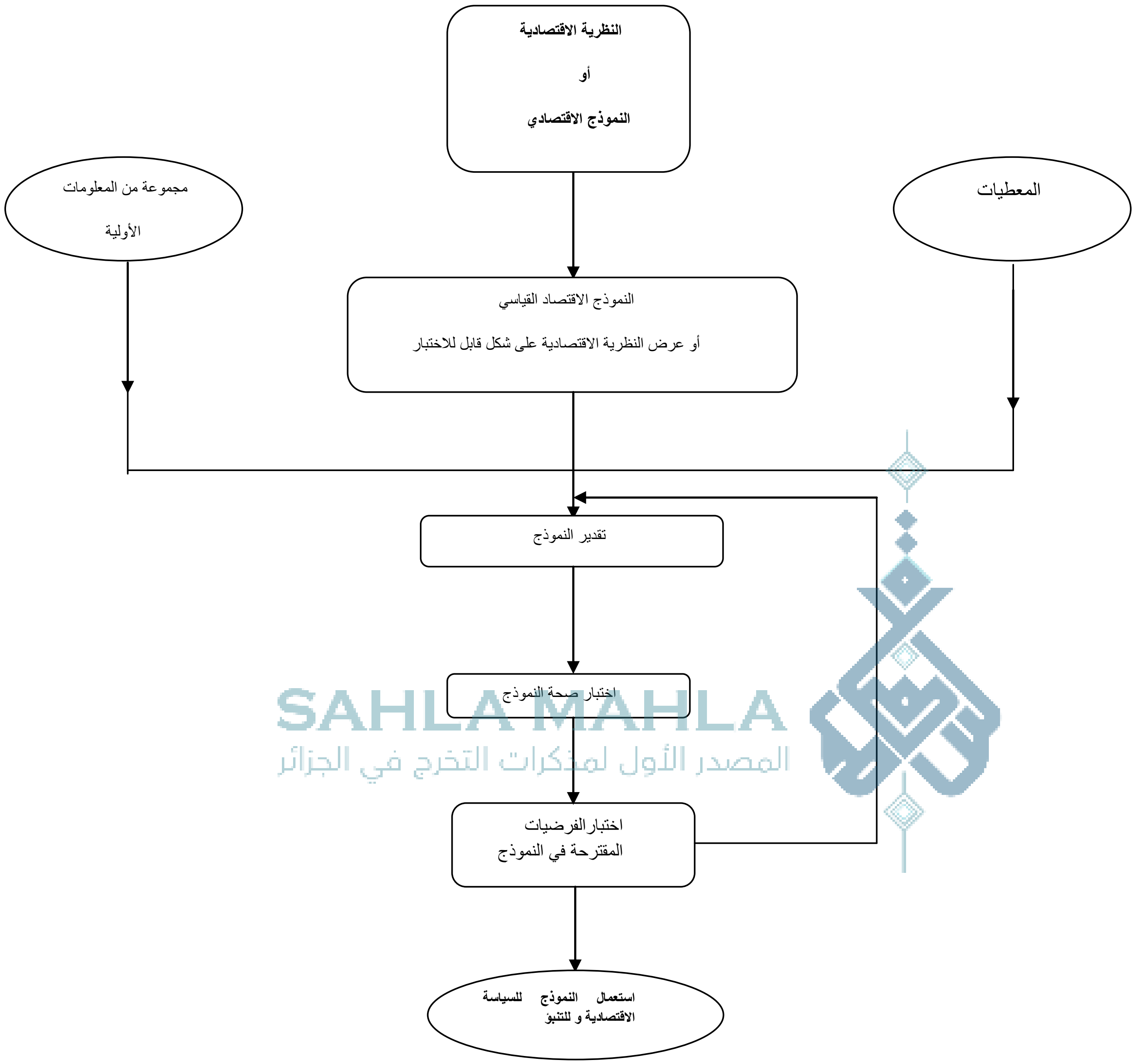
المرحلة الثاني : جمع البيانات التي تمكننا من استخدامها لأداء الاختبارات بالاضافة الى المعلومات الأولية

المرحلة الثالثة : تقدير النموذج.

المرحلة الرابعة: إجراء اختبارات للتأكد من أن النموذج المستخدم هو المناسب، وكذلك فحص التشخيصي من أجل التحقق من الأداء ودقة إجراء التقدير.

المرحلة الخامسة: تطبيق اختبار الفرضيات من أجل اختبار صحة التنبؤات النظرية ، ومن أجل استخدام هذا النموذج للقيام بالتوصيات المتعلقة بالسياسة العامة.

المرحلة السادسة: إذا ما تبين أن اختبارات النموذج المستخدم غير مناسبة سوف نضطر إلى العودة إلى مرحلة صياغة النموذج الاقتصاد القياسي وتنقيحه، وتكرار الإجراء بأكمله من البداية.



الشكل 1.1: مراحل الاقتصاد القياسي التطبيقي

1-2- هيكل المعطيات الاقتصادية:

تأتي البيانات الاقتصادية في أشكال مختلفة وعليه يجب معرفة نوع البيانات التي بحوزتنا من أجل تطبيق التقنية القياسية المناسبة، ويمكن تصنيف المعطيات الاقتصادية في ثلاثة أصناف: المعطيات المقطعية، المعطيات الزمنية و المعطيات الطولية.

1-2-1-المعطيات المقطعية(Cross-Sectional data)

تتمثل هذه المعطيات في مجموعة من عينة أفراد، عائلات ، مؤسسات ، بلدان ، مناطق، مدن أو أي وحدات في نقطة من الزمن و غالبا ماتكون هذه المعطيات للوحدات غير مأخوذة في نفس النقطة من الزمن مثلا سبر للأراء SURVEY فانه يتم خلال عدد من الأيام خلال شهر وعليه في هذه الحالة يمكن اهمال الزمن المختلف الذي تم فيه الحصول على المعطيات وبتالي يمكن النظر اليها كمعطيات مقطعية.

يرمز عادة للمتغيرات المقطعية بـ i ، مع أخذ القيم1 ,2 ,3,.....,N؛ من أجل N عدد مقطعي؛ على سبيل المثال نضع Y لتمثيل الدخل الذي تم جمعه لـ N فرد من هذه المتغيرة، يرمز للهيكل المقطعي لهذه المتغيرة بـ:

Y_i من أجل $i=1,2,3,....,N$

تستعمل المعطيات المقطعية كثيرا في الاقتصاد و العلوم الاجتماعية الأخرى، ويربط تحليل المعطيات المقطعية أساسا بتطبيقات الاقتصاد الجزئي(اقتصاد العمل labour economics ، الدولة و المالية العمومية المحلية state and local public finance، اقتصاد الأعمال business economics، الاقتصاد الديمغرافي و اقتصاد الصحة) وهي بصفة عامة المجالات المستعملة داخل الاقتصاد الجزئي؛ و هي تمثل (المعطيات للأفراد ، العائلات، المؤسسات، المدن و المناطق معطات في نقطة من الزمن) وهي تستعمل في هذه الحالة من أجل اختبار فرضيات الاقتصاد الجزئي و تقدير السياسات الاقتصادية.

2-2-1-المعطيات الزمنية Time series data

تتمثل المعطيات الزمنية أو ما يسمى بالسلاسل الزمنية في مشاهدة متغيرة أو العديد من المتغيرات خلال الزمن. وعليه المعطيات الزمنية مرتبة زمنيا ويمكن أن يكون لها تكرار زمني مختلف(سداسية، سنوية، فصلية، شهرية، اسبوعية، يومية و بالساعة)، على سبيل المثال السلاسل الزمنية المتعلقة بالأسهم Stock prices، الدخل الوطني الخام GDP، عرض النقود، بيع المثلاجات الى غير ذلك .

يرمز للمعطيات الزمنية بـ t. وعليه على سبيل المثال، اذا y ترمز الى GDP لبلد ما من 1990 الى 2002، نرمز لها بـ :

Y_t من $t=1,2,3,....,T$

اين t=1 لـ 1990 و t=T=13 لـ 2002

ان خصوصية السلاسل الزمنية تجعلها صعبة التحليل مقارنة بالسلاسل المقطعية، هذا يعني أن معظم السلاسل الزمنية الاقتصادية مرتبطة بماضيها القريب؛ غير انه أغلب

مراحل الاقتصاد القياسي يمكن أن تطبق على المعطيات المقطعية و الزمنية، بيد انه في هذه الأخيرة تتطلب تدقيق اكثر للقيام بها لتحديد النموذج القياسي الملائم؛ بالاضافة الا ذلك السلاسل الزمنية الاقتصادية تعرض اتجاه عام خلال الزمن مما ادى بالاقتصاد القياسي الجديد بأخذ بعين الاعتبار هذه الخصائص؛ وعادة ما نربط استعمال السلاسل الزمنية بتطبيقات الاقتصاد الكلي.

1-2-3-المعطيات الطولية Panel Data-

تتمثل هذه الأخيرة في سلاسل زمنية لكل فرد من المعطيات المقطعية على سبيل المثال يمكن أخذ مبيعات لمجموعة من العمال خلال خمس سنوات. ويمكن كذلك لمعطيات بانيل جمعها على اساس جغرافي مثلا الدخل القومي لـ 20 دولة لفترة 20 سنة.

يرمز للمعطيات الطولية باستعمال كل من i و t المستعملة سابقا لكل من المعطيات المقطعية و الزمنية على التوالي لكون المعطيات الطولية لها كل من البعد المقطعي و الزمنية و نرمز بالدخل القومي Y لمجموعة من الدول في فترة من الزمن كمايلي :

Yit من أجل t=1,2,3,...,T و i=1,2,3,....,N

من اجل فهم هيكل المعطيات الطولية ، لنعتبر المعطيات المقطعية و السلاسل الزمنية والتي تكتب على شكل مصفوفي كمايلي :

$$y_t^{Algerie} = \begin{pmatrix} y_{1990} \\ y_{1991} \\ \vdots \\ \vdots \\ y_{2002} \end{pmatrix} ; y_i^{1990} = \begin{pmatrix} y_{Algerie} \\ y_{Maroc} \\ \vdots \\ \vdots \\ y_{Jordanie} \end{pmatrix}$$

هنا $y_t^{Algerie}$ هو الدخل القومي للجزائر للفترة 1990 الى 2002 و y_i^{1990} هو الدخل القومي y للسنة 1990 لمختلف الدول العربية .

المعطيات الطولية يمكن أن تكون مصفوقة ذات النمط N*T ذات الشكل :

$$y_{it} = \begin{pmatrix} y_{Algerie,1990} y_{Maroc,1990} & \cdots\cdots\cdots\cdots & y_{Jordanie,1990} \\ y_{Algerie,1991} y_{Maroc,1991} & \cdots\cdots\cdots\cdots & y_{Jordanie,1991} \\ & \vdots & \\ & \vdots & \\ y_{Jordanie,2002} y_{Jordanie,2002} & \cdots\cdots\cdots\cdots & y_{Jordanie,2002} \end{pmatrix}_{N\times T}$$

1-3-التعامل مع البيانات :

قبل القيام بالدراسة الإحصائية وتطبيق أدوات الإقتصاد القياسي يجب القيام بالتحليل الإبتدائي للمعطيات ويتمثل ذلك فيمايلي :

1-3-1-النظر في البيانات الخامة :

نقطة الانطلاق هي ببساطة النظر إلى الأرقام في جدول البيانات مع الأخذ بعين الاعتبارعدد السلاسل، ونقطة بدء وانتهاء السلسلة و الى قيم السلاسل؛ فإننا قد نلاحظ القيم المتطرفة أو بعض انقطاعات / فواصل الهيكلية (مثل قفزة كبيرة في القيم عند نقطة معينة). هذه العملية مهمة جدا لأنها يمكن أن يكون لها تأثير كبير على نتائج النموذج وبالتالي يجب أن تؤخذ بعين الاعتبار عند صياغة النموذج وعند تفسيره.

1-3-2-التحليل البياني

بالنظر إلى البيانات الخام (أي الأرقام الفعلية) قد يكشف لنا أشياء معينة ولكن العديد من الرسوم البيانية تسهل هذه العملية إلى حد كبير؛ حيث أنها تكشف عن وجود كمية كبيرة من المعلومات حول سلسلة في عرض واحد. كما أنها تجعل التحقق من القيم المتطرفة ومن الأدوات الرئيسية المستعملة لدينا:

1 - المدرج الإحصائي: تعطي مؤشرا لتوزيع السلسلة.

2-انتشار السلسلة : إعطاء مزيج من القيم للسلستين لغرض تحديد العلاقة بينهما (إن وجدت)؛

3- المنحنيات البيانية: تسهل المقارنة بين السلاسل.

4- الأعمدة البيانية.

5- الدائرة البيانية

1-4- الاحصائيات الموجزة

للحصول على فكرة أكثر دقة من توزيع المتغيرة X_t يمكننا تقدير مختلف المقاييس البسيطة مثل المتوسط $\bar{x}$، التباين σ_x^2 لتحليل اثنين أو أكثر من المتغيرات؛ ان الاحصاءات موجزة تحتوي على معلومات أقل بكثير من الرسم البياني، ولكن هي نقطة الانطلاق لأي عمل.

1-5- تحويل السلاسل : ان عملية تحويل السلاسل التي نستعملها أساسي، ويتم ذلك عن طريق مايلي :

1-5-1-المؤشرات و الأساس :

يعبر المؤشر عن التغير النسبي في القيمة (على سبيل المثال السعر أو الكمية) من فترة إلى أخرى. حيث من المفيد التعبير عن متغيرة عن طريق أساس وذلك في مؤشر وتحديد قيمة الأساس (دائما تقريبا 1 أو 100) في فترة الأساس (حيث بيانات السلاسل الزمنية، غالبا ما تكون الفترة الأولى)، ويتم قياس التغيرات النسبية في القيمة من تاريخ الأساس (التي قد تكون مراجعتها من وقت لآخر).وعلى الرغم من أنه يتم عرض المتغيرات المقطع العرضي في هذه الطريقة، إلا أنه الاستخدام الأكثر شيوعا يتمثل في السلاسل الزمنية. وهي ذات أهمية خصوصا عندما نريد مقارنة عدة متغيرات بالنسبة لفترة الأساس. من الأمثلة الشائعة المستعملة للمؤشرات لدينا مؤشر أسعار الاستهلاك (CPI) وتستخدم هذه الأخيرة باعتبارها وسيلة مريحة لتلخيص العديد من الأسعار في سلسلة واحدة. مايمكن ملاحظته أن المتغيرات المستعملة يمكن مقارنتها فقط مباشرة إذا كان لديهم نفس تاريخ الأساس، مما قد يؤدي إلى الحاجة في تغيير الأساس في بعض الحالات. مؤشر آخر مهم هو معامل انكماش الناتج المحلي الإجمالي deflator، والذي يحسب كنسبة من الناتج المحلي الإجمالي الاسمي؛ معامل انكماش الناتج المحلي الإجمالي هو مقياس أوسع للمستوى الأسعار لأنه يأخذ في الاعتبار كل السلع والخدمات المنتجة، وليس فقط تلك التي توجد في سلة استهلاك الأسر، على الرغم من أنه يغفل الواردات.

هناك طرق عديدة لحساب المؤشرات الكلية، اعتمادا على العلاج المتوسط المرجح. والفرق الرئيسي بين مؤشرات ثابتة والمتغيرة الوزن، ممثلة في كل من مؤشر لاسبيرز **Laspeyres** ومؤشر باش **Pasche**.

مؤشر لاسبيرز Laspeyers : يستخدم مؤشر لاسبيرز كمايلي :

$$Laspeyrs = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{P_{ti}}{P_{0i}}\right)W_{0i}$$

$$W_{0i} = \frac{v_{0i}}{\sum_{i=1}^{n} v_{0i}}$$

$$v_{oi} = p_{0i}q_{0i}$$

وعليه مؤشر لاسبيرز للأسعار هو :

$$Laspeyers(P) = \frac{\sum_{i=1}^{n}(p_{ti}q_{0i})}{\sum_{i=1}^{n}(p_{0i}q_{0i})}$$

مؤشر الأسعار CPI هو عبار عن مؤشر لاسبيرز محسوب كمايلي :

= (سلة ثابتة من السلع بالأسعار الحالية) / (سلة ثابتة من السلع بأسعار سنة الأساس)

ومن عيوب هذا المؤشر أنه لا يأخذ بعين الاعتبار قدرة الناس على تحويل استهلاكهم للاستجابة لتغيرات الأسعار، وبالتالي مؤشر أسعار المستهلك يميل إلى المبالغة أو الزيادات في تكاليف المعيشة.

مؤشر باش Pasche : يستخدم مؤشر باش كتغيير لصيغة لاسبيرز عن طريق استبدال كميات الأساس q_{0i} بالكمية الحالية q_{ti} وبالتالي مؤشر باش هو :

$$Pasche(p) \quad = \frac{\sum_{i=1}^{n}(p_{ti}q_{ti})}{\sum_{i=1}^{n}(p_{oi}q_{ti})}$$

معامل انكماش الناتج المحلي الإجمالي deflator هو مؤشر باش :

معامل انكماش الناتج المحلي الإجمالي deflator = (القيمة الحالية للسلة بالأسعار الجارية) / (قيمة الانتاج الحالي بأسعار سنة الأساس)

يقيس مؤشر باش كيف يمكن ان تكون التكلفة في الماضي لشراء سلة من جديد لتمثيل الاستهلاك الحالي وبتالي فإنه يفترض أن الناس قد قامت باستبدال السلع الماضية، وبالتالي يقلل من حجم الكلفة للحفاظ على الاستهلاك الحالي.

توضح هذه التحيزات في كل من لا سبيرس وباش أن لا أحد منهم صافي من العيوب.

1-5-2- البيانات الحقيقية مقابل البيانات الاسمية:

تكمن الصعوبة في الاقتصاد القياسي في الاختيار بين القيمة الاسمية والحقيقية للمعطيات المستعملة. تتمثل المشكلة في السلسلة الاسمية كونها تشتمل على عنصر السعر الذي يغطي الملامح الأساسية التي نحن مهتمون بها، و تظهر هذه المشكلة خاصة عندما يجري مقارنة بين متغيرتين اسميتين حيث أن السعر في السلسلتين سينتج عنه علاقة وثيقة بين هاتين السلسلتين، مما يؤدي إلى ارتفاع معامل الارتباط. لحل هذه المشكلة، يمكن للمرء تحويل سلسلة الاسمية إلى القيمة الحقيقية باستخدام مخفض السعر المناسب (deflator) (مثل مؤشر أسعار المستهلكين للإنفاق الاستهلاكي أو مؤشر أسعار المنتجين لتصنيع الإنتاج). غير أنه في بعض الأحيان لايوجد مخفض مناسب مما يجعل عملية التحويل تعسفية إلى حد ما؛ لذلك يجب التفكير جيدا في المتغيرات التي نستخدمها.

أ- اللوغاريتم :

ان تطبيق اللوغاريتم على السلاسل في الاقتصاد القياسي شائع الاستعمال وذلك للأسباب التالية :

أولا : العديد من السلاسل الزمنية الاقتصادية تظهر اتجاها قويا (الاتجاه العام) (أي حركة متناسقة صعودا أو هبوطا في القيمة). عندما يحدث هذا بسبب عملية النمو، تمثيل السلسلة يكشف عن منحنى الأسي؛ في مثل هذه الحالات فإن التغير الأسي الناتج عن مكونات السلسلة (مثل المركبة الدورية وغيرها من المكونات مثل العناصر غير المنتظمة لسلسلة زمنية) قد يغطي العلاقة بين المتغيرة و المتغيرات أخرى بالتالي أخذ اللوغاريتم الطبيعي لهذه السلسلة يسمح من حذف العامل الأسي وترك الاتجاه على سبيل المثال يمكن أن نرغب في استعمال اللوغاريتم(الطبيعي) للناتج المحلي الإجمالي التي سوف تظهر على الرسم البياني تقريبا كخط مستقيم، بدلا من المنحنى الأسي التي أظهرتها سلسلة الناتج المحلي الخام.

ثانيا : يستعمل اللوغاريتم لتحويل دالة غير خطية مثل كوب دوقلاص إلى دالة خطية. $Y_t=AK_t^aL^b_t$

ثالثا: يسمح اللوغاريتم من تفسير المعالم المستخرجة من تقدير النموذج كمورونات.

ب- الفرق :

يسمح الفرق الأول للسلسلة من حذف الاتجاه العام $\Delta y=Y_t-Y_{t-1}$ ، اذا الاتجاه العام لازال في السلسلة يمكن القيام الفرق الثاني.

ج- معدل النمو :

عادة ما نستعمل معدلات النمو لتحليل البيانات و العلاقات الاقتصادية و المثال الرئيسي هو الناتج المحلي الإجمالي حيث عادة ما نستعمل معدلات النمو بدلا من مستويات الناتج المحلي الاجمالي. يسمح استخدام معدلات النمو من معرفة الكيفية التي تغيير بها متغيرة بالاضافة الى ذلك تسمح معدلات النمو من ازالة تأثير أثر مركبة الاتجاه العام. هناك نوعان من معدلات النمو: معدل النمو المتفطع و معدل النمو المستمر؛ يتم حساب معدلات النمو المتقطعة على النحو التالي:

$$\boldsymbol{Taux\ de\ croissance\ Yt} = \frac{\boldsymbol{Y_t - Y_{t-1}}}{\boldsymbol{Y_{t-1}}}$$

معدلات النمو المستمرة هي الأكثر استعمالا في الاقتصاد القياسي :

$$Taux\ de\ croissance\ Y_t = ln\left(\frac{Y_t}{Y_{t-1}}\right) = \ln(Y_t) - \ln\,(Y_{t-1})$$

بالنسبة للمعدلات الشهرية(السنوية) يمكن حسابها في نفس السنة من الشهر الحالي بالنسبة للشهر السابقة، أو المعدل من سنة إلى أخرى؛ والمعدل الشهر الحالي بالنسبة للشهر السابق هو أقل تحيزا، ويتم عادة تحويل المعدل الشهري إلى سنوي باستعمال العلاقة التالية:

$$= 12 * \ln(yt/yt-1) \text{ (continuous)}$$

$$\text{Or } [(yt/yt-1)^{12}-1] \text{ (discrete)}$$

1-6- مصدر المعطيات: يتوقف نجاح أي دراسة قياسية على نوعية البيانات، لحسن الحظ بفضل الانترنت لدينا ثروة معتبرة من المعطيات .

مصدر المعطيات	الموقع الالكتروني
الديوان الوطني للإحصائيات ONS	www.ons.dz
ICPSR(microdonnées)	https://www.icpsr.umich.edu/icpsrweb/ICPSR/
Banque mondial >Data	http://data.worldbank.org
Nations-Unies>UNData	http://data.un.org
LABORSTA(bureau International du travail)	http://laborsta.ilo.org/default_F.html
FMI>Internaional Monetary Fund>Data&Statistics	http://www.imf.org/external/data.htm
CEPLASTAT (Amérique latine)	http://estadisticas.cepal.org/cepalstat/WEB_CEPALSTAT/Portada.asp?idioma=i
African Economic Outlook	/http://www.africaneconomicoutlook.org/fr
OMC>Données sur le commerce international	http://www.wto.org/french/res_f/statis_f/statis_f.htm
OMS>Donnée et statistiques	http://www.wto.org/french/res_f/statis_f/statis_f.htm
Perspective Monde>Statistiques(US herbrook)	http://perspective.usherbrooke.ca/
Gapminder	http://www.gapminder.org/

الفصل الثاني
الانحدار الخطي البسيط

يتمثل التحليل الانحداري البسيط في دراسة العلاقة بين متغيرة تسمى بالمتغيرة التابعة أو مفسِرة و متغيرة أخرى تسمى بالمتغيرة المستقلة أو مفسَرة؛ ويعطى النموذج على الشكل التالي:

$$Y_t = \alpha + BX_t + \varepsilon_t , t = 1, n \qquad (1\text{-}1)$$

X_t: المتغير المستقل

Y_t: المتغير التابع

ε_t : الخطأ العشوائي أو الخطأ في التفسير

n : عدد المشاهدات (هذه المشاهدات ممكن أن تكون معطيات متعلقة بأفراد أو زمنية، في حالتنا هذه نتكلم عن زمنية)

المشاهدات Y و X هي متغيرات مشاهدة لعدد n من الأفراد أو في حالتنا هذه في عدد المتغيرات المشاهدة في فترة زمنية ممكن ان تكون سنوات ، الفصول ، أشهر،... الخ؛ والتي تم الحصول عليها من سحب عشوائي للمجتمع معين.

الهدف من هذا النموذج هو دراسة العلاقة بين هاتين المتغيرتين والتي يمكن أن تكون على سبيل المثال:

مثال-2-1 : الكمية المطلوبة من سلعة ما Q من الطرف المستهلك التي تمثل في نموذجنا البسيط بـ Y و سعر المقابل لها في السوق بـ P و التي تمثل X و يكتب النموذج كمايلي :

$$Q_t = \alpha + \beta P_t + \varepsilon_t , t = 1, n\beta$$

مثال2-2 : اذا أخذنا الدالة الكيزية اللعلاقة بين الاستهلاك C الذي تمثل في النموذجنا البسيط بـ Y و الدخل المقابل لها في السوق بـ R و التي تمثل X و يكتب النموذج كمايلي :

$$C_t = \alpha + \beta R_t + \varepsilon_t , t = 1, n$$

مثال2-3: اذا أخذنا العلاقة بين المبيعات لمنتوج معين و نفقات الاشهارالمقابل لها، فان المبيعات V تمثل في نموذجنا البسيط بـ Y و نفقات الاشهار PUB و التي تمثل X ويكتب النموذج كمايلي :

$$V_t = \alpha + \beta PUB_t + \varepsilon_t , t = 1, n$$

مثال2-4 : اذا أخذنا العلاقة بين دخل العمال في مؤسسة ما و المستوى التعليمي، فان الدخل Re يمثل المتغيرة Y و المستوى التعليميEDUC تمثل المتغيرة X و يكتب النموذج كمايلي :

$$\mathrm{Re}_i = \alpha + \beta EDUC_i + \varepsilon_i , i = 1, n$$

حيث i يمثل العامل

2-1-تقدير النموذج الخطي البسيط :

2-1-1- رسم انتشار العلاقة: من خلال المعطيات المثال (2-1) :

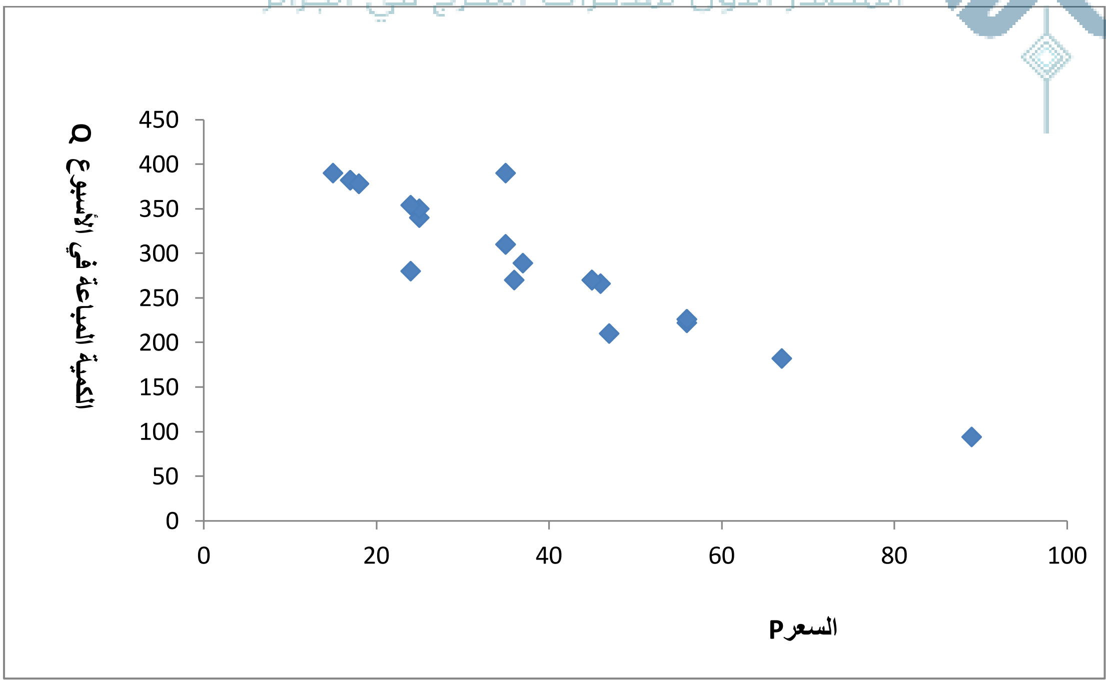
$$Q_t = \alpha + \beta P_t + \varepsilon_t , t = 1, n$$

الذي يربط بين المكية المطلوبة Q و السعر P خلال 25 أسبوع المعطاة في الجدول التالي :

tالأسبوع	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Qالكمية	340	289	222	210	280	270	390	182	94	270	350
Pالسعر	25	37	56	47	24	36	35	67	89	45	25

tالأسبوع	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
Qالكمية	310	266	310	354	270	226	382	390	378	382	378	226	270	270
Pالسعر	35	46	35	24	45	56	17	15	18	17	18	56	45	45

ان انتشار العلاقة بين الكمية و السعر معطاة في المستوى التالي :



تقدير النموذج الذي يسمح من ربط بين الكمية و السعر يمكن كتابته كمايلي :

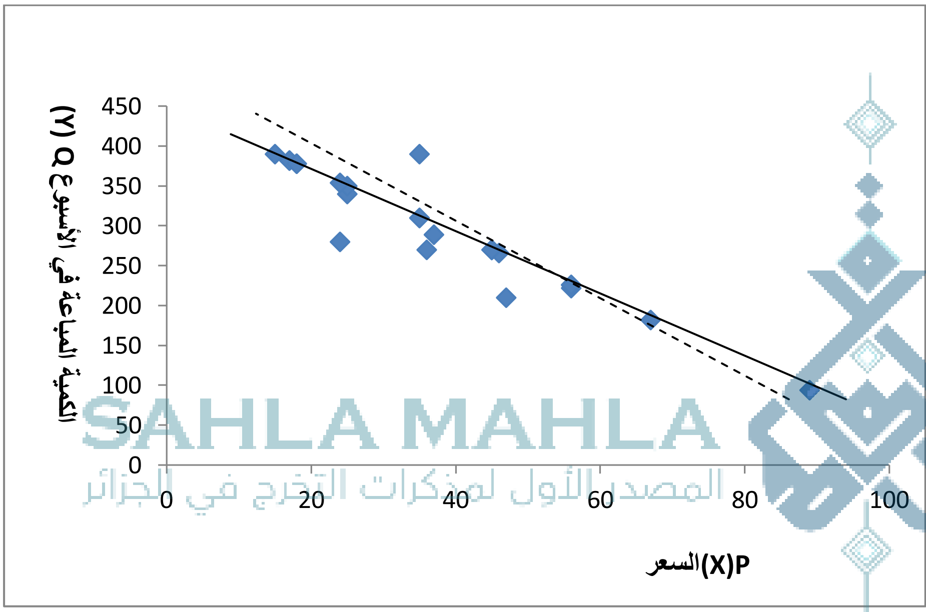
$$\hat{Y}_t = \hat{\alpha} + \hat{\beta} X_t \qquad (2\text{-}2)$$

حيث : $\hat{Y}_t$ هي القيمة المقدرة لـ Y_t أي القيمة الرياضية لـ $E(Y/X_t)$

$\hat{\alpha}$: القيمة المقدرة لـ α

$\hat{\beta}$: القيمة المقدرة لـ B

و من أجل تقدير المعالم هذه يجب البحث عن احسن معادلة أي الخط الذي يربط بين النقاط كماهو موضح في الشكل (2-1) الموالي :



من خلال الشكل نستنتج أن كل المشاهدات لاتمر على الخط الذي يحاول أن يمثلها، مما يتطلب بناء نموذج عشوائي من خلال المعادلة (2-1) والتي تكتب كمايلي :

$$Y_t = \hat{\alpha} + \hat{\beta} X_t + e_t \qquad (3\text{-}2)$$

حيث e_t: تقدير لـ u_t

نسمي e_t بالأخطاء في التقدير أي الفرق بين القيمة الحقيقية و القيمة المقدرة أي :

$$e_t = Y_t - \hat{Y}_t \qquad (4\text{-}2)$$

وبالتالي : (5-2) $Y = \hat{Y}_t + e_t$

قبل التطرق الى الطرق التي تسمح من تقدير معالم النموذج نقوم بتعريف معنى الخطية.

2-1-2- الخطية في التحليل الانحدار: مادم نحن بصدد دراسة الخطية فإنه يجب علينا تعريف الخطية وماذا نقصد بها في النموذج الخطي، الخطية بصفة عامة يمكن تفسيرها في كل من :

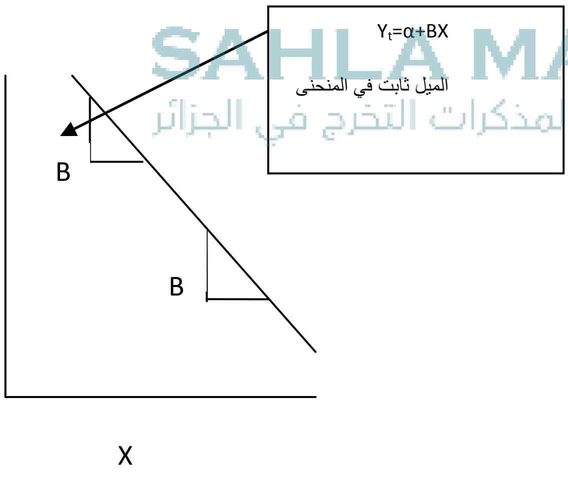
أ- **الخطية في المتغيرات :** من خلال خطية المقدرات يمكن فهم مباشرة أن المتغيرات الخارجية يجب أن تكون خطية أي اسها يساوي واحد مما يؤدي الى القول أن الدوال التالية غير خطية:

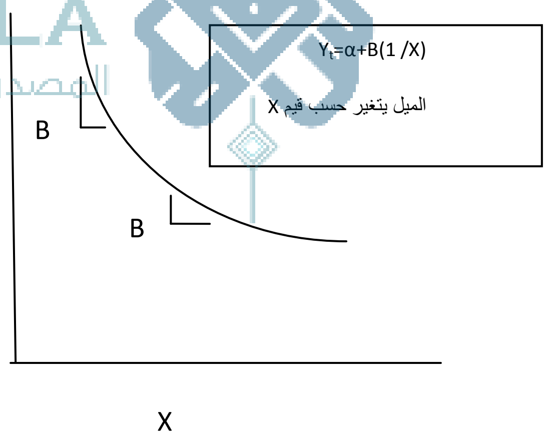
$$E(Y)=\alpha+BX_i^2 \quad (أ)$$

$$E(Y)=\alpha+B(1/X_i) \quad (ب)$$

نظرا لكون المتغيرة x أسها (2) في المعادلة (أ) و بأس (-1) في المعادلة (ب)

اذا قمنا بتقدير النموذج (ب) الذي هو غير خطي في المتغيرة x و النموذج (1-1) الذي هو خطي في المتغيرة x فان الميل ثابت في هذه الأخيرة بينما في (ب) الميل يتغير حسب قيم x كما هو موضح في الشكل التالي :





ب-الخطية في المعالم : ان المتغير التابع هو دالة خطية للمعالم مهما كانت المتغيرات الخارجية خطية أم لا، أي نقول عن النموذج أنه خطي اذا كانت معالم النموذج تظهر بأس يساوي واحد أي B و α ذات أس 1 وبتالي فإن حسب هذا التعريف فإن النموذج (أ)و(ب) خطية لأن كل من المعالم B و α تدخل في النموذج بشكل خطي بغض النظر عن المتغيرة x خطية أم لا؛ بينما النموذج التالي :

$$E(Y_t)=\alpha+B^2X_t$$

فهو غير خطي، المعلمة B تظهر بأس يساوي 2

فيما يخص تقدير النموذج الخطي نقصد به النموذج الخطي في المعالم، حيث النموذج غير الخطي في المتغيرات يمكن تقديره بسهولة عن طريق الطريقة الخطية.

2-1-3- تقدير عن طريق طريقة المربعات الصغري:

تتمثل طريقة المربعات الصغري في تصغير مجموع مربعات الأخطاء:

$$Min\sum_{t=1}^{n} e_t^2 = \underset{\hat{\alpha},\hat{\beta}}{Min}\sum_{t=1}^{n}\left(Y_t - \hat{Y}_t\right)^2$$

للنموذج التالي : $Y_t = \alpha + \beta X_t + \varepsilon_t, t = 1, n$

تحتى الفرضيات التالي :

1-التوقع الرياضي لأخطاء معدوم : $E(\varepsilon) = 0$

أي : $E(\varepsilon_t) = 0, \forall t = 1,2,\dots n$ (لما نأخذ عينة حجمها n)

$$Y_t = \alpha + \beta X_t + \varepsilon_t, t = 1, n$$

$$\varepsilon_t = Y_t - \alpha - \beta X_t$$

2- تباين الأخطاء أو تشتت الأخطاء ثابت : $E(\varepsilon_t^2) = \sigma_\varepsilon^2, \forall t$.

3-لايوجد ارتباط بين الأخطاء المرتكبة على المشاهدات : $E(\varepsilon_t \varepsilon_{t'}) = 0, \forall t \neq t'$.

4- X_i يمكن السيطرة عليها أي ليست عشوائية.

5- $Cov(X_t \varepsilon_t) = 0$ الأخطاء مستقلة x المفسرة.

6- $\varepsilon_t \mapsto N(0, \sigma_\varepsilon^2)$.

أ-استخراج القيمة المقدرة للمعالم : لايجاد القيم المقدرة للمعالم نقوم باشتقاق الدالة لايجاد قيم المعالم التي تصغر مجموع مربعات الأخطاء كمايلي :

$$Min\sum_{t=1}^{n} e_t^2 = \underset{\hat{\alpha},\hat{\beta}}{Min}\sum_{t=1}^{n}\left(Y_t - \hat{\alpha} - \hat{\beta} X_t\right)^2 \Rightarrow \hat{\alpha} = ?, \hat{\beta} = ?$$

المشتقة الجزئية بالنسبة لـ $\hat{\alpha}$ و $\hat{\beta}$ معدومة أي :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \sum_{t=1}^{n} e_i^2}{\partial \hat{\alpha}} = \dfrac{\partial \sum_{i=1}^{n}\left(Y_t - \hat{\alpha} - \hat{B} X_t\right)^2}{\partial \hat{\alpha}} = 0 \\ \dfrac{\partial \sum_{t=1}^{n} e_t^2}{\partial \hat{B}} = \dfrac{\partial \sum_{t=1}^{n}\left(Y_t - \hat{\alpha} - \hat{B} X_t\right)^2}{\partial \hat{B}} = 0 \end{cases}$$

نتحصل على :

$$\frac{\partial \sum_{i=1}^{n} e_t^2}{\partial \hat{\alpha}} = \frac{\partial \sum_{t=1}^{n} \left(Y_t - \hat{\alpha} - \hat{\beta} X_t\right)^2}{\partial \hat{\alpha}} = (-1)2\Sigma\left(Y_t - \hat{\alpha} - \hat{B} X_t\right) = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{t=1}^{n} (Y_t - \hat{\alpha} - \hat{B} X_t) = 0$$

الاشتقاق بالنسبة لـ $\hat{B}$ يعطينا ما يلي :

$$\frac{\partial \sum_{t=1}^{n} e_i^2}{\partial \hat{B}} = \frac{\partial \sum_{t=1}^{n} \left(Y_i - \hat{\alpha} - \hat{B} X_t\right)^2}{\partial \hat{B}} = (-2)\Sigma\left(Y_t - \hat{\alpha} - \hat{B} X_t\right) X_t = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{t=1}^{n} (Y_t - \hat{\alpha} - \hat{B} X_t) X_t = 0$$

إذا نتحصل على النظام التالي :

$$\begin{cases} \sum_{t=1}^{n} Y_t = n\hat{\alpha} + \hat{B} \sum_{t=1}^{n} X_t & \ldots\ldots\ldots\ldots\ (I) \\ \sum_{t=1}^{n} Y_t X_t = \hat{\alpha} \sum_{t=1}^{n} X_t + \hat{B} \sum_{t=1}^{n} X_t^2 & \ldots\ldots\ldots\ldots (II) \end{cases}$$

حل النظام يعطي تقديرات α و B عن طريق طريقة المربعات الصغرى كمايلي :

$$\begin{cases} \hat{B} = \dfrac{\sum (X_t - \overline{X})(Y_t - \overline{Y})}{\sum (X_t - \overline{X})^2} \\ \hat{\alpha} = \overline{Y} - \hat{B}\overline{X} \end{cases}$$

تقدير معالم المثال (2-2)عن طريق المربعات الصغرى :

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Y(q)	340	289	222	210	280	270	390	182	94	270
X(p)	25	37	56	47	24	36	35	67	89	45
xt*yt	-634,6	4,435	-1244	-714,9	177	51,8752	-324,1648	-3165,1248	-10052,8848	-149,3648
xt2	177,42	1,742	312,58	75,342	205,1	5,3824	11,0224	822,5424	2568,4624	44,6224
Yt^	344,77	297,6	222,8	258,21	348,7	301,488052	305,42257	179,517994	92,958598	266,07739
e=Y-Y^	-4,768	-8,55	-0,798	-48,21	-68,7	-31,488052	84,57743	2,482006	1,041402	3,92261
e2	22,731	73,16	0,6363	2324	4720	991,497419	7153,34167	6,16035378	1,08451813	15,3868692

تابع

t	11	12	13	14	15	16	17	18
Y(q)	350	310	266	310	354	270	226	382
X(p)	25	35	46	35	24	45	56	17
xt*yt	-767,7648	-58,5648	-202,4448	-58,5648	-882,6848	-149,3648	-1173,2448	-1911,1248
xt2	177,4224	11,0224	58,9824	11,0224	205,0624	44,6224	312,5824	454,5424
Yt^	344,76775	305,42257	262,142872	305,42257	348,702268	266,07739	222,797692	376,243894
e=Y-Y^	5,23225	4,57743	3,857128	4,57743	5,297732	3,92261	3,202308	5,756106
e2	27,3764401	20,9528654	14,8774364	20,9528654	28,0659643	15,3868692	10,2547765	33,1327563

تابع

t	19	20	21	22	23	24	25	
Y(q)	390	378	382	378	226	270	270	$\bar{y}$ =292,36
X(p)	15	18	17	18	56	45	45	$\bar{x}$ =38,32
xt*yt	-2276,9648	-1740,2048	-1911,1248	-1740,2048	-1173,2448	-149,3648	-149,3648	Somme= -30395,88
xt2	543,8224	412,9024	454,5424	412,9024	312,5824	44,6224	44,6224	Somme= 7725,44
Yt^	384,11293	372,309376	376,2438	372,3093	222,7976	266,0773	266,0773	Somme= 7308,9992
e=Y-Y^	5,88707	5,690624	5,7561	5,6906	3,2023	3,9226	3,9226	Somme= 0,00074
e2	34,6575	32,3832	33,1327	32,3832	10,2547	15,3868	15,3868	Somme= 15652,6338

مع :

$$\sum(X_t - \bar{X}) = x_t , \quad \sum(Y_t - \bar{Y}) = y_t$$

$$\begin{cases} \hat{B} = \dfrac{\Sigma(X_t - \bar{X})(Y_t - \bar{Y})}{\Sigma(X_t - \bar{X})^2} = \dfrac{\Sigma x_t y_t}{\Sigma x_t{}^2} = \dfrac{-30395,88}{7725,44} = -3,93 \\ \hat{\alpha} = \bar{Y} - \hat{B}\bar{X} = 292,36 - (-3,9345) * (38,32) = 443,1307 \end{cases}$$

من خلال التطبيق نلاحظ أن مجموع الأخطاء يساوي الصفر و أصغر مجموع مربع عن طريق المربعات الصغرى هو 15652,63378.

2-2- نوعية المقدرات:

2-2-1-نظرية GAUSS –Marcov: تنص هذه ظرية على أنه تحت فرضيات المذكورة فإن التقدير عن طريق المربعات الصغرى هو تقدير BLUE أي من أحسن التقديرات الخطية غير المتحيزة (Best Linear Unbiaised Estimator) بصيغة أخرى :

أنها دالة خطية لـ Y ،غير متحيزة : $E(\hat{B}) = B$ ، $E(\hat{\alpha}) = \alpha$ ،أحسن التقديرات : أي له أصغر تباين

بالنسبة لـ $\hat{B}$ قانون التشتت :

$$\text{var}(\hat{B}) = E(\hat{B} - E(\hat{B}))^2 = E(\hat{B} - B)^2$$

إذا تباين $\hat{B}$ هو : $\text{var}(\hat{B}) = \dfrac{\sigma_\varepsilon^2}{\sum(x_t - \bar{x})^2}$

وعليه : $\underset{n\to\infty}{Lim}\,\text{var}(\hat{B}) = \underset{n\to\infty}{Lim}\dfrac{\sigma_\varepsilon^2}{\sum(x_t - \bar{x})^2} \to 0$ وذلك لأن $\sum(x_t - \bar{x})^2 \to \infty$ لما $n \to \infty$

إذا المقدر $\hat{B}$ له سلوك تقاربي .

-**بالنسبة لـ $\hat{\alpha}$:** قانون تشتت $\hat{\alpha}$ هو

$$\text{var}(\hat{\alpha}) = E(\hat{\alpha} - E(\hat{\alpha}))^2 = E(\hat{\alpha} - \alpha)^2$$

ليدنا مما سبق ما يلي :

$$Var(\hat{\alpha}) = \sigma_\varepsilon^2\left(\frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{\sum(x_t - \bar{x})^2}\right)$$

$$\underset{n\to\infty}{Lim}\,Var(\hat{\alpha}) = \underset{n\to\infty}{Lim}\,\sigma_\varepsilon^2\left(\frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{\sum(x_t - \bar{x})^2}\right) \to 0$$

إذا $\hat{\alpha}$ لها سلوك تقاربي .

وعليه كل من التقديرات α, B المتحصل عليها عن طريق طريقة المربعات الصغرى لها سلوك تقاربي .

وباتالي :$\text{plim}\,\widehat{\beta} = \beta$ (أي بو جود السلوك التقارلي و عدم التحيز فإن المقدرات ت

$\text{plim}\,\widehat{\alpha} = \alpha$

(أي بو جود السلوك التقارلي و عدم التحيز فإن المقدرات تؤول احتماليا الى المعلمة)

التباين المشترك لـ $\hat{B}$ و $\hat{\alpha}$:

$$Cov(\hat{\alpha},\hat{B}) = E(\hat{\alpha}-\alpha)(\hat{B}-B)$$

$$Cov(\hat{\alpha},\hat{B}) = -\bar{x}\frac{\sigma_{\varepsilon}^{2}}{\sum_{t=1}^{N}\left(X_{t}-\bar{X}\right)^{2}}$$

-تقدير σ_{ε}^{2} : في كل ما سبق كنا نعتبر σ_{ε}^{2} معلوم، ولكن الأمر ليس محقق، وليس متاح أصلا في الميدان التطبيقي؛ إذا مادام σ_{ε}^{2} مجهول، فلا بد علينا تقديره(أي تقدير تشتت الأخطاء).

$$\hat{\sigma}_{\varepsilon}^{2} = \frac{\sum e_{t}^{2}}{n-2}$$

ملاحظة: نلاحظ أن العينة حذف منها العدد2، وذلك لوجود عاملين للتقدير في النموذج وهي α,β حيث $n-2$ تسمى درجة الحرية.

أي يكفي تعويض هذه القيمة في العبارات السابقة لكي نتمكن من حساب التباينات السابقة.

مثال 2- 5 : بأخذ المثال المتعلق بالأسعار و الكميات فان التباينات و الانحرافات المعيارية الخاصة به هي :

تباين الأخطاء هو :

$$\hat{\sigma}_{\varepsilon}^{2} = \frac{\sum e_{t}^{2}}{n-2} = \frac{15652,63378}{25-2} = 680,5492$$

تباين $\hat{\beta}$ هو :

$$\text{var}(\hat{B}) = \frac{\hat{\sigma}_{\varepsilon}^{2}}{\sum(x_{t}-\bar{x})^{2}} = \frac{680,5492}{7725,44}$$

ومنه الانحراف المعياري لـ $\hat{\beta}$ هو :

$$\sigma_{\hat{\beta}} = \sqrt{\text{var}(\hat{B})} = \sqrt{\frac{\hat{\sigma}_{\varepsilon}^{2}}{\sum(x_{t}-\bar{x})^{2}}} = \sqrt{\frac{680,5492}{7725,44}} = 0,2968$$

تباين $\hat{\alpha}$:

$$Var(\hat{\alpha}) = \hat{\sigma}_{\varepsilon}^{2}\left(\frac{1}{n}+\frac{\bar{x}^{2}}{\sum(x_{t}-\bar{x})^{2}}\right)$$

$$Var(\hat{\alpha})=\hat{\sigma}_{\varepsilon}^{2}(\frac{1}{n}+\frac{\bar{x}^{2}}{\sum(x_t-\bar{x})^{2}})=680,5492(\frac{1}{25}+\frac{(38,32)^{2}}{7725,44})$$

ومنه الانحراف المعياري لـ $\hat{\alpha}$ هو :

$$\sigma_{\hat{\alpha}}=\sqrt{Var(\hat{\alpha})}=\sqrt{\hat{\sigma}_{\varepsilon}^{2}(\frac{1}{n}+\frac{\bar{x}^{2}}{\sum(x_t-\bar{x})^{2}})}=\sqrt{680,5492(\frac{1}{25}+\frac{(38,32)^{2}}{7725,44})}=12,5130$$

2-3-التقدير بطريقة المعقولية العظمى:

سنقوم بتقدير عن طريق طريقة المعقولية العظمى لكل من α,β ؛ حسب فرضيات النموذج فإن الأخطاء تتبع التوزيع الطبيعي :

دالة الكثافة لـ ε_t :

$$f(\varepsilon_t)=(2\pi\sigma^{2})^{-\frac{1}{2}}\exp\left\{-\frac{\varepsilon_t^{2}}{2\sigma^{2}}\right\}$$

دالة المعقولية هي كالتالي :

$$L(\varepsilon_1,\varepsilon_2,...,\varepsilon_n)=(2\pi\sigma^{2})^{-\frac{n}{2}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\Sigma(\frac{Y_t-\hat{Y}_t}{\sigma})^{2}\right\}$$

$$L(\varepsilon_1,\varepsilon_2,...,\varepsilon_n)=(2\pi\sigma^{2})^{-\frac{n}{2}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{n}\left(\frac{Y_t-\hat{Y}_t}{\sigma}\right)^{2}\right\}$$

إذا ندخل اللوغارتم لأن القيمة العظمى التي تأخذها الدالة هي نفسها التي يأخذها لوغاريتم هذه الدالة.

$$\underset{\hat{\alpha},\hat{B},\hat{\sigma}^{2}}{MaxLogL}=Max\left\{-\frac{n}{2}\log 2\pi-\frac{n}{2}Log\sigma^{2}-\frac{1}{2\hat{\sigma}^{2}}\Sigma(Y_t-\hat{\alpha}-\hat{B}X_t)^{2}\right\}$$

نبحث عن شروط التعظيم

الشروط اللازمة :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial LogL}{\partial \hat{\alpha}} = 0 \quad , \quad \dfrac{1}{\hat{\sigma}^2} \sum_{t=1}^{n} (Y_t - \hat{\alpha} - \hat{B}X_t) = 0 & \text{------------(I)} \\ \dfrac{\partial LogL}{\partial \hat{B}} = 0 \quad , \quad \dfrac{1}{\hat{\sigma}^2} \sum_{t=1}^{n} X_t (Y_t - \hat{\alpha} - \hat{B}X_t) = 0 & \text{------------(II))} \\ \dfrac{\partial LogL}{\partial \hat{\sigma}^2} = 0 \quad , \quad -\dfrac{n}{2}\dfrac{1}{\hat{\sigma}^2} + \dfrac{1}{2\hat{\sigma}^4} \sum_{t=1}^{n} (Y_t - \hat{\alpha} - \hat{B}X_t)^2 = 0 & \text{------------(III} \end{cases}$$

من هذه الجملة يمكن استخراج مايلي :

من المعادلة I : $\hat{\alpha} = \overline{Y} - \hat{B}\overline{X}$

من المعادلة II : $\hat{B} = \dfrac{\Sigma(X_t - \overline{X})(Y_t - \overline{Y})}{\Sigma(X_t - \overline{X})^2}$

من المعادلة III : $\hat{\sigma}_\varepsilon^2 = \dfrac{\Sigma(Y_t - \hat{\alpha} - BX_t)^2}{n} = \dfrac{\Sigma(Y_t - \hat{Y}_t)^2}{n} = \dfrac{\Sigma e_t^2}{n}$

إذا تقدير $\hat{\sigma}_\varepsilon^2$ عن طريق المعقولية العظمى هو تقدير متحيز، وذلك بسبب إختلاف قيمته عن القيمة المتحصل عليها عن طريق المربعات الصغرى، ويمكن إيجاد مقدار التحيز كالتالي :

$$E\left(\frac{\sum e_t^2}{n-2}\right) = \sigma_\varepsilon^2$$

$$\sigma_\varepsilon^2 = \frac{\sum e_t^2}{n-2} \Rightarrow (n-2)\sigma_\varepsilon^2 = \sum e_t^2$$

$$\Rightarrow n\sigma_\varepsilon^2 - 2\sigma_\varepsilon^2 = \sum e_t^2 \Rightarrow \sigma_\varepsilon^2 - \frac{2\sigma_\varepsilon^2}{n} = \frac{\sum e_t^2}{n}$$

$$\Rightarrow \sigma_\varepsilon^2 - \frac{2\sigma_\varepsilon^2}{n} = \hat{\sigma}_\varepsilon^2 \Rightarrow \sigma_\varepsilon^2 = \hat{\sigma}_\varepsilon^2 + \frac{2\sigma_\varepsilon^2}{n}$$

إذن المقدار $\dfrac{2\sigma_\varepsilon^2}{n}$ هو المقدار الذي يقيس تحيز تقدير $\hat{\sigma}_\varepsilon^2$ بطريقة المعقولية العظمى أو

بعبارة أخرى التحيز : $E(\sigma_\varepsilon^2 - \hat{\sigma}_\varepsilon^2) = \dfrac{2\sigma_\varepsilon^2}{n} \neq 0$

مثال2- 7: بأخذ معطيات المثال 2-2 نحصل على تقديرات المعالم عن طريق طريقة المعقولية العظمى كمايلي :

$$\begin{cases} \hat{B} = \dfrac{\sum (X_t - \bar{X})(Y_t - \bar{Y})}{\sum (X_t - \bar{X})^2} = \dfrac{\sum x_t y_t}{\sum x_t^2} = \dfrac{-30395,88}{7725,44} = -3,9345 \\ \hat{\alpha} = \bar{Y} - \hat{B}\bar{X} = 292,36 + (-3,9345) * (38,32) = 443,1307 \\ \hat{\sigma}_\varepsilon^2 = \dfrac{\sum_{t=1}^{25} e_t^2}{n} = 626,1053 \\ \ln \mathrm{L} = -115,967081 \end{cases}$$

التقدير المجالي لمعالم النموذج واختبار معنوية المعالم:

لكي نتكمن من تقدير مجال المعالم يجب أولا تحديد التوزيع الذي تتبعه المعالم

2-4- <u>توزيع</u> $\hat{B}$ <u>و</u> $\hat{\alpha}$:

لدينا من فرضيات النموذج : $\varepsilon_t \mapsto N(0,\sigma_\varepsilon^2)$ ، منه فان المتغيرة الداخلية تتبع التوزيع الطبيعي و ذلك حسب الخواص التالية : $(X+a)\mapsto N(\mu+a,\sigma^2)$ و $aX \mapsto N(a\mu,a^2\sigma^2)$ (حيث a ثابت معين))؛ مما ينتج :

$$Y_t = \varepsilon_t + (\alpha + BX_t) \Rightarrow Y_t \mapsto N\left(\alpha + BX_t, \sigma^2\right)$$

Y_t: موزعة بصفة مستقلة ولكنها غير موزعة بنفس الطريقة كون ليس لها نفس التوقع الرياضي

تقديرات معالم تابعة لعينة المعطيات، وبالتالي من المقدرات $\hat{B}$ و $\hat{\alpha}$ نستنتج :

$$\hat{B} \mapsto N\left(B, \frac{\sigma_\varepsilon^2}{\Sigma (X_t - \bar{X})^2}\right) \text{ و } \hat{\alpha} \mapsto N(\alpha, \sigma_\varepsilon^2(\frac{1}{n} + \frac{\bar{X}^2}{\Sigma (X_t - \bar{X})^2}))$$

وعليه :

$$\frac{\hat{B} - B}{\left(\dfrac{\sigma_\varepsilon^2}{\Sigma (X_t - \bar{X})^2}\right)^{1/2}} \mapsto N(0,1) \text{ و } \frac{\hat{\alpha} - \alpha}{\left(\sigma_\varepsilon^2(\dfrac{1}{n} + \dfrac{\bar{X}^2}{\Sigma (X_t - \bar{X})^2})\right)^{1/2}} \mapsto N(0,1)$$

بتعوض قيمة تباين الأخطاء σ_ε^2 بالقيمة المقدرة له فإن $\hat{\sigma}_\varepsilon^2$ فان العلاقة السابقة تصبح تتبع التوزيع ستودنت بدرجة حرية n-2 كمايلي :

$$\frac{\hat{B}-B}{\left(\frac{\hat{\sigma}_\varepsilon^2}{\Sigma(X_t-\bar{X})^2}\right)^{1/2}} \mapsto T(n-2) \quad و \quad \frac{\hat{\alpha}-\alpha}{\left(\hat{\sigma}_\varepsilon^2(\frac{1}{n}+\frac{\bar{X}^2}{\Sigma(X_t-\bar{X})^2})\right)^{1/2}} \mapsto T(n-2)$$

وهذا نظرا لمايلي :

1 - اذا كان لدينا متغيرات z_1، z_2،....، z_r مستقلة و تتبع التوزيع الطبيعي المعياري فان المتغيرة : $\chi^2=\sum_{i=1}^{r} z_i^2$

تتبع توزيع كاي تربيع بدرجة حرية r، $\chi^2(r)$

2- اذا كان لدينا z_1 و z_2 متغيرات عشوائية و مستقلة تتبع على الترتيب التوزيع الطبيعي المعياري و توزيع كاي تربيع $\chi^2(r)$ فان :

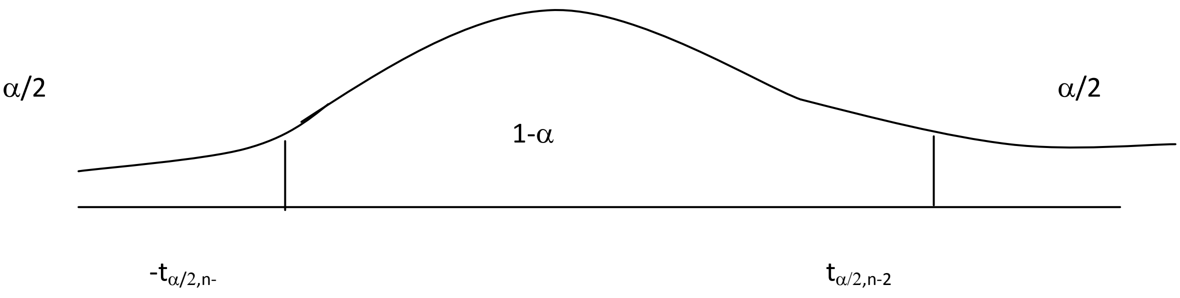
$$\frac{z_1}{\sqrt{\chi^2(r)/r}} \mapsto T(r)$$

<u>2-5-بناء مجال الثقة للعاملين واختبار B و α بإحتمال α</u>

<u>بالنسبة لـ B</u> :

مجال الثقة لـ B : نحن لدينا $T=\frac{\hat{B}-B}{\left[\hat{\sigma}_\varepsilon^2/\sum(x_t-\bar{x})^2\right]^{\frac{1}{2}}}$

رسم توزيع ستودنت يعطى كمايلي :



$$P(-t_{\alpha/2} \le T \le t_{\alpha/2}) = 1-\alpha$$

إذا : $$-t_{\alpha/2} \le \frac{\hat{B}-B}{\left[\hat{\sigma}_\varepsilon^2/\sum(x_t-\bar{x})^2\right]^{\frac{1}{2}}} \le t_{\alpha/2}$$

$$\underbrace{\hat{B}-t_{\alpha/2}\left[\hat{\sigma}_\varepsilon^2/\sum(x_t-\bar{x})^2\right]^{\frac{1}{2}}}_{B_1} \le B \le \underbrace{\hat{B}+t_{\alpha/2}\left[\hat{\sigma}_\varepsilon^2/\sum(x_t-\bar{x})^2\right]^{\frac{1}{2}}}_{B_2}$$

إذا تقدير $\hat{B}$ باحتمال معطى 1-α (مستوى الثقة) يجب أن ينتمي إلى المجال $[B_1, B_2]$ ومنه : $P\{B \in [B_1, B_2]\} = 1-\alpha$

مثال2-8: مجال الثقة للمعلمة $\hat{B}$ بمستوى ثقة 95 $(1-\alpha)$ ، قيمة ستودنت المجدولة تعطى بـ $t_{\alpha/2,n-2} = t_{0,025;23} = 2,069$ ، وعليه مجال الثقة يعطى بـ :

$$P\{B \in [-4,5485; -3,3205]\} = 95\%$$

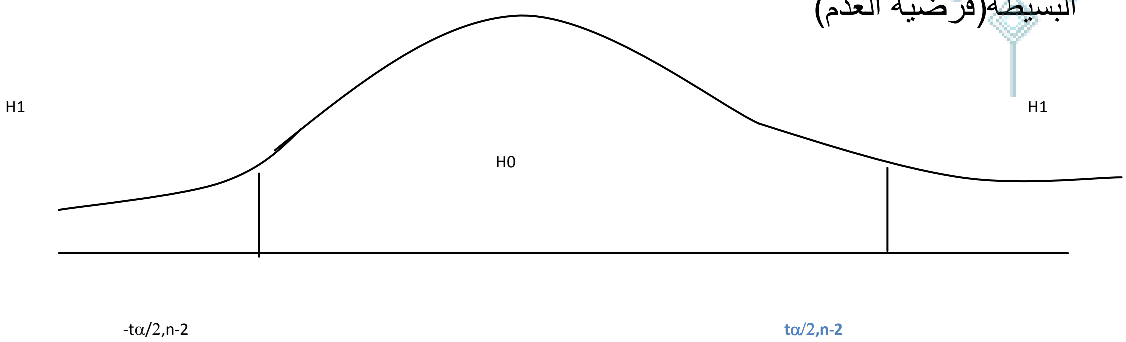
$$-4,5485 \leq B \leq -3,3205$$

إختبار B :

$$\begin{cases} H_0 : B = B_0 \\ H_1 : B \neq B_0 \end{cases}$$

نحسب:
$$t_{cal} = \frac{B - B_0}{\left[\hat{\sigma}_\varepsilon^2 / \Sigma(X_t - \bar{X})^2\right]^{\frac{1}{2}}}$$

t_{cal} (ستودنت المحسوبة) نقارنها بالقيمة المجدولة $t_{\alpha/2,n-2}$ لقبول أو رفض H_0 الفرضية البسيطة(فرضية العدم)



اذا عوضنا B_0 =0 نسمي هذا الاختبار باختبار المعنوية ، قبول H_0 يعنى ان المعلمة غير معنوية، قبول H_1 نقول أن المعلمة معنوية

مثال2-9: بالنسبة للمثال السابقة لحساب معنوية المعالم عند مستوى معنويةα= 5 % نقوم بحساب قيمة ستودنت المحسوبة لـ B كمايلي :

$$t_{cal} = \frac{B - 0_0}{\left[\hat{\sigma}_\varepsilon^2 / \sum (x_t - \bar{x})^2\right]^{\frac{1}{2}}} = \frac{-3,9345}{0,2968} = -13,2564$$

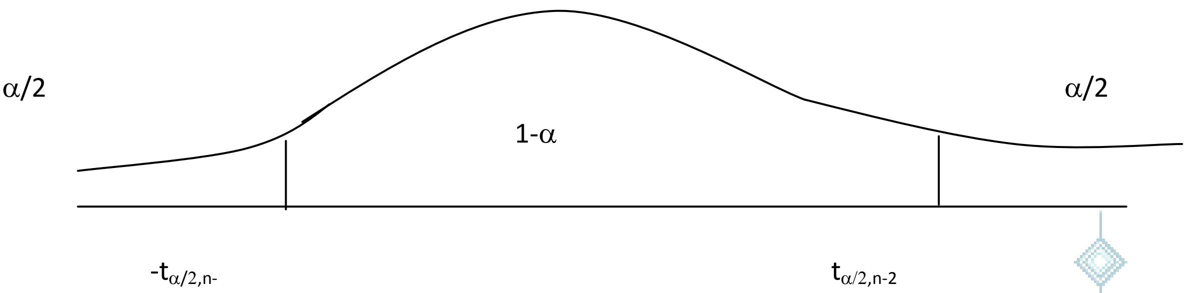
القيمة المجدولة $t_{\alpha/2,n-2} = t_{0,025;23} = 2,069$ وبالتالي $|t_{cal}| > t_{\alpha/2,n-2}$ منه نقبل H_1 وبالتالي المعلمة B بمستوى معنوية 5% .

بالنسبة لـ α:

مجال الثقة لـ α: نحن لدينا

$$T=\frac{\hat{\alpha}-\alpha}{\left(\hat{\sigma}_{\varepsilon}^{2}\left[\frac{1}{n}+\frac{\bar{x}^{2}}{\sum(x_t-\bar{x})^{2}}\right]\right)^{\frac{1}{2}}}$$

رسم توزيع ستودنت يعطى كمايلي :



$$P(-t_{\alpha/2}\le T\le t_{\alpha/2})=1-\alpha$$

$$-t_{\alpha/2}\le\frac{\hat{\alpha}-\alpha}{\left(\hat{\sigma}_{\varepsilon}^{2}\left[\frac{1}{n}+\frac{\bar{x}^{2}}{\sum(x_t-\bar{x})^{2}}\right]\right)^{\frac{1}{2}}}\le t_{\alpha/2}$$

إذا :

$$\underbrace{\hat{\alpha}-t_{\alpha/2}\left(\hat{\sigma}_{\varepsilon}^{2}\left[\frac{1}{n}+\frac{\bar{x}^{2}}{\sum(x_t-\bar{x})^{2}}\right]\right)^{\frac{1}{2}}}_{B_1}\le\alpha\le\underbrace{\hat{\alpha}+t_{\alpha/2}\left(\hat{\sigma}_{\varepsilon}^{2}\left[\frac{1}{n}+\frac{\bar{x}^{2}}{\sum(x_t-\bar{x})^{2}}\right]\right)^{\frac{1}{2}}}_{B_2}$$

إذا تقدير $\hat{\alpha}$ باحتمال معطى 1-α (مستوى الثقة) يجب أن ينتمي إلى المجال $[B_1,B_2]$ ومنه : $P\{B\in[B_1,B_2]\}=1-\alpha$

مثال10-2: مجال الثقة للمعلمة $\hat{\alpha}$ لنموذج الكميات و الأسعاربمستوى ثقة 95 $(1-\alpha)$ ، قيمة ستودنت المجدولة تعطى بـ $t_{\alpha/2,n-2}=t_{0,025;23}=2,069$ ، وعليه مجال الثقة يعطى بـ :

$$P\{\alpha\in[417,2445;469,015]\}=95\%$$

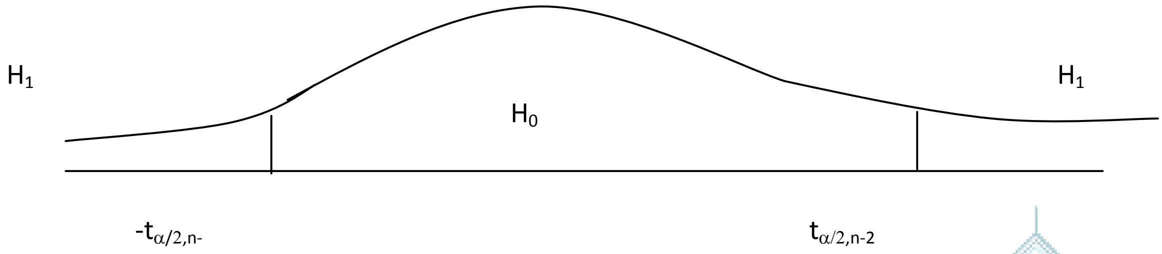
إختبار α:

$$\begin{cases}H_0:\alpha=\alpha_0\\ H_1:\alpha\neq\alpha_0\end{cases}$$

نحسب:

$$t_{cal}=\frac{\alpha-\alpha_0}{\left[\hat{\sigma}_\varepsilon^2\left(\frac{1}{n}+\frac{\bar{x}^2}{\sum(x_t-\bar{x})^2}\right)\right]^{\frac{1}{2}}}$$

t_{cal} (ستودنت المحسوبة) نقارنها بالقيمة المجدولة $t_{\alpha/2,n-2}$ لقبول أو رفض H_0 الفرضية البسيطة(فرضية العدم)



اذا عوضنا $\alpha_0=0$ نسمي هذا الاختبار باختبار المعنوية ، قبول H_0 يعنى أن المعلمة غير معنوية، قبول H_1 نقول أن المعلمة معنوية

مثال2-11: بالنسبة للمثال السابقة لحساب معنوية المعالمة α عند مستوى معنوية α= 5 % نقوم بحساب قيمة ستودنت المحسوبة لـ α كمايلي :

$$t_{cal}=\frac{\alpha-0}{\left[\hat{\sigma}_\varepsilon^2\left(\frac{1}{n}+\frac{\bar{x}^2}{\sum(x_t-\bar{x})^2}\right)\right]^{\frac{1}{2}}}=\frac{443{,}1307}{12{,}5130}=35{,}4132$$

القيمة المجدولة $t_{\alpha/2,n-2}=t_{0,025;23}=2{,}069$ وبالتالي $t_{cal}>t_{\alpha/2,n-2}$ منه نقبل H_1 وبالتالي المعلمة α بمستوى معنوية 5% .

2-6- بناء مجال الثقة لـ σ_ε^2 :

$$\varepsilon_t \mapsto N(0,\sigma_\varepsilon^2)$$

$$(n-2)\hat{\sigma}_\varepsilon^2/\sigma_\varepsilon^2 \mapsto \chi_{n-2}^2$$

$$\mathrm{Prob}\left[\chi_{1-\alpha/2}^2\le\frac{(n-2)\hat{\sigma}_\varepsilon^2}{\sigma_\varepsilon^2}\le\chi_{\alpha/2}^2\right]=1-\alpha$$

$$\mathrm{Prob}\left[\frac{(n-2)\hat{\sigma}_\varepsilon^2}{\chi_{\alpha/2}^2}\le\sigma_\varepsilon^2\le\frac{(n-2)\hat{\sigma}_\varepsilon^2}{\chi_{1-\alpha/2}^2}\right]=1-\alpha$$

$$\sigma_\varepsilon^2 \in \left[\frac{(n-2)\hat{\sigma}_\varepsilon^2}{\chi_{\alpha/2}^2}, \frac{(n-2)\hat{\sigma}_\varepsilon^2}{\chi_{1-\alpha/2}^2}\right]$$

مثال2-12: بأخذ المثال السابق لحساب مجال الثقة لتباين الأخطاء σ_ε^2 بمستوى ثقة 95%
نقوم بايجاد قيمة كاي تربيع $\chi_{\alpha/2}^2$ بدرجة حرية 23 و $\chi_{1-\alpha/2}^2$ بدرجة حرية 23 :

$$\chi_{1-\alpha/2,23}^2 = \chi_{0,975;23}^2 = 11,6885 \quad \text{و} \quad \chi_{\alpha/2}^2 = \chi_{0,025;23}^2 = 38,0756$$

$$\sigma_\varepsilon^2 \in \left[\frac{(n-2)\hat{\sigma}_\varepsilon^2}{\chi_{\alpha/2}^2}, \frac{(n-2)\hat{\sigma}_\varepsilon^2}{\chi_{1-\alpha/2}^2}\right] = \left[\frac{23\times 680,5492}{11,6885}, \frac{23\times 680,5492}{38,0756}\right]$$

اذا $\sigma_\varepsilon^2 \in = [411,09 \ ; \ 1339,13]$ بمستوى ثقة 95%

2-7-معادلة وجدول تحليل التباين:

2-7-1- معادلة تحليل التباين:

لدينا مايلي : $\sum e_t = 0$ **و** $\sum Y_t = \sum \hat{Y}_t$

يمكن أن نبين ذلك من خلال مايلي :

المساواة الأولى :

$$Y_t = \hat{\alpha} + \hat{B}X_t + e_t \rightarrow \sum Y_t = \sum \hat{\alpha} + \hat{B}\sum X_t + \sum e_t$$

$$\sum Y_t - n\hat{\alpha} + \hat{B}\sum X_t = \sum e_t$$

مع العلم أن : $\hat{\alpha} = \bar{Y} - \hat{B}\bar{X}$ أي $n\hat{\alpha} = \sum Y_t - \hat{B}\sum X_t$

إذا : $\sum e_t = 0$

أما المساواة الثانية : $\sum Y_t = \sum \hat{Y}_t$ إذ يوجد مساواة مابين متوسط السلسلة المشروحة ومتوسط السلسلة المصححة:

$$Y_t - \hat{Y}_t = e_t \rightarrow \sum Y_t - \sum \hat{Y}_t = \sum e_t = 0 \rightarrow \bar{Y} = \bar{\hat{Y}}$$

مما سبق يمكن استنتاج المعادلة الأساسية لتحليل التباين:

$$\sum_t (Y_t - \bar{Y})^2 = \sum_t (\hat{Y}_t - \bar{\hat{Y}})^2 + \sum_t e_t^2$$

أي:
$$\sum_t (Y_t-\bar{Y})^2=\sum_t(\hat{Y}_t-\bar{Y})^2+\sum_t e_t^2$$

$$SCT \quad = \quad SCE \quad + \quad SCR$$

مجموع المربعات البواقي   مجموع المربعات المفسرة   مجموع المربعات الكلية

تسمح لنا هذه المعادلة من معرفة أو الحكم على جودة التقدير؛ حيث كلما كان تباين المفسر أقرب من التباين الكلي، كلما كان الانحدار جيد، ويمكن حسابه بالعلاقة التالية:

$$R^2=\frac{\sum_t(\hat{Y}_t-\bar{Y})^2}{\sum_t(Y_t-\bar{Y})^2}=1-\frac{\sum_t e_t{}^2}{\sum_t(Y_t-\bar{Y})^2}$$
وهذا ما يسمى بمعامل التحديد

أما R يسمى بمعامل الارتباط .

$$R^2=1-\frac{\sum_t e_t{}^2}{\sum_t(Y_t-\bar{Y})^2} \quad , \quad R^2\in[0,1]$$

يمكن كتابة معامل التحديد بطريقة أخرى: $e_t=Y_t-\hat{Y}_t=Y_t-\hat{\alpha}-\hat{B}X_t$

$$e_t=Y_t-\bar{Y}+\hat{B}\bar{X}-\hat{B}X_t=(Y_t-\bar{Y})-\hat{B}(X_t-\bar{X})$$

$$\Rightarrow e_t^2=(Y_t-\bar{Y})^2+\hat{B}^2(X_t-\bar{X})^2-2\hat{B}(X_t-\bar{X})(Y_t-\bar{Y})$$

بوضع : $y_t=Y_t-\bar{Y}, x_t=X_t-\bar{X}$ وبإدخال المجموع ($\sum$)

$$\sum e_t^2=\sum y_t^2+\hat{B}^2\sum x_t^2-2\hat{B}\sum x_t y_t$$

حيث :
$$\hat{B}=\frac{\sum x_t y_t}{\sum x_t^2}\Rightarrow \hat{B}\sum x_t^2=\sum x_t y_t$$

إذ : $\sum e_t^2=\sum y_t^2-\hat{B}^2\sum x_t^2$

$$\Rightarrow R^2=1-\frac{\sum y_t^2-\hat{B}^2\sum x_t^2}{\sum y_t^2}=\hat{B}^2\frac{\sum x_t^2}{\sum y_t^2}$$

$$R^2=\hat{B}^2\frac{\sum x_t^2}{\sum y_t^2}=\hat{B}^2\frac{\sum(X_t-\bar{X})^2}{\sum(Y_t-\bar{Y})^2}$$

مثال2-13 : بأخذ المثال المتعلق بالكمية المطلوبة و السعر فان معامل التحديد للنموذج هو:

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_t e_t^2}{\sum_t (Y_t - \bar{Y})^2} = 1 - \frac{15652,63378}{135245,76} = 0,8842$$

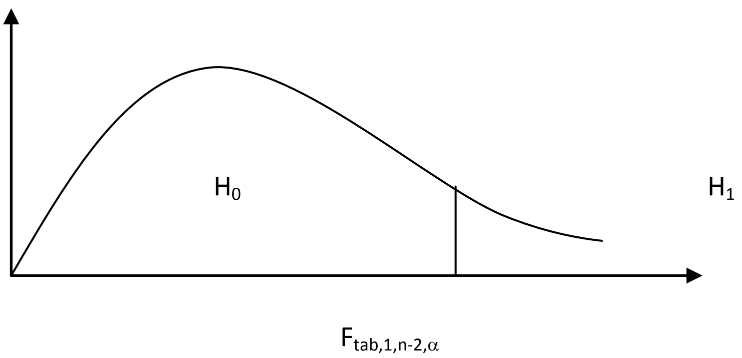
وبالتالي نقول أن السعر يفسر الاستهلاك بنسبة 88,42%

-2-7-2- __جدول تحليل التباين:__ ان الهدف من جدول التحليل هو إختبار ما يلي :

$$H_0: \quad B = B_0 = 0$$
$$H_1: \quad B \neq B_0 \neq 0$$

ويعطى جدول تحليل التباين للنموذج البسيط كالتالي :

مصدر التغير	مجموع المربعات	درجة الحرية	التباين (مربع المتوسطات)	فيشر المحسوب F_{cal}
X (المتغيرة المفسِرة) البواقي	$=\sum(\hat{y}_t - \bar{y})^2$ $SCR = \sum e_t^2$	1 n-2	$SCE/1$ $SCR/n-2$	$\frac{SCE/1}{SCR/n-2}$
المجموع الكلي	$=\sum(y_t - \bar{y})^2$	n-1		



1-إذا كانت $F_{tab}>F_{cal}$ في هذه الحالة تباين المتغيرة المفسرة يساوي تباين البواقي، إذ في هذه الحالة X_t غير معنوي؛ إذا نرفض النموذج.(نقبل H_0)

2-إذا كانت $F_{tab}<F_{cal}$ في هذه الحالة المتغيرة المفسرة لا يساوي تباين البواقي، إذ في هذه الحالة X_t تفسر جيدا النموذج؛ إذا نقبل النموذج. (نقبل H_1)

ملاحظة: يستعمل هذا الاختبار لمعرفة ما إذا كان هناك علاقة بين X و Y .

-يمكن حساب F_{cal} باستعمال العلاقة التالية : $F=\dfrac{R^2}{(1-R^2)/n-2}$

مثال2-14 : لحساب معنوية النموذج لنموذج الاستهلاك و الدخل بمستوى معنوية 5 % نستعمل اختبار فيشر، جدول تحليل التباين هو :

مصدر التغير	مجموع المربعات	درجة الحرية	التباين (مربع المتوسطات)	فيشر المحسوب F_{cal}
X (المتغيرة المفسرة) البواقي	$SCE=\sum(\hat{y}_t-\bar{y})^2=119593{,}1263$ $SCR=\sum e_t^2=15652{,}63378$	1 n-2=23	$SCE/1$ = 119593,126 $SCR/n-2$ =680,5492	$F_{cal}=\dfrac{SCE/1}{SCR/n-2}=175{,}73$
المجموع الكلي	$SCT=\sum(y_t-\bar{y})^2=135245{,}76$	n-1=24		

القيمة المجدولة لفيشر هي $F_{\alpha,V1;V2}=F_{0,05;1.23}=4{,}28$

القيمة المحسوبة تفوق القيمة المجدولة $F_{cal}>F_{\alpha,V1;V2}$ و وبالتالي نقبل H_1 النموذج معنوي.

يتم تلخيص النموذج السابق في المعادلة التالية :

$$\begin{array}{llll}
\hat{Q}_t & = & 443{,}13 & -\ 3{,}93\ p_t \\
s.e & = & (12{,}5113) & (0{,}2968) \\
t & = & (35{,}4132)^* & (-13{,}2564)^*
\end{array}$$

$$R^2=0{,}8842\quad ,F^*=175{,}73, n=25$$

(SE) القيمة بين قوسين تمثل الانحرف المعياري

(t) القيمة بين قوسين تمثل ستودنت المحسوبة

* تمثل المعنوية بـ 5%

-2-8- التنبؤ في النموذج الخطي البسيط :

بعد القيام بتقدير معاملات النموذج، يمكن القيام بالتنبؤ وذلك للمدى h .

وليكن النموذج المقدر كالتالي : $Y_t = \hat{\alpha} + \hat{B}X_t + e_t \qquad , t = 1,2,...,n$

إذا كانت قيمة المتغيرة المفسِرة X_t معلومة في الفترة n+1 (X_{n+1})، التنبؤ معطى بـ :
$\hat{Y}_{n+1} = \hat{\alpha} + \hat{B}X_{n+1}$

-2-8-1- **تحيز التنبؤ:** لكي نبين أن هذا التنبؤ غير متحيز نستعمل مايلي :

خطأ التنبؤ : $e_{n+1} = Y_{n+1} - \hat{Y}_{n+1}$

يمكن كتابته كالتالي : $e_{n+1} = (\alpha + BX_{n+1} + \varepsilon_{n+1}) - (\hat{\alpha} + \hat{B}X_{n+1})$

أي : $e_{n+1} = (\alpha - \hat{\alpha}) + (B - \hat{B})X_{n+1} + \varepsilon_{n+1}$

باستعمال فرضيات النموذج لدينا؛ $E(e_{n+1}) = 0$ ، يمكن الحصول على؛ $E(e_{n+h}) = 0$

تحصلنا على عدم التحيز بتطبيق المباشر للإنحدار المقدر غير أنه في الميدان التطبيقي درجة الأهمية التي نليها للتنبؤ ضئيلة؛ إذا كنا لا نعلم درجة الثقة التي يمكن أن نعطيها لها، ومن أجل ذلك نقوم بحساب تباين خطأ التنبؤ، والذي يسمح لنا بتحديد مجال الثقة لأطراف التنبؤ.

أ-تباين خطأ التنبؤ:

$$\mathrm{var}(e_{n+1}) = \sigma_\varepsilon^2 \left[\frac{1}{n} + \frac{(X_{n+1} - \bar{X})^2}{\sum (X_t - \bar{X})^2} + 1 \right]$$

من خلال هذا التباين نستنتج أن عدم الدقة في التنبؤ ضعيف كل كانت قيمة n كبيرة و تباين المعالم المقدر.

مع العلم أن ε_t يتبع التوزيع الطبيعي؛ من أجل تحديد مجال ثقة بـ(1-α) للتنبؤ :

$$e_{n+1} = Y_{n+1} - \hat{Y}_{n+1} \mapsto N(0, \sigma_\varepsilon^2 \left[\frac{1}{n} + \frac{(X_{n+1} - \bar{X})^2}{\sum (X_t - \bar{X})^2} + 1 \right])$$

وهذا إن كان σ_ε^2 معلوم فإن:

$$Z = \frac{Y_{n+1} - \hat{Y}_{n+1}}{\left(\sigma_\varepsilon^2 \left[\frac{1}{n} + \frac{(X_{n+1} - \bar{X})^2}{\sum (X_t - \bar{X})^2} + 1 \right] \right)^{\frac{1}{2}}} \mapsto N(0,1)$$

أما في حالة σ_{ε}^{2} غير معلومة لدينا مايلي :

بتعويض قيمة σ^2 بتقديرها $\hat{\sigma}^2$ لدينا :

$$\frac{Y_{n+1}-\hat{Y}_{n+1}}{\left[\hat{\sigma}_{\varepsilon}^{2}\left(\frac{1}{n}+\frac{(X_{n+1}-\bar{X})^2}{\Sigma(X_t-\bar{X})^2}+1\right)\right]^{\frac{1}{2}}} \mapsto t_{n-2}$$

إذا مجال الثقة لـ Y_{n+1} هو :

$$\hat{Y}_{n+1}-t_{\alpha/2}\left[\hat{\sigma}_{\varepsilon}^{2}\left(\frac{1}{n}+\frac{(X_{n+1}-\bar{X})^2}{\Sigma(X_t-\bar{X})^2}+1\right)\right]^{\frac{1}{2}} \le Y_{t+1} \le \hat{Y}_{n+1}+t_{\alpha/2}\left[\hat{\sigma}_{\varepsilon}^{2}\left(\frac{1}{n}+\frac{(X_{n+1}-\bar{X})^2}{\Sigma(X_t-\bar{X})^2}+1\right)\right]^{\frac{1}{2}}$$

وحتى إن كنا نعلم بدقة قيمة α, B ؛ فإنه يبقى عنصر من عناصر عدم التأكد متعلق بتنبؤ Y_{n+1} بسبب ε_{n+1} ، والتي تذبذب أثناء التنبؤ، وهذا ما يعطي أهمية لتنبؤ التوقع لـ Y_{n+1} أي :

$$E(Y_{n+1})=\alpha+BX_{n+1}$$

$$E(Y_{n+1})=\alpha+BX_{n+1} \Rightarrow \hat{Y}_{n+1}-E(Y_{n+1}) \mapsto N(0,\sigma^2\left[\frac{1}{n}+(\bar{X}-X_{n+1})^2/\Sigma(X_t-\bar{X})^2\right])$$

<u>في حالة σ_{ε}^{2} معروف :</u>

$$Z=\frac{\hat{Y}_{n+1}-E(Y_{n+1})}{\left[Var(\hat{Y}_{n+1})\right]^{\frac{1}{2}}} \mapsto N(0,1)$$

$$P\in\{Z\in[t_1,t_2]\}=1-\alpha$$

$$\Leftrightarrow P\in\{t_1\le Z\le t_2\}=1-\alpha$$

$$\Leftrightarrow P\in\left\{Y_{n+1}-t_2(Var(\hat{Y}_{n+1}))^{\frac{1}{2}} \le E(Y_{n+1}) \le \hat{Y}_{n+1}+t_1(Var(\hat{Y}_{n+1}))^{\frac{1}{2}}\right\}=1-\alpha$$

<u>ملاحظة:</u> في حالة σ_{ε}^{2} غير معروف، نأخذ قيم t_1 و t_2 من جدول ستودنت .

مثال2-15 : بأخذ نموذج الكمية و السعر تنبأ بالكمية المطلوبة اذا كان السعر يساوي 14 ثم أوجد مجال الثقة للكمية المطلوبة ، و مجال توقع الكمية المطلوبة بمستوى ثقة 95%

الكمية المتنبأ بها هي :

$$\hat{Q}_{t+1} = 443{,}13 - 3{,}93 p_{t+1} = 443{,}13 - 3{,}93(14) = 388{,}11$$

مجال الثقة للكمية المتنبأ بها هو:

$$\hat{Y}_{n+1} - t_{\alpha/2}\left[\hat{\sigma}_{\varepsilon}^{2}\left(\frac{1}{n} + \frac{(X_{n+1}-\bar{X})^{2}}{\Sigma(X_t-\bar{X})^{2}} + 1\right)\right]^{\frac{1}{2}} \le Y_{t+1} \le \hat{Y}_{n+1} + t_{\alpha/2}\left[\hat{\sigma}_{\varepsilon}^{2}\left(\frac{1}{n} + \frac{(X_{n+1}-\bar{X})^{2}}{\Sigma(X_t-\bar{X})^{2}} + 1\right)\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$388{,}11 - 2{,}069\left[680{,}5492\left(\frac{1}{25} + \frac{(14-38{,}32)^{2}}{7725{,}44} + 1\right)\right]^{\frac{1}{2}} \le Y_{t+1} \le 388{,}11 + 2{,}069\left[680{,}5492\left(\frac{1}{25} + \frac{(14-38{,}32)^{2}}{7725{,}44} + 1\right)\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$348{,}4592 \le Y_{t+1} \le 427{,}760$$

بمستوى ثقة 95%

مجال الثقة لتوقع الكمية المتنبأ بها هو:

$$\hat{Y}_{n+1} - t_{\alpha/2}\left[\hat{\sigma}_{\varepsilon}^{2}\left(\frac{1}{n} + \frac{(X_{n+1}-\bar{X})^{2}}{\Sigma(X_t-\bar{X})^{2}}\right)\right]^{\frac{1}{2}} \le E(Y_{t+1}) \le \hat{Y}_{n+1} + t_{\alpha/2}\left[\hat{\sigma}_{\varepsilon}^{2}\left(\frac{1}{n} + \frac{(X_{n+1}-\bar{X})^{2}}{\Sigma(X_t-\bar{X})^{2}}\right)\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$388{,}11 - 2{,}069\left[680{,}5492\left(\frac{1}{25} + \frac{(14-38{,}32)^{2}}{7725{,}44}\right)\right]^{\frac{1}{2}} \le E(Y_{t+1}) \le 388{,}11 + 2{,}069\left[680{,}5492\left(\frac{1}{25} + \frac{(14-38{,}32)^{2}}{7725{,}44}\right)\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$375{,}298 \le E(Y_{t+1}) \le 400{,}921$$

بمستوى ثقة 95%

الفصل الثالث

الانحدار الخطي المتعدد

قمنا في الفصل السابق بعرض النموذج الخطي البسيط أو مايسمى بالنموذج الخطي ذات متغيرة مفسِرة واحد و الذي هو حالة خاصة من النموذج الخطي المتعدد؛ الذي يقوم بتفسير المتغيرة التابعة (الداخلية أو المفسَرة) عن طريق عدة متغيرات مفسِرة.

3-1- تمثيل و تقدير النموذج المتعدد:

3-1-1- التمثيل المصفوفي للنموذج المتعدد :

يكتب النموذج النموذج المتعدد كالتالي :

$$Y_t = B_1 + B_2 X_{2t} + B_3 X_{3t} + . \quad . \quad . + B_k X_{kt} + \varepsilon_t \qquad t = 1,2,\ldots,n \quad (1\text{-}3)$$

[تحتوي على k-1 متغيرة مفسِرة $X_2, \ldots, X_{k-1}$]

مثال 3-1 : لدينا المعطيات المتعلقة بالسعرالوحدة المتوسط لمنتوج (MPU_t) و الكمية المطلوبة (QD_t) و السعر المتوسط للمنتوج المستورد (IPU_t) للفترة 1999 -2013؛ فان النموذج يكتب كمايلي :

$$QD_t = B_1 + B_2 MPU_t + B_3 IPU_t + \varepsilon_t \qquad t = 1,2,\ldots,14$$

بوضع : (QD_t) تمثل Y_t ، و (MPU_t) يمثل X_{2t} و (IPU_t) تمثل X_{3t} فان النموذج يكتب :

$$Y_t = B_1 + B_2 X_{2t} + B_3 X_{3t} + \varepsilon_t \qquad t = 1,2,\ldots,14$$

تمثيل النموذج المتعدد في شكل نظام :

بتعويض قيم t في المعادلة (I) نحصل على النظام التالي :

$$\begin{cases} Y_1 = B_1 + B_2 X_{21} + B_3 X_{31} + . \quad . \quad . + B_k X_{k,1} + \varepsilon_1 \\ Y_2 = B_1 + B_2 X_{22} + B_3 X_{32} + . \quad . \quad . + B_k X_{k,2} + \varepsilon_2 \\ Y_3 = B_1 + B_2 X_{23} + B_3 X_{33} + . \quad . \quad . + B_k X_{k,3} + \varepsilon_3 \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ Y_n = B_1 + B_2 X_{2n} + B_3 X_{3n} + . \quad . \quad . + B_k X_{k,n} + \varepsilon_n \end{cases}$$

هذا النظام يمكن التعبير عنه بالمصفوفات بالشكل التالي :

$$Y = XB + \varepsilon \qquad (2\text{-}3)$$

حيث :

$$X=\begin{bmatrix}1 & X_{21} & X_{31} & . & . & X_{k,1}\\ 1 & X_{22} & X_{32} & . & . & X_{k,2}\\ . & . & . & . & . & .\\ 1 & X_{2n} & X_{3n} & . & . & X_{k,n}\end{bmatrix}_{(n,k)} \text{،}\quad B=\begin{bmatrix}B_1\\ B_2\\ .\\ .\\ B_k\end{bmatrix}_{(k,1)} \text{،}$$

$$Y=\begin{bmatrix}Y_1\\ Y_2\\ .\\ .\\ Y_n\end{bmatrix}_{(n,1)} \text{،}\quad \varepsilon=\begin{bmatrix}\varepsilon_1\\ \varepsilon_2\\ .\\ .\\ \varepsilon_n\end{bmatrix}_{(n,1)}.$$

مثال 2-3 : لدينا المعطيات المثال3-1 بالسعرالوحدة المتوسط لمنتوج (MPU_t) و الكمية المطلوبة (QD_t) و السعر المتوسط للمنتوج المستورد (IPU_t) للفترة 2000 -2013؛:

السنة	الكمية المطلوبة $Y_t(QD_t)$	السعرالوحدة المتوسط للمنتوج X_2 (MPU_t)	السعر المتوسط للمنتوج مستورد X_3 (IPU_t)
2000	10	144	20
2001	20	133	22
2002	30	120	24
2003	40	111	27
2004	50	99	30
2005	60	90	34
2006	70	85	38
2007	80	75	43
2008	90	70	48
2009	100	55	53
2010	110	58	58
2011	120	33	60
2012	130	25	65
2013	140	20	68

فان النظام يكتب كمايلي :

$$\begin{cases} Y_1 = B_1 + B_2 X_{21} + B_3 X_{31} + \varepsilon_1 \\ Y_2 = B_1 + B_2 X_{22} + B_3 X_{32} + \varepsilon_2 \\ Y_3 = B_1 + B_2 X_{23} + B_3 X_{33} + \varepsilon_3 \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ Y_{14} = B_1 + B_2 X_{2,14} + B_3 X_{3,14} + \varepsilon_{14} \end{cases}$$

هذا النظام يمكن التعبير عنه بالمصفوفات بالشكل التالي :

$$Y = XB + \varepsilon$$

حيث : $X = \begin{bmatrix} 1 & 144 & 20 \\ 1 & 133 & 22 \\ . & . & . \\ 1 & 20 & 68 \end{bmatrix}_{(14,3)}$ ، $B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{bmatrix}_{(3,1)}$ ، $Y = \begin{bmatrix} 10 \\ 20 \\ . \\ . \\ 140 \end{bmatrix}_{(14,1)}$ ،

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ . \\ . \\ \varepsilon_{14} \end{bmatrix}_{(14,1)}$$

فرضيات النموذج :

1- $E(\varepsilon) = 0$ ؛ شعاع الأخطاء معدوم في المتوسط أي:

$$E(\varepsilon) = \begin{bmatrix} E(\varepsilon_1) \\ E(\varepsilon_2) \\ . \\ . \\ E(\varepsilon_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ . \\ . \\ 0 \end{bmatrix}$$

2- تباين الأخطاء ثابت و التباين المشترك للأخطاء يساوي الصفر:

$$\begin{cases} Var(\varepsilon_t) = \sigma_\varepsilon^2, t = 1,2,\ldots,n \Leftrightarrow Var(\varepsilon) = \sigma_\varepsilon^2 I_n = \Omega_\varepsilon \\ Cov(\varepsilon_t, \varepsilon_{t'}) = 0, \forall t \neq t' \end{cases}$$

حيث : $E(\varepsilon_t^2)=\sigma_\varepsilon^2$ ونعني بذلك تجانس التباين"Homoscédasitité "
$t=1,2,\dots,n$

و $Cov(\varepsilon_t,\varepsilon_{t'})=0, \forall t\neq t'$ ونعني بأن الأخطاء غير مرتبطة فيما بينها.

أي :

$$Var(\varepsilon)=\begin{bmatrix} \mathrm{var}(\varepsilon_1) & \mathrm{cov}(\varepsilon_1\varepsilon_2). & . & . & \mathrm{cov}(\varepsilon_1\varepsilon_n) \\ \mathrm{cov}(\varepsilon_2\varepsilon_1) & \mathrm{var}(\varepsilon_2). & . & . & \mathrm{cov}(\varepsilon_2\varepsilon_n) \\ . & . & . & . & . \\ \mathrm{cov}(\varepsilon_n\varepsilon_1) & \mathrm{cov}(\varepsilon_n\varepsilon_2). & . & . & \mathrm{var}(\varepsilon_n) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \sigma_\varepsilon^2 & 0. & . & . & 0 \\ 0 & \sigma_\varepsilon^2. & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0. & . & . & \sigma_\varepsilon^2 \end{bmatrix}$$

3- المصفوفة X غير عشوائية (non stochastique): يعني أن قيم المتغيرات المستقلة يمكن مراقبتها.

4- الأخطاء تتبع التوزيع الطبيعي : $\varepsilon \mapsto N(0,I_n\sigma_\varepsilon^2)$.

5- $Cov(x_{it},\varepsilon_t)=0$ ، الأخطاء مستقلة عن المتغيرات المفسِرة .

6-عدم وجود إرتباط مابين المتغيرات المفسِرة، هذا يعني أن المصفوفة $(X'X)$ تقبل معكوس أي المصفوفة العكسية $(X'X)^{-1}$ موجودة.

7- $(X'X)/n$ تؤول إلى مصفوفة منتهية غير احادية .

3-1-2-التقدير بطريقة المربعات الصغرى(MCO): تهدف طريقة المربعات الصغرى إلى إيجاد تقدير b لـ B الذي يصغر مجوع مربعات الأخطاء e بين القيمة المقدرة $\hat{Y}$ والقيمة الحقيقية للمتغير التابع Y للنموذج التالي :

$$Y=XB+\varepsilon$$

أي :

$$\mathrm{Min}\sum_{t=1}^{n}(y_t-\hat{y}_t)^2=Min(e'e)$$

بتعويض قيمة المجهول B بالقيمة المقدرة له b (أي $\hat{B}$)، نعرف الشعاع(e) للأخطاء كالتالي :

$$e = Y - \hat{Y}$$

$$e = \begin{pmatrix} y_1 - \hat{y}_1 \\ y_2 - \hat{y}_2 \\ . \\ . \\ y_n - \hat{y}_n \end{pmatrix}$$

حيث : $\hat{Y} = Xb$

إذا : $e = Y - Xb$

نقوم بتصغير $e'e$ (مجموع المربعات) مع العلم أن e' هو منقول e

$$\text{Min}\,(e'e) = (Y - Xb)'(Y - Xb) = (Y - \hat{Y})'(Y - \hat{Y})$$

نضع :

$$\text{L}(Y, X, b) = (Y - \hat{Y})'(Y - \hat{Y}) = \hat{Y}'\hat{Y} - 2\hat{Y}'Y + Y'Y$$

$$\text{L}(Y, X, b) = b'X'Xb - 2b'X'Y + Y'Y$$

إذن نقوم بتدنئة أو تصغير هذه العبارة أعلاه أي : $\text{MinL}\,(Y, X, b)$

من أجل تصغير هذه الدالة بالنسبة b ، يجب على مشتق $\text{L}(Y, X, b)$ بالنسبة b أن يساوي الصفر 0 .

$$\frac{\partial \text{L}(Y, X, b)}{\partial \text{b}} = 0 \Rightarrow 2(X'X)b - 2X'Y = 0$$

$$\Rightarrow 2(X'X)b = 2X'Y = 0$$

$$\boxed{b = (X'X)^{-1}X'Y}$$

أي:

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ . \\ . \\ b_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n & \sum X_{2t} & \sum X_{3t} & . \; . \; . & \sum X_{kt} \\ \sum X_{2t} & \sum X_{2t}^2 & \sum X_{2t}X_{3t} & . \; . \; . & \sum X_{2t}X_{kt} \\ \sum X_{3t} & \sum X_{2t}X_{3t} & \sum X_{3t}^2 & . \; . \; . & \sum X_{3t}X_{kt} \\ . & . & . & . \; . \; . & . \\ \sum X_{kt} & \sum X_{kt}X_{2t} & \sum X_{kt}X_{3t} & . \; . \; . & \sum X_{kt}^2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \sum Y_t \\ \sum X_{2t}Y_t \\ \sum X_{3t}Y_t \\ . \\ . \\ \sum X_{kt}Y_t \end{pmatrix}$$

هذا الحل محقق إذا كانت المصفوفة $X'X$ من النمط $((k,k))$ تقبل معكوس

النموذج يمكن كتابته كالتالي : $Y_t = b_1 + b_2X_{2t} + b_3X_{3t} + . \quad . \quad . \quad + b_kX_{kt} + e_t$

مثال 3-3 : بأخذ معطيات **مثال 2-3** فان تقدير المعالم عن طريق المربعات الصغرى هي :

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n & \sum X_{2t} & \sum X_{3t} \\ \sum X_{2t} & \sum X_{2t}^2 & \sum X_{2t}X_{3t} \\ \sum X_{3t} & \sum X_{3t}X_{2t} & \sum X_{3t}^2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \sum Y_t \\ \sum X_{2t}Y_t \\ \sum X_{3t}Y_t \end{pmatrix}$$

بتعويض القيم نحصل على :

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 1118 & 590 \\ 1118 & 109300 & 38772 \\ 590 & 38772 & 28464 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1050 \\ 62630 \\ 53250 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 46,9203772 & -0,26110029 & -0,61690704 \\ -0,26110029 & 0,00147066 & 0,00340882 \\ -0,61690704 & 0,00340882 & 0,00817905 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1050 \\ 62630 \\ 53250 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 63,3848145 \\ -0,52805381 \\ 1,2762318 \end{pmatrix}$$

وعليه تقدير النموذج:

$$\hat{Y}_t = 63,3848 - 0,5280X_{2t} + 1,2762X_{3t}$$

3-1-3-خصائص المقدرات: تتمثل خصائص المقدرات فيمايلي :

<u>أ-عدم التحيز:</u> $b = (X'X)^{-1}X'Y$

يمكن كتابة النموذج بطريقة مختلفة كالتالي :

$$\left.\begin{aligned} Y &= XB+\varepsilon \\ Y &= Xb+e \\ \hat{Y} &= Xb \end{aligned}\right\} \rightarrow e = Y-\hat{Y}$$ (البواقي =e)

نتحصل على : $b=(X'X)^{-1}X'Y=(X'X)^{-1}X'(XB+\varepsilon)$

$$b=(X'X)^{-1}X'(XB)+(X'X)^{-1}X'\varepsilon$$

$$b=B+(X'X)^{-1}X'\varepsilon \qquad \text{----------} \qquad (أ)$$

إذا : $E(b)=B+(X'X)^{-1}X'E(\varepsilon)=B$

لأن $E(\varepsilon)=0$

إذا المقدر b غير متحيز : $E(b)=B$

ب-الخطية :

لدينا : $b=(X'X)^{-1}X'Y$

نرمز بـ A للمصفوفة $(X'X)^{-1}X'$ ، $A_{n\times k}$

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & . & . & a_{2n} \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{k1} & a_{k2} & . & . & . & a_{kn} \end{bmatrix} \Rightarrow b=AY$$

بمأن : $b_i=\sum_{t=1}^{n}a_{it}y_t \quad , \ i=1,2\ldots,k$

إذا مختلف المقدرات b_i لـ B_i هي على شكل خطي مع المتغير Y؛ ومنه نستنتج أن التقدير b لـ B المحصل عليه باستعمال طريقة المربعات الصغرى خطي بالنسبة لـ Y .

-تباين b :

$$Var(b)=E\left[(b-B)(b-B)'\right]$$

باستعمال العلاقة (أ) لدينا : $b-B=(X'X)^{-1}X'\varepsilon$

نتحصل على :

$$Var(b)=E\left[(b-B)(b-B)'\right]=E\left[\left((X'X)^{-1}X'\varepsilon\right)\left((X'X)^{-1}X\varepsilon\right)'\right]$$

لأن : $\left((X'X)^{-1}\right)'=(X'X)^{-1}$ و $(AB)'=B'A'$

$$Var(b)=E\left[(b-B)(b-B)'\right]=(X'X)^{-1}X'E(\varepsilon\varepsilon')X(X'X)^{-1}$$

$$Var(b)=\sigma_{\varepsilon}^{2}I_n(X'X)^{-1})$$

إذا : $Var(b)=\Omega_{\varepsilon}(X'X)^{-1}$

حيث Ω_{ε} هي مصفوفة التباين والتباين المشترك :

$$\Omega_{\varepsilon}=E(\varepsilon\varepsilon')=\begin{bmatrix} E(\varepsilon_1\varepsilon_1) & E(\varepsilon_1\varepsilon_2) & . & . & . & E(\varepsilon_1\varepsilon_n) \\ E(\varepsilon_2\varepsilon_1) & E(\varepsilon_2\varepsilon_2) & . & . & . & E(\varepsilon_2\varepsilon_n) \\ . & . & . & . & . & . \\ E(\varepsilon_n\varepsilon_1) & E(\varepsilon_n\varepsilon_2) & . & . & . & E(\varepsilon_n\varepsilon_n) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \sigma_{\varepsilon}^{2} & 0 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & \sigma_{\varepsilon}^{2} & 0 & . & . & . & 0 \\ . & . & 0 & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & . & . & \sigma_{\varepsilon}^{2} \end{bmatrix}$$

مادام أن Ω_{ε} مجهول نقوم بتقديره (أي σ^2 مجهول)

3-1-4-نظرية قوص ماركوف Gauss-Markov

تنص النظرية على أنه تحتى الفرضيات المتعلقة بتقدير المعالم فان التقدير عن طريق المربعات الصغرى هو من أحسن التقديرات الخطية وله أصغر تباين أي أنه من أحسن التقديرات الخطية غير متحيزة BLUE (Best Linear Unbiaised Estimateur).(انظر الملحق للبرهان على النظرية)

برهان : نفترض مقدر خطي كمايلي : $B^{*}=A^{*}Y$

حتى يكون غير متحيز :

$$E(B^*)\overset{?}{=}E(A^*Y)$$

$$E(B^*) = E(A^*(XB+\epsilon))$$

حتى يتحقق $E(B^*) = B$

يجب: $A^*X = I$

بالنسبة للتباين لدينا:

$$B^* = A^*XB + A^*\epsilon$$

أي :

$$B^* - B = A^*\epsilon$$

$$Var(B^*) = E((B^* - E(B^*))(B^* - E(B^*))^{/})$$

$$Var(B^*) = E((B^* - B)(B^* - B)^{/})$$

$$Var(B^*) = E\left((A^*\varepsilon)(A^*\varepsilon)^{/}\right) = \sigma_\varepsilon^2 A^* A^{*/}$$

نضع : $D = A^* - (X^/X)^{-1}X^/$

منه : $DX = A^*X - (X^/X)^{-1}X^/X = I - I = 0$

نعوض العلاقة التالية : $A^* = D + (X^/X)^{-1}X^/$ في علاقة التباين نحصل على :

$$Var(B^*) = \sigma_\varepsilon^2\left(D + (X^/X)^{-1}X^/\right)\left(D + (X^/X)^{-1}X^/\right)^{/}$$

$$Var(B^*) = \sigma_\varepsilon^2\left(DD^/ + DX(X^/X)^{-1} + (X^/X)^{-1}X^/D^/ + (X^/X)^{-1}\right)$$

نحصل على :

$$Var(B^*) = \sigma_\varepsilon^2\left(DD^/ + (X^/X)^{-1}\right)$$

أي أن :

$$Var(B^*) - Var(b) = \sigma_\varepsilon^2 DD^/$$

المصفوفة $DD^/$ موجبة شبه معرفة ومنه النظرية محققة أي التباين عن طريق طريقة المربعات له الصغرى أصغر تباين.

3-1-5-تباين الأخطاء $\Omega_{\varepsilon} = \sigma_{\varepsilon}^{2} I_{n}$

$$Y = XB + \varepsilon$$

$$Var(\varepsilon) = \sigma_{\varepsilon}^{2} I_{n}$$

لدينا : $e = Y - Xb = Y - X\left(X'X\right)^{-1} X'Y$

$$e = (I - X\left(X'X\right)^{-1} X')Y$$

نسمي : $M = (I - X\left(X'X\right)^{-1} X')$

حيث هذه المصفوفة M دورية أي: $M^{2} = M, M' = M$

إذا لدينا : $e = MY = M(XB + \varepsilon) = M\varepsilon$

بمأن: $MX = 0$ حيث : $\left.\begin{matrix} MX = IX - X\left(X'X\right)^{-1} X'X \\ MX = IX - XI = 0 \end{matrix}\right\}$

مما سبق لدينا : $E(e'e) = E(\varepsilon' M' M \varepsilon) = E(\varepsilon' M \varepsilon)$

باستعمال الخاصية المتمثلة في أن اثر سلمية هو سلمية نفسها نتحصل على :

$$E(\varepsilon' M \varepsilon) = E(tr(\varepsilon' M \varepsilon))$$

$$E(\varepsilon' M \varepsilon) = E(tr(\varepsilon' M \varepsilon)) = \sigma_{\varepsilon}^{2} tr(M)$$

$$E(\varepsilon' M \varepsilon) = \sigma_{\varepsilon}^{2} tr(I) - \sigma_{\varepsilon}^{2} tr\left[X(X'X)^{-1} X'\right] = \sigma_{\varepsilon}^{2} tr(I) - \sigma_{\varepsilon}^{2} tr\left[(X'X)^{-1}(X'X)\right]$$

$$E(\varepsilon' M \varepsilon) = \sigma_{\varepsilon}^{2} (n-k)$$

$$\hat{\sigma}_{\varepsilon}^{2} = \frac{e'e}{n-k}$$

بتعويض التباين الأخطاء بتقديره، نتحصل على : $\hat{\Omega}_{b} = \hat{\sigma}_{\varepsilon}^{2} (X'X)^{-1}$

مثال 3-4: حساب تباين الأخطاء $\hat{\sigma}_{\varepsilon}^{2}$ للمثال السابق المتعلق بالكمية :

$$\hat{\sigma}_{\varepsilon}^{2} = \frac{e'e}{n-k} = \frac{\sum (y_{t} - \hat{y}_{t})^{2}}{n-k} = \frac{58{,}6118513}{14-3} = 5{,}32835$$

مصفوفة التباين و التباين المشترك للأخطاء هي :

$$\Omega_{\varepsilon} == \begin{bmatrix} \sigma_{\varepsilon}^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{\varepsilon}^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{\varepsilon}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5,32835 & 0 & 0 \\ 0 & 5,32835 & 0 \\ 0 & 0 & 5,32835 \end{bmatrix}$$

- مصفوفة التباين و التباين المشترك للمعالم هي :

$$\hat{\Omega}_b = \hat{\sigma}_{\varepsilon}^2 (X'X)^{-1} = 5,32835 \begin{pmatrix} 46,9203772 & -0,26110029 & -0,61690704 \\ -0,26110029 & 0,00147066 & 0,00340882 \\ -0,61690704 & 0,00340882 & 0,00817905 \end{pmatrix}$$

$$\hat{\Omega}_b = \hat{\sigma}_{\varepsilon}^2 (X'X)^{-1} = \begin{pmatrix} 250,008197 & -1,39123377 & -3,28709671 \\ -1,39123377 & 0,0078362 & 0,01816339 \\ -3,28709671 & 0,01816339 & 0,04358082 \end{pmatrix}$$

وعليه فإن العناصر القطرية هي التباينات: $Var(b_1)=250,008197$، $Var(b_2)=0,0078362$، $Var(b_3)=0,04358082$ و العناصر الأخرى تمثل التباينات المشتركة كمايلي :

$$\hat{\Omega}_b = \hat{\sigma}_{\varepsilon}^2 (X'X)^{-1} = \begin{pmatrix} Var(b_1) & Cov(b_1,b_2) & Cov(b_1,b_3) \\ Cov(b_2,b_1) & Var(b_2) & Cov(b_2,b_3) \\ Cov(b_3,b_1) & Cov(b_3,b_2) & Var(b_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 250,008197 & -1,39123377 & -3,28709671 \\ -1,39123377 & 0,0078362 & 0,01816339 \\ -3,28709671 & 0,01816339 & 0,04358082 \end{pmatrix}$$

- خصوصيات التقاربية لمقدرات طريقة المربعات الصغرى:

-ان التقدير عن طريق المربعات الصغرى هو تقدير غير متحيز حيث :

$$E(b) = B$$

- مصفوفة التباين و التباين المشترك للمعالم تؤول إلى 0 لما عدد المشاهدات يؤول إلى $+\infty$:

وبالتالي التقدير عن طريق طريقة المربعات الصغرى تؤول احتماليا نحو B أي :

نقول على المقدر أنه متسق إذا يقترب باحتمال إلى B ، إذا من أجل كل $\varepsilon > 0$ لدينا :

(أي احتمال أن b تنتمي الى مجال صغير جيدا حول B يكون قريب من 1 من أجل ذلك يجب اختيار n كبير جيدا)

في هذه الحالة نسمي B النهاية الاحتمالية لـ b وتكتب : $plim(b) = B$

3-2- التقدير بطريقة المعقولية العظمى:

في حالة توزيع الأخطاء طبيعيا :

$$\begin{cases} \varepsilon_t \mapsto N(0,\sigma_\varepsilon^2), t = 1,2,...,n \\ E(\varepsilon_t \varepsilon_{t'}) = 0, t \neq t' \end{cases}$$

$$Y = XB + \varepsilon, \quad \varepsilon \mapsto N(0,\sigma_\varepsilon^2 I_n)$$

دالة كثافة المعقولية لـ ε هي :

$$L(\varepsilon) = \prod_{t=1}^{n} (2\pi\sigma_\varepsilon^2)^{-\frac{1}{2}} \exp\left\{-\frac{\varepsilon'\varepsilon}{2\sigma_\varepsilon^2}\right\}$$

$$L(\varepsilon) = \prod_{t=1}^{n} (2\pi\sigma_\varepsilon^2)^{-\frac{1}{2}} \exp\left\{-\frac{\sum_{t=1}^{n} e_t^2}{2\sigma_\varepsilon^2}\right\}$$

مع العلم أن : $\varepsilon = Y - XB$

$$L(Y, XB, \sigma_\varepsilon^2 I_n) = (2\pi\sigma_\varepsilon^2)^{-\frac{n}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\frac{(Y-XB)'(Y-XB)}{\sigma_\varepsilon^2}\right\}$$

نأخذ لوغاريتم دالة المعقولية :

$$Ln(L) = -\frac{n}{2}Ln(2\pi) - \frac{n}{2}Ln(\sigma_\varepsilon^2) - \frac{1}{2\sigma_\varepsilon^2}(Y-XB)'(Y-XB)$$

الشروط الضرورية لكي تكون Ln(L) أعظمي هي :

-1

$$\frac{\partial Ln(L)}{\partial B} = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2\sigma_\varepsilon^2}\frac{\partial(Y'Y - 2Y'XB + B'X'XB)}{\partial B} = 0$$

(إذا كانت $X'X$ قابلة للقلب)

$$\frac{\partial Ln(L)}{\partial B} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2\sigma_\varepsilon^2}(X'Y - X'XB) = 0 \Rightarrow \breve{b} = (X'X)^{-1}X'Y$$

$$\frac{\partial Ln(L)}{\partial \sigma_\varepsilon^2}=0 \Leftrightarrow -\frac{n}{2}\frac{1}{\sigma_\varepsilon^2}+\frac{1}{2}\frac{1}{\sigma_\varepsilon^4}(Y-XB)'(Y-XB)=0$$ -2

$$\breve{\sigma}_\varepsilon^2=\frac{1}{n}(Y-X\breve{b})(Y-X\breve{b})$$

المقدر $\breve{\sigma}_\varepsilon^2$ لـ σ_ε^2 متحيز لأن: $e=Y-X\breve{b} \Rightarrow \breve{\sigma}_\varepsilon^2=\frac{e'e}{n}$

$$E(\breve{\sigma}_\varepsilon^2)=\frac{1}{n}E(e'e)=\frac{1}{n}E\left[(n-k)\breve{\sigma}_\varepsilon^2\right]$$

علماً بأن : $E(\widehat{\sigma}_\varepsilon^2)=\sigma_\varepsilon^2$ إذا $E(\breve{\sigma}_\varepsilon^2)=\frac{n-k}{n}\sigma_\varepsilon^2 \neq \sigma_\varepsilon^2$

هذا مايؤدي بنا إلى النتيجة التالية:

المقدر $\breve{b}$ لـB بطريقة المعقولية العظمى غير متحيز، لكن المقدر $\breve{\sigma}^2$ متحيز .

مثال 3-5: قيمة لوغريتم المعقولية العظمى للمثال السابق معطاة بـ :

$$Ln(L(\varepsilon))=\ln(\prod_{t=1}^{n}(2\pi\breve{\sigma}_\varepsilon^2)^{-\frac{1}{2}}\exp\left\{-\frac{\sum_{t=1}^{n}e_t^2}{2\breve{\sigma}_\varepsilon^2}\right\})$$

=*LN(((2*3,1415*4,18560714)^(-14/2))*EXP(((-1/2)*((58,6118513)/(4,18560714_)))))* **=-29,8880903**

3-3- جودة الإنحدار و مدلولية المعالم:

3-3-1- جودة الإنحدار: بعد القيام بتقدير معالم النموذج نهتم بمدى تفسير النموذج للمتغيرة الداخلية :

$$\underset{SCT}{\sum(Y_t-\bar{Y})^2} = \underset{SCE}{\sum(\hat{Y}_t-\bar{Y})^2} + \underset{SCR}{\sum e_t^2}$$

$$R^2=\frac{\sum(\hat{Y}_t-\bar{Y})^2}{\sum(Y_t-\bar{Y})^2}=1-\frac{\sum e_t^2}{\sum(Y_t-\bar{Y})^2}$$

ملاحظة: في حالة نموذج ممركز لدينا : $R^2=\frac{\hat{Y}'\hat{Y}}{Y'Y}=1-\frac{e'e}{Y'Y}$

-إن إضافة متغير مفسرة للنموذج لايخفض من قيمة معامل التحديد، وكذلك لم تكون درجة الحرية ضئيلة، يجب تصحيح R^2 من أجل أخذ بعين الإعتبار العدد الضئيل للمشاهدات مقارنة بالعوامل المفسرة نحسب R^2 المصحح أو المعدل(معامل Theil)والذي نرمز له بـ $\bar{R}^2$ وهي تعطى بالعلاقة التالية:

$$\bar{R}^2=1-\frac{SCR/n-k}{SCT/n-1} \quad \text{أو} \quad \bar{R}^2=1-\frac{(n-1)}{(n-k)}\left(1-R^2\right)$$

لما n تكون كبيرة لدينا $\bar{R}^2=R^2$

-هناك كذلك مؤشرات اخرى من أجل مقارنة النماذج التي تأخذ متغيرات عديدة مفسِرة هما مؤشر Schwartz :

$$CS=Ln\left(\frac{e'e}{n}\right)+\left(\frac{k}{n}\right)Ln(n)$$

ومؤشر المعلومات لـ Akaike : $CIA=Ln\left(\frac{e'e}{n}\right)+2\left(\frac{k}{n}\right)$

فيما يخص هذه مؤشرات تسمح من اختيار النموذج الذي له أقل قيمة لهذه الأخيرة .

مثال 3-6: تقدير معامل التحديد ، ومعامل التحديد المصحح ، و المؤشرات أعلاه لنموذج الكمية و الأسعار:

$$R^2=\frac{\sum(\hat{Y}_t-\bar{Y})^2}{\sum(Y_t-\bar{Y})^2}=1-\frac{\sum e_t^2}{\sum(Y_t-\bar{Y})^2}=1-\frac{58,6118513}{22750}=0,99742365$$

$$\bar{R}^2=1-\frac{SCR/n-k}{SCT/n-1}=1-\frac{58,6118513(14-3)}{22750(14-1)}=0,99695523$$

$$CS=Ln\frac{e'e}{n}+\frac{k}{n}Ln(n)=Ln(\frac{58,6118513}{14})+\frac{3}{14}Ln(14)=1,99739187$$

$$AIC=Ln\frac{e'e}{n}+\frac{2k}{n}=Ln\left(\frac{58,6118513}{14}\right)+\frac{2*3}{14}=1,86045102$$

3-3-2- اختبار مدلولية المعالم : بعد إيجاد تقدير معالم المقدرة B_i ، نتطرق الى اختبارها وذلك من أجل قبول الفرضيات الاقتصادية للنموذج؛ ستنطرق هنا الى قيود على المعالم و اختبار التغير الهيكلي و استقرار المعالم.

توزيع المقدرات :

بأخذ بعين الاعتبار الفرضية المتعلقة بتوزيع الأخطاء $\varepsilon \mapsto N\left(0,\sigma_\varepsilon^2 I_n\right)$ و خطية معالم النموذج لدينا : $b-B=(X'X)^{-1}X'\varepsilon$ اذا :

$$b \mapsto N\left(B,\sigma_\varepsilon^2 (X'X)^{-1}\right)$$

بصفة عامة تمثيل اختبار معالم النموذج المتعدد يمن كتابتها كمايلي :

$$RB=r$$

حيث : R مصفوفة من النمط (q,k) و q<k ، و q تمثل عدد القيود، و r شعاع ذات n ثابت.

مثال 3-7:

لنفترض النموذج التالي : $Y_t = B_1 + B_2X_{2t} + B_3X_{3t} + B_4X_{4t} + \varepsilon_t$

اختبار الفرضية التالية : $B_2+B_3=1$ و $B_4=0$ تكتب عن طريق $RB=r$ كمايلي :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{R} \underbrace{\begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \\ B_4 \end{pmatrix}}_{B} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{q}$$

ب - اختبار الفرضية التالية : $B_1=0$ تكتب عن طريق $RB=r$ كمايلي :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{R} \underbrace{\begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \\ B_4 \end{pmatrix}}_{B} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}}_{q}$$

يمكن استنتاج من علاقة تحيز الشعاع وتباينه

$E(b)=B$ و $Var(b)=\sigma_\varepsilon^2 I_n (X'X)^{-1}$

مايلي توزيع $RB=r$: $E(Rb)=RB$

و

$$Var(Rb)=E\left(R(b-B)(b-B)'R'\right)=RE\left((b-B)(b-B)'\right)R'$$

$$Var(Rb)=RVar(b)R'=\sigma_\varepsilon^2 R(X'X)^{-1}R'$$

$$Var(Rb) = \sigma_\varepsilon^2 R(X'X)^{-1} R'$$

إذا :
$$Rb \mapsto N\left(RB, \sigma_\varepsilon^2 (RX'X)^{-1} R'\right)$$

$$R(b-B) \mapsto N\left(0, \sigma_\varepsilon^2 (R(X'X)^{-1} R'\right)$$

فرضية العدم هي من الشكل التالي : $RB = r$ ، نتحصل على :

$$Rb - r \mapsto N\left(0, \sigma_\varepsilon^2 (R(X'X)^{-1} R'\right)$$

هذه المعادلة الأخيرة أعطتنا توزيع Rb ؛ يمكن تحديد متغيرة تتبع توزيع χ^2 أي :

$$(Rb-r)'\left[\sigma_\varepsilon^2 (R(X'X)^{-1} R'\right]^{-1} (Rb-r) \mapsto \chi^2(q) \qquad \text{------(B)}$$

وذلك بأخذ بعين الاعتبار الخاصية التالية :

إذا شعاع عشوائي x يتبع التوزيع الطبيعي :

$$X \mapsto N(\Gamma, \Sigma); X_{(n\times 1)}, \Gamma_{(n\times 1)}$$

مع $\Sigma_{n\times n}$ رتبة $(r \leq n), r = \Sigma$

فإن $(x-\Gamma)'\Sigma^{-1}(X-\Gamma) \mapsto \chi_r^2$

من المعادلة (B)، المجهول هو σ_ε^2 مع العلم أن : $\frac{e'e}{\sigma_\varepsilon^2} \mapsto \chi^2(n-k)$ و $\hat{\sigma}^2 = \frac{e'e}{n-k}$

بتعويضها في المعادلة السابقة (B) نتحصل على التوزيع التالي :

$$\frac{(Rb-r)'\left[(R(X'X)^{-1} R'\right]^{-1} (Rb-r)}{e'e/n-k} \mapsto F(q, n-k) \qquad \text{------(C)}$$

إذا من أجل قبول أو رفض فرضية العدم $Rb = r$ يجب حساب قيمة F .

عادة ما نستعمل العلاقة الأتية :

$$(Rb-r)'\left[\hat{\sigma}_\varepsilon^2 (R(X'X)^{-1} R')\right]^{-1} (Rb-r)/q \mapsto F(q, n-k) \qquad \text{------(D)}$$

مع العلم أن $\hat{\sigma}_\varepsilon^2 (X'X)^{-1}$ تمثل مصفوفة التباين والتباين المشترك لـ b، وبوضع C_{ij} العنصر i, j من المصفوفة $(X'X)^{-1}$ إذا:

$$\hat{\sigma}_\varepsilon^2 C_{ij} = Var(b_i) \wedge \hat{\sigma}_\varepsilon^2 C_{ij} = Cov(b_i, b_j) \qquad i, j = 1,2,\ldots,k$$

اختبار معنوية المعالم :

$$H_0: \ B_i = 0$$
$$H_1: \ B_i \neq 0$$

في الأمثلة السابقة نعوض R و r بقيمها في المعادلة (C)و (D) من Rb نستخرج b_i ومن $R(X'X)^{-1}R'$ نستخرج C_{ii} العنصر من قطر المصفوفة $(X'X)^{-1}$ يصبح لدينا مايلي :

$$F = \frac{b_i^2}{\hat{\sigma}_\varepsilon^2 C_{ii}} = \frac{b_i^2}{Var(b_i)} \mapsto F(1, n-k)$$

مع العلم أن : $\sqrt{F_{1,n-k}} = t_{n-k}$ (حيث t هو متغير ستودنت)

بأخذ الجذر التربيعي للعبارة السابقة :

$$t = \frac{b_i}{\hat{\sigma}_\varepsilon \sqrt{C_{ii}}} = \frac{b_i}{\sqrt{Var(b_i)}} \mapsto t_{n-k, \alpha/2}$$

باستعمال هذه العلاقة نختبر استقلالية Y عن X_i

مثال 3-8 : اختبار معنوية المعالم المتعلقة المتعلق بالكمية المطلوبة و الأسعار المحلية و المستوردة:

اختبار معنوية الثابت β_1 :

$$H_0: \ B_1 = 0$$
$$H_1: \ B_1 \neq 0$$

القيمية المحسوبة لستودنت يتم حسابها من مايلي :

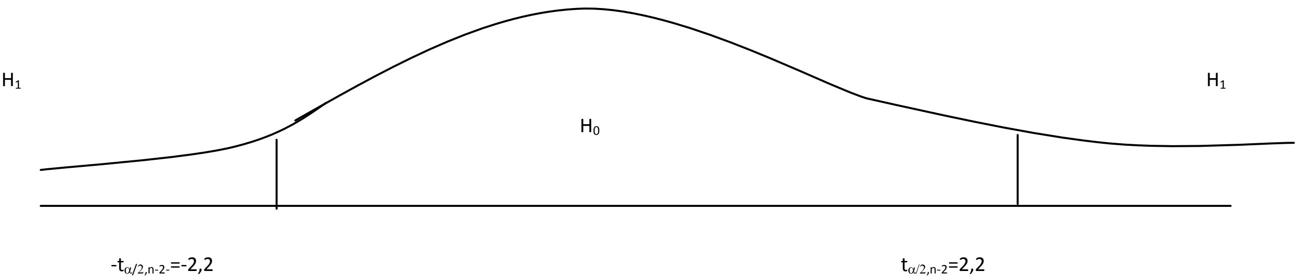
من معادلة التقدير $\hat{Y}_t = 63{,}3848 - 0{,}5280 X_{2t} + 1{,}2762 X_{3t}$

ليدنا قيمة القيمة المقدرة لـ β_1 تساوي $b_1 = 63{,}3848$ ، ومن مصفوفة التباين و التباين المشترك التالية:

$$\hat{\Omega}_b = \hat{\sigma}_\varepsilon^2 (X'X)^{-1} = \begin{pmatrix} 250{,}008197 & -1{,}39123377 & -3{,}28709671 \\ -1{,}39123377 & 0{,}0078362 & 0{,}01816339 \\ -3{,}28709671 & 0{,}01816339 & 0{,}04358082 \end{pmatrix}$$

تباين القيمة المقدرة β_1 هو $Var(b_1) = 250{,}008197$ ، أما القيمة المجدولة ذات درجة حرية $n-k=14-3=11$ بمستوى معنوية 5% هو $t_{0,025;11} = 2{,}2$ (وهذا من خلال جدول ستودنت أنظر الملحق2)، أما القيمة المحسوبة هي :

$$t_{cal}=\frac{b_1}{\hat{\sigma}_{\varepsilon}\sqrt{C_{11}}}=\frac{b_1}{\sqrt{Var(b_1)}}=\frac{63{,}3848}{\sqrt{250{,}008197}}=4{,}0087$$



القيمة المحسوبة تقع في H_1 ، اذا β_1 مقبولة احصائيا وبتالي هي معنوية ، وعليه يمكن تفسير هذا بمايلي لم الأسعار تساوي الصفر فان الكمية المطلوبة تساوي 63,3848.

اختبار معنوية المعلمةβ_2 :

$$H_0:\ B_2=0$$
$$H_1:\ B_2\neq 0$$

القيمة المحسوبة لستودنت يتم حسابها من مايلي :

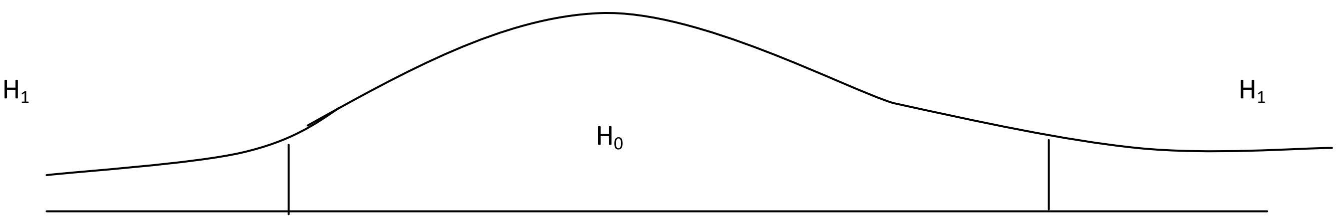
من معادلة التقدير ا $\hat{Y}_t=63{,}3848-0{,}5280X_{2t}+1{,}2762X_{3t}$

لیدنا قیمة القیمة المقدرة لـ β_2 تساوي b_2=-0,528 ، ومن مصفوفة التباين و التباين المشترك التالية:

$$\hat{\Omega}_b=\hat{\sigma}_{\varepsilon}^2(X'X)^{-1}=\begin{pmatrix}250{,}008197 & -1{,}39123377 & -3{,}28709671\\ -1{,}39123377 & 0{,}0078362 & 0{,}01816339\\ -3{,}28709671 & 0{,}01816339 & 0{,}04358082\end{pmatrix}$$

تباين القيمة المقدرة β_1 هو $Var(b_1)$=0,0078362 ، أما القيمة المجدولة ذات درجة حرية n-k=14-3=11 بمستوى معنوية 5% هو$t_{0,025\,;11}$=2,2) وهذا من خلال جدول ستودنت أنظر الملحق2)، أما القيمة المحسوبة هي :

$$t_{cal}=\frac{b_2}{\hat{\sigma}_{\varepsilon}\sqrt{C_{22}}}=\frac{b_2}{\sqrt{Var(b_2)}}=\frac{-0{,}528}{\sqrt{0{,}0078362}}=\text{-5,9652}$$



القيمة المحسوبة تقع في H_1 ، اذاβ_2 مقبولة احصائيا وبتالي هي معنوية ، وعليه يمكن تفسير هذا بمايلي لم السعرالمنتوج يرتفع بوحدة واحدة فان الكمية المطلوبة تنخض بـ 5,9652.

ج-اختبار معنوية المعلمةβ_3 :

$$H_0: \; B_3 = 0$$
$$H_1: \; B_3 \neq 0$$

القيمية المحسوبة لستودنت يتم حسابها من مايلي :

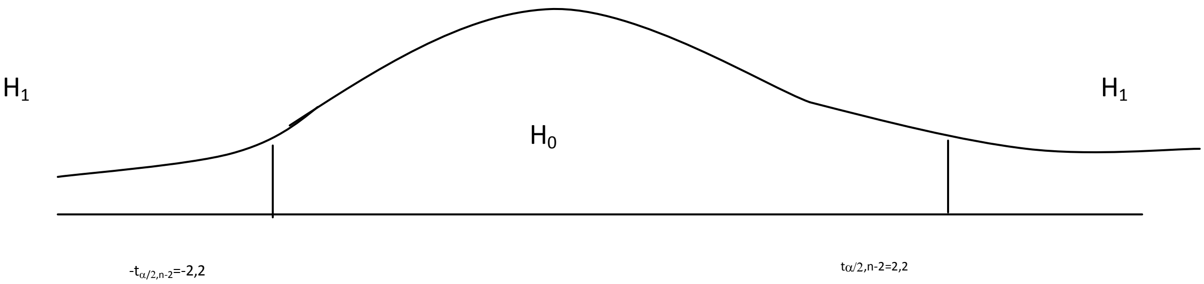
من معادلة التقدير $$\hat{Y}_t = 63{,}3848 - 0{,}5280 X_{2t} + 1{,}2762 X_{3t}$$

ليدنا قيمة القيمة المقدرة لـ β_3 تساوي $b_3=1{,}2762$ ، ومن مصفوفة التباين و التباين المشترك التالية:

$$\hat{\Omega}_b = \hat{\sigma}_\varepsilon^2 (X'X)^{-1} = \begin{pmatrix} 250{,}008197 & -1{,}39123377 & -3{,}28709671 \\ -1{,}39123377 & 0{,}0078362 & 0{,}01816339 \\ -3{,}28709671 & 0{,}01816339 & 0{,}04358082 \end{pmatrix}$$

تباين القيمة المقدرةβ_3 هو $Var(b_3)=0{,}04358082$ ، أما القيمة المجدولة ذات درجة حرية $n-k=14-3=11$ بمستوى معنوية %5 هو$t_{0{,}025\,;11}=2{,}2$ (وهذا من خلال جدول ستودنت أنظر الملحق)، أما القيمة المحسوبة هي :

$$t_{cal} = \frac{b_3}{\hat{\sigma}_\varepsilon \sqrt{C_{33}}} = \frac{b_3}{\sqrt{Var(b_3)}} = \frac{1{,}2762}{\sqrt{0{,}04358082}} = 6{,}1133$$



القيمة المحسوبة تقع في H_1 ، اذا β_3 مقبولة احصائيا وبتالي هي معنوية ، وعليه يمكن تفسير هذا بمايلي لم السعرالمنتوج المستورد يرتفع بوحدة واحدة فان الكمية المطلوبة ترتفع بـ 6,11338675 .

-2 $H_0: \; B_2 + B_3 = 1$ ، Rb تعطينا معاملات المقدر $b_2 + b_3 = 1$ [جداء $(X'X)^{-1}$ بـ R يعطينا الشعاع السطري، الذي عناصره جمع العناصر المرافقة للسطر الثاني والثالث من $(X'X)^{-1}$ وضربها بـR' ، نتحصل على مجموع العنصر الثاني والثالث للشعاع السطري أي $C_{22} + 2C_{23} + C_{33}$ نلاحظ أن $C_{23}=C_{32}$] إذا :

$$R\hat{\sigma}_{\varepsilon}^{2}(X'X)^{-1}R' = \hat{\sigma}_{\varepsilon}^{2}(C_{22} + 2C_{23} + C_{33})$$

$$R\hat{\sigma}_{\varepsilon}^{2}(X'X)^{-1}R' = Var(b_2) + 2Cov(b_2, b_3) + Var(b_3)$$

$$R\hat{\sigma}_{\varepsilon}^{2}(X'X)^{-1}R' = Var(b_2 + b_3)$$

الإحصائية المستعملة للاختبار هي : $t = \dfrac{(b_2 + b_3 - 1)}{\sqrt{Var(b_2 + b_3)}} \mapsto t(n-k)$

يمكن كذلك إيجاد مجال الثقة (على سبيل المثال 95%) للمجموع(B_2+B_3) هي على الشكل التالي :

$$(b_2 + b_3) \pm t_{0.025}\sqrt{Var(b_2 + b_3)}$$

4- $H_0:\ B_3 = B_4$ ، بنفس الطريقة المستعملة في الفرضية (3)؛ الإحصائية المستعملة هي :

$$t = \frac{b_3 - b_4}{\sqrt{Var(b_3 - b_4)}} \mapsto t(n-k)$$

5- معنوية النموذج ككل:

$H_0:\ B_2 = B_3 = . \quad . \quad . = B_k = 0$ ، في هذه الحالة نختبر k-1 معامل ؛ اذا من $R(X'X)^{-1}R'$ نستخرج المصفوفة الجزئية ذات بعد $k-1$ من الركن الأيمن السفلي لـ $(X'X)^{-1}$ من أجل تقدير هذه المصفوفة، نجزء X إلى [$i \quad X_2$] حيث X_2 هي مصفوفة المشاهدات و i (الشعاع العمودي ذات n عنصر قيمة كل وحد منها تساوي الواحد 1) إذا :

$$X'X = \begin{bmatrix} i' \\ X_2' \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i & X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n & i'X_2 \\ X_2'i & X_2'X_2 \end{bmatrix}$$

باستعمال العلاقة المتعلقة بمعكوس مصفوفة مجزئة، يمكن وضع المصفوفة المراد الحصول عليها على الشكل التالي :[1]

$$\left[X_2'X_2 - X_2'in^{-1}i'X_2\right]^{-1} = \left[X_2'AX_2\right]^{-1}$$

$$\left[X_2'X_2 - X_2'in^{-1}i'X_2\right]^{-1} = \left[X_*'X_*\right]^{-1}$$

---

[1] مقلوب مصفوفة مجزئة: $A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$ ، $A^{-1} = \begin{bmatrix} A_{11}^{-1} + A_{11}^{-1}A_{12}B_{22}A_{21}A_{11}^{-1} & -A_{11}^{-1}A_{12}B_{22} \\ -B_{22}A_{21}A_{11}^{-1} & B_{22} \end{bmatrix}$، حيث :

$$B_{22} = \left(A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}\right)^{-1}$$

حيث A المصفوفة التي تجعل القيمة المشاهدة على شكل فرق بالنسبة للمتوسط، و $X_*=AX_2$ ، $Rb=b_2$ هي القيمة المقدرة المتحصل عليها عن طريق المربعات الصغرى للشعاع المعاملات

k-1 متغير مفسِرة، بوضع في جهة البسط q والمقام $e'e/n-k$ ؛ إذا $b'_*X'_*$ هو SCE للإنحدار، الإحصائية F المستعملة من أجل الإختبار، إذا المجموع الكلي لمعاملات الإنحدار معنوي هو:

$$F=\frac{SCE/(k-1)}{SCR/(n-k)}\mapsto F(k-1,n-k)$$

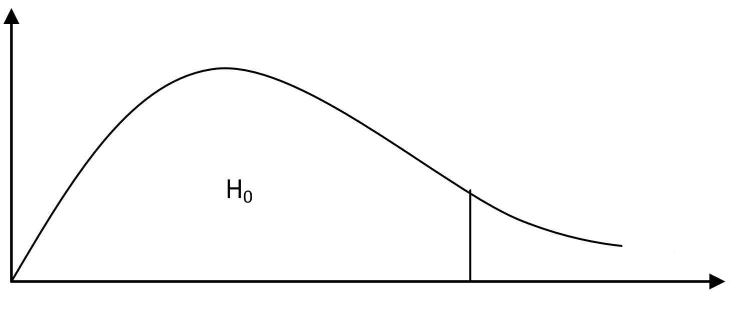
أو بطريقة أخرى : $F=\dfrac{R^2/(k-1)}{(1-R^2)/(n-k)}\mapsto F(k-1,n-k)$

3-3-3- <u>جدول تحليل التباين:</u> هدف من جدول التحليل هو إختبار ما يلي :

$$H_0:\quad B_2=B_3=.\ .\ .=B_k=0$$
$$H_1:\quad B_2\neq B_3\neq .\ .\ .\neq B_k\neq 0$$

ويعطى جدول تحليل التباين للنموذج المتعدد كالتالي :

مصدر التغير	مجموع المربعات	درجة الحرية	مربع (التباين المتوسطات)	فيشر المحسوب F_{cal}
X1,x2...,xk (المتغيرات المفسِرة)	$=\sum(\hat{y}_t-\bar{y})^2$	k-1	$SCE/k-1$	$\frac{SCE/k-1}{SCR/n-k}$
البواقي	$SCR=\sum e_t^2$	n-k	$SCR/n-k$	
المجموع الكلي	$=\sum(y_t-\bar{y})^2$	n-1		



$F_{tab,1,n-2,\alpha}$

$$F_{cal}=\frac{\sum(\hat{y}_t-\bar{y})/k-1}{\sum e_t^2/n-k}=\frac{R^2/k-1}{(1-R^2)/n-k}$$

1-إذا كانت $F_{tab}>F_{cal}$ في هذه الحالة تباين الأخطاء يساوي تباين البواقي، إذ في هذه الحالة المتغيرات المفسِرة ككل غير معنوي؛ إذا نرفض النموذج.

2-إذا كانت $F_{tab}<F_{cal}$ في هذه الحالة تباين الأخطاء لا يساوي تباين البواقي، إذ في هذه الحالة فإن النموذج جيد

مثال 3-9 : بأخذ المثال السابق المتعلق بالكمية المطلوبة و الأسعارالمحلية و المستوردة، معنوية النموذج بمعنوية 5 % نستعمل اختبار فيشر، جدول تحليل التباين هو :

$$H_0: \quad B_2 = B_3 = 0$$
$$H_1: \quad B_2 \neq B_3 \neq 0$$

مصدر التغير	مجموع المربعات	درجة الحرية	التباين (مربع المتوسطات)	فيشر المحسوب F_{cal}
(المتغيرات Xi المفسِرة)	$SCE = \sum(\hat{Y}_t - \bar{Y})$	2	$SCE/2 = 11345,6941$	$Fcal = \frac{SCE/2}{SCR/n-3} = 2129,3071$
البواقي	$\sum e_t^2 = 58,6118513$	n-3=11	$SCR/n-3 = 5,32835012$	
المجموع الكلي	$SCT = \sum(Y_t - \bar{Y})$	n-1=13		

القيمة المجدولة لفيشر هي $F_{\alpha,V1;V2} = F_{0,05;2;11} = 3,982$ (انظر الملحق 3)

القيمة المحسوبة تفوق القيمة المجدولة $F_{cal} > F_{\alpha,V1;V2}$ و وبالتالي نقبل H_1 النموذج معنوي.

يتم تلخيص النموذج السابق في المعادلة التالية :

$$\begin{array}{llll} \hat{Y}_t = & 63,3848 & -0,5280X_{2t} & +1,2762X_{3t} \\ SE & (15,8116) & (0,0885) & (0,2087) \\ t & (4,0087)^* & (5,9652)^* & (6,1133)^* \end{array}$$

$$\bar{R}^2 = 0,9969 \quad , F^* = 2129,30716, n = 14$$

(SE) القيمة بين قوسين تمثل الانحرف المعياري

(t) القيمة بين قوسين تمثل ستودنت المحسوبة

3-4-اختبار التغير الهيكلي :

بعد القيام بتقدير النموذج المرحلة التي تاليها متمثلة في معرفة اذا كان النموذج المقدر هو النموذج الملائم ، ومن أجل معرفة ذلك نستعمل اختبارات تسمح لنا من تحديد ان كانت المعالم المقدرة ثابتة أي معرفة اذا كانت لاتتغير حسب الفترة المدروسة أي لايوجد تغيير هيكلي ومن أجل ذلك نستعمل مايلي :

3-4-1- اختبار Chow :

يسمح هذا الاختبار من معرفة اذا كانت معالم النموذج تتغير خلال الزمن وذلك ان تم تطبيقها على معطيات زمنية ولكن في هذا الاختبار من ضروري معرفة مسبقا زمن الذي يقع فيه التغير، وبالتالي هذا الاختبار يسمح من معرفة اذا كانت المعالم المقدرة نفسها قبل و بعد نقطة المحدد بزمن التغيير؛ وفي حالة معطيات مقطعية يستعمل هذا الاختبار من أجل تحديد اذا كانت مجموعة من الأفراد متجانسة ام لا .

يتمثل هذا الاختبار في تقديرالنموذج في الفترتين الفترة الأولى قبل التغير n_1 أي من $1,,,,n_1$ و الفترة الثانية بعد التغيير الهيكلي المفترضة n_2 أي من $n_1+1, ,,,n$ يتمثل الاختبار في مايلي :

$$H_0: \quad \beta^1 = \beta^2 = \beta$$
$$H_1: \quad \beta^1 \neq \beta^2$$

حيث : β^2, β^1 تمثل شعاع المعاملات k في الفترة الأولى و الفترة الثانية على الترتيب.

تحتى الفرضية H_0 النموذج يكتب كمايلي :

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_{2t} + \beta_3 X_{3t} + . \quad . \quad . + \beta_k X_{kt} + \varepsilon_t = \beta X + \varepsilon \qquad t = 1,2,...,n$$

تحتى الفرضية H_1 النموذج يكتب حسب الفترة كمايلي :

$$Y_t^1 = \beta_1^1 + \beta_2^1 X_{2t} + \beta_3^1 X_{3t} + . \quad . \quad . + \beta_k^1 X_{kt} + \varepsilon_t^1 = \beta^1 X_1 + \varepsilon^1 \qquad t = 1,2,...,n_1$$

و

$$Y_t^2 = \beta_1^2 + \beta_2^2 X_{2t} + \beta_3^2 X_{3t} + . \quad . \quad . + \beta_k^2 X_{kt} + \varepsilon_t^2 = \beta^2 X_2 + \varepsilon^2 \qquad t = n_1 + 1,...,n$$

يمكن كتابة النموذج غير المقيد على الشكل التالي:

$$\begin{bmatrix} Y^1 \\ Y^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X^1 & 0 \\ 0 & X^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta^1 \\ \beta^2 \end{bmatrix} + \varepsilon \quad , \quad \varepsilon \mapsto N(0, \sigma^2 I)$$

تحت فرضية العدم H_0 لدينا القيد $R = [I_k \; -I_k]$ و r=0 أي لدينا $Rb - r = b^1 - b^2$ حيث

b^1 و b^2 هي تقديرات عن طريق المربعات الصغرى للمعالم في الفترة الأولى و الثانية للنموذج السابق. يمكن أن نحصل مجموع مربعات الأخطاء $e'e$ للنموذج السابق الذي يعتبر مجموع المربعات الأخطاء في الفترة الأولى SCR_1 زائد مجموع مربعات الأخطاء في الفترة الثانية SCR_2 أي : $e'e = e'^1e^1 + e'^2e^2$ ؛ مع العلم أن تقدير المربعات الصغرى يمكن كتابته كمايلي :

$$\begin{bmatrix} b^1 \\ b^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X'^1X^1 & 0 \\ 0 & X'^2X^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} X'^1Y^1 \\ X'^2Y^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (X'^1X^1)^{-1} & X'^1Y^1 \\ (X'^2X^2)^{-1} & X'^2Y^2 \end{bmatrix}$$

أما تقدير النموذج تحتى القيد يمكن كتابته كمايلي :

$$\begin{bmatrix} Y^1 \\ Y^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X^1 \\ X^2 \end{bmatrix} \beta + \varepsilon$$

نضع: e'^*e^* لتقدير النموذج تحت قيد فرضية العدم ، وعليه اختبار فيشر يمكن كتابته كمايلي :

$$F = \frac{(e'^*e^* - e'e)/(n-k) - [(n_1 - k) + (n - n_1 - k)]}{e'e/(n_1 - k) + (n - n_1 - k)} = \frac{(e'^*e^* - e'e)/k}{e'e/(n-2k)}$$

هذه الإحصائية موزعة حسب احصائية فيشر ذات درجة حرية (k,n-2k)

اذا القيمة المحسوبة أقل من القيمة المجدولة $F_{cal} < F_{\alpha,k;n-2k}$ ، نقبل H_0 ؛ غير ذلك نقبل H_1.

مثال 3-10 : نأخذ المثال المتعلق بالكمية المطلوبة و لنفترض أن سنة التغير الهيكلي هي سنة 2008 وذلك بسبب الأزمة العالمية في البورصات العالمية (ان السلسلة المأخوذة صغيرة أخذت فقط من أجل توضيح كيفية تطبيق اختبار Chow).من أجل اثبات وجود أو عدم وجود التغير الهيكلي نقوم بتقدير النموذج في الفترة (2000 -2007) و في الفترة (2008-2013). ونقوم بتقديره في الفترة (2000-2013).

$$\begin{array}{llll} \hat{Y}_t = & 77{,}2919 + & 1{,}173X_{2t} - & 0{,}6273X_{3t} \\ SE & (11{,}3025) & (0{,}1735) & (0{,}0580) \\ t & (6{,}8384)^* & (6{,}7623)^* & (-10{,}8090)^* \end{array}$$

$$\bar{R}^2 = 0{,}9986 \quad , F^* = 2622{,}023, n = 8 \qquad SCR_1 = 4{,}0007. t = 2000 - 2007$$

$$\hat{Y}_t = 11{,}0339 + 1{,}9364 X_{2t} - 0{,}2215 X_{3t}$$
$$\underset{t}{SE} \quad \underset{(0{,}4630)}{(23{,}8302)} \quad \underset{(6{,}0067)^*}{(0{,}3223)} \quad \underset{(-1{,}8784)}{(0{,}1181)}$$
$$\overline{R}^2 = 0{,}9908 \quad , F^* = 272{,}2635, n = 6 \qquad SCR_2 = 9{,}5885. t = 2008 - 2013$$

$$\hat{Y}_t = 63{,}3848 - 0{,}5280 X_{2t} + 1{,}2762 X_{3t}$$
$$\underset{t}{SE} \quad \underset{(4{,}0087)^*}{(15{,}8116)} \quad \underset{(5{,}9652)^*}{(0{,}0885)} \quad \underset{(6{,}1133)^*}{(0{,}2087)}$$
$$\overline{R}^2 = 0{,}9969 \quad , F^* = 2129{,}30716, n = 14, SCR = 58{,}6118513, t = 2000 - 2013$$

$$F = \frac{(e'^* e^* - e'e)/k}{e'e/(n-2k)} = \frac{(58{,}6111 - (9{,}5885 + 4{,}0007))/3}{(9{,}5885 + 4{,}0007)/(14 - 2*3)} = \frac{45{,}0218/3}{13{,}5892/8} = \frac{15{,}007}{1{,}6986} = 8{,}8347$$

القيمة المجدولة لفيشر : $F_{\alpha,k;n-2k} = F_{0,05;3;8} = 4{,}066$

اذا القيمة المحسوبة أكبر من القيمة المجدولة $F_{cal} > F_{\alpha,k;n-2k}$ ، وبالتالي نقبل H_1 ، أي أن المعالم تتغير من (2000 -2007) و في الفترة (2008-2013) أي هناك تغير هيكلي.

3-4-2-اختبارات الاستقرارية المعتمدة على البواقي المتكررة :

كنا نفترض في اختبار Chow أن نقطة أوالفترة المفترض لتتغير الهيكلي معلومة، أما فيما يخص الاستقراية للنموذج في اختبارات المعتمدة على البواقي المتكررة فهي تسمح من تحديد نقطة التغيير.

3-4-2-1-البواقي المتكررة Les résidus récursifs :

تتمثل البواقي المتكررة في الإعتماد على التنبؤ بالقيم المستقبلية لـ y_t لما الانحدار المقدر يستعمل r-1 مشاهدة أي :

$$e_r = y_r - (b_1^{r-1} + b_2^{r-1} x_{2r} + b_3^{r-1} x_{3r} + . \quad . \quad . + b_k^{r-1} x_{kr})$$

حيث : b_k^{r-1} هي تقديرات عن طريق المربعات الصغرى للمشاهدات r-1

نبدأ التقدير ابتداء من r=k+1

وتباين التنبؤ هو: $Var(e_t) = \sigma_{pt}^2 = \sigma^2 \left[1 + x_r' (X_{r-1}' X_{r-1})^{-1} x_r\right]$

(σ^2 تأخذ قيمة تباين الأخطاء لانحدار r-1)

البواقي المتكررة w_r معطاة بـ :

$$w_r = \frac{e_r}{\sqrt{1 + x'_r \left(X'_{r-1} X_{r-1}\right)^{-1} x_r}}$$

تحت فرضية الاستقرارية، الأخطاء تتبع التوزيع $w_r \mapsto N(0, \sigma^2)$

اذا كانت قيم w_r داخل قيم حدود $\pm 2SE$ أي داخل $\pm 2\sqrt{\sigma^2 \left[1 + x'_r \left(X'_{r-1} X_{r-1}\right)^{-1} x_r\right]}$ النموذج مستقر وذلك عن طريق التمثيل البياني للتحديد نقطة أو فترة عدم الإستقرار.

مثال 3-11: نأخذ المثال المتعلق بالكمية المطلوبة و سعر المتوسط للمنتوج و سعر المتوسط للمنتوج المستورد

عدد المعالم المقدرة هو 3 اذا نبدأ بتقدير الانحدار ابتداء من r=4، أي من 2000-2003 ، ثم 2000-2004... الى 2000-2013 .

نحصل على الجدول التالي :

	2000-2003	2000-2004	2000-2005	2000-2006	2000-2007	2000-2008	2000-2009	2000-2010	2000-2011	2000-2012	2000-2013
b1	57,2679	83,38	91,469	64,38	77,3	75,91	87,1	71,6191	64,4355	63,5176	63,3848
b2	-0,555	-0,66	-0,689	-0,569	-0,63	-0,621	-0,67	-0,5896	-0,5398	-0,5281	-0,5281
b3	1,6435	1,062	0,9004	1,407	1,17	1,197	0,99	1,2225	1,2822	1,2723	1,2762
σ	0,462	0,663	0,5545	0,783	0,89	0,819	1,64	1,7989	2,2448	2,4167	2,3083

تقدير الأخطاء :

$$e_{2004} = Y_{2004} - (b_1^{2003} + b_2^{2003} X_{22004} + b_3^{2003} X_{32004})$$

$$e_{2004} = 50 - (57{,}2679 - 0{,}5550(99) + 1{,}6435(30) = \text{-}1{,}6328$$

$$\left(X'_{2003} X_{2003}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 508 & 93 \\ 508 & 65146 & 11683 \\ 93 & 11683 & 2189 \end{pmatrix}^{-1}$$

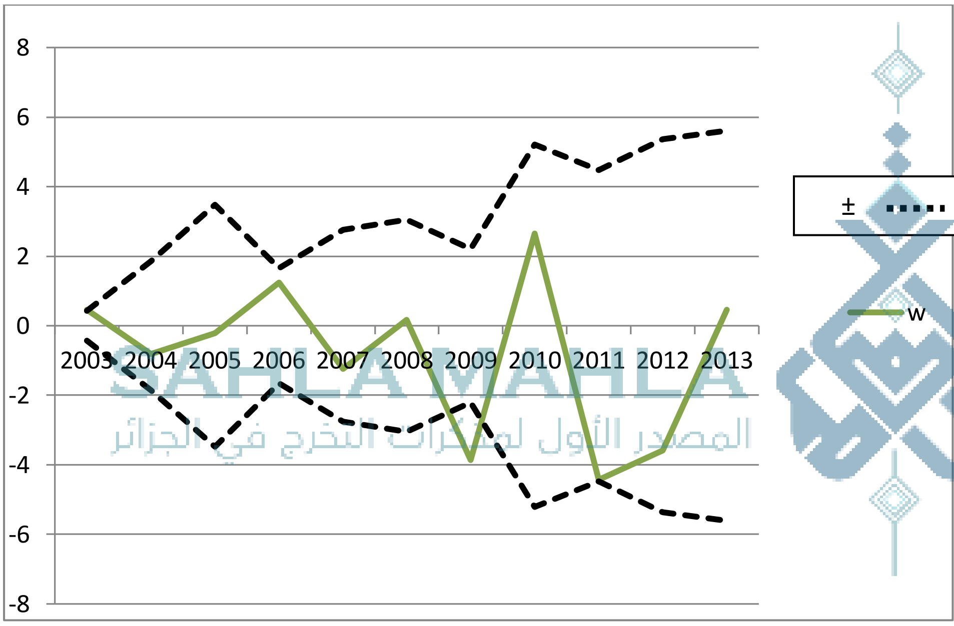
$$x_{2004} = (1 \quad 99 \quad 30)$$

$$w_{2004} = \frac{e_{2004}}{\sqrt{1 + x'_{2004} \left(X'_{2003} X_{2003}\right)^{-1} x_{2004}}} = \frac{-1{,}6328}{\sqrt{1 + 3{,}0085}} = \text{-}0{,}8156$$

$$\pm 2\sigma\sqrt{\left[1+x_r'\left(X_{r-1}'X_{r-1}\right)^{-1}x_r\right]}=\pm 2*0{,}4620\sqrt{[4{,}0085]}=\pm 1{,}8499$$

باتباع نفس الطريقة نتحصل على الأخطاء الباقية كمايلي :

	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013
=Wt $1+x_r'(X_{r-1}'X_{r-1})^{-1}x_r$	-0,462	-0,8156	-0,2096	1,2367	-1,2445	0,1686	-3,8555	2,6447	-4,4277	-3,5932	0,4554
-2SE	-0,4269	-1,8499	-3,485	-1,6587	-2,757	-3,0515	-2,2093	-5,2074	-4,4819	-5,3605	-5,608
2SE	0,4269	1,8499	3,485	1,6587	2,757	3,0515	2,2093	5,2074	4,4819	5,3605	5,608



نلاحظ وجود تغيير هيكلي في سنة واحدة 2009.

3-4-2-2-اختبار CUSUM : يعتمد هذا الاختبار على تجميع مايلي :

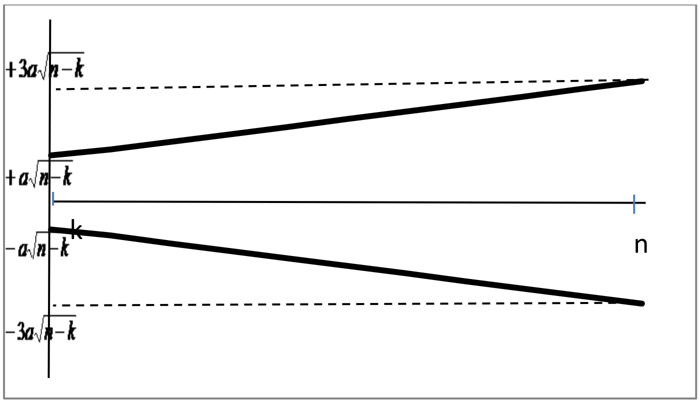
$$w_t=\sum_{r=k+1}^{t}\frac{w_r}{\hat{\sigma}} \qquad t=k+1,\ldots,n$$

حيث: $\hat{\sigma}=\sqrt{\dfrac{SCR_n}{n-k}}$ يمثل الانحراف المعياري لبواقي المحسوب على كل العينة

اذا كانت المعالم ثابتة $E(w_r)=0$ ، لما الفروقات تبتعد عن المحور الصفر بالاعتماد على الخطين التاليين : $n,\pm 3a\sqrt{n-k}$ و $k,\pm a\sqrt{n-k}$ نقول أنه يوجد تغير هيكلي، حيث a

تمثل معلمة تابعة لمستوى الخطر للاختبار . من أجل $\alpha = 0{,}01$ لدينا a=1,143 و من أجل $\alpha = 0{,}05$ لدينا a=0,984 من أجل $\alpha = 0{,}10$ لدينا a=0,850 .

ويتم تمثيلها في منحنى بياني اذا كانت قيم داخل الخطين نقول أنه هناك استقرار للنموذج كمايلي:

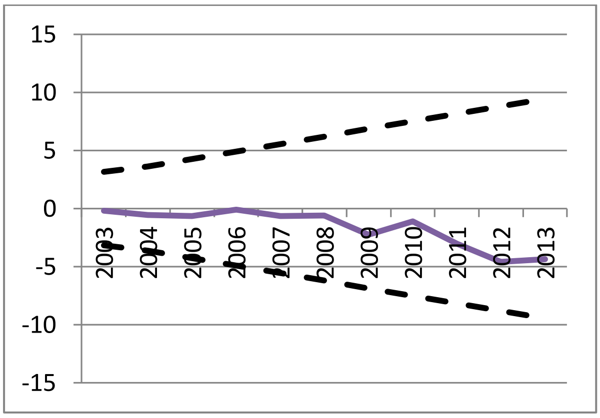


مثال 3-12 : بأخذ نفس معطيات السابقة نحصل على :

t	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013
w_t	-0,2001	-0,5535	-0,6443	-0,1085	-0,6476	-0,5746	-2,2448	-1,0991	-3,0173	-4,574	-4,3767

حدود قبول عدم وجود تغيير هيكلي بمستوى 5% معطاة في الجدول التالي :

k	$+a\sqrt{n-k}$	$-a\sqrt{n-k}$
k=3	3,1442	-3,144
n	$+3a\sqrt{n-k}$	$-3a\sqrt{n-k}$
n=14	9,4325	-9,432



3-4-2-3-اختبار CUSUMQ : يعتمد هذا الاختبار على مربع مجموع البواقي المتكرركمايلي :

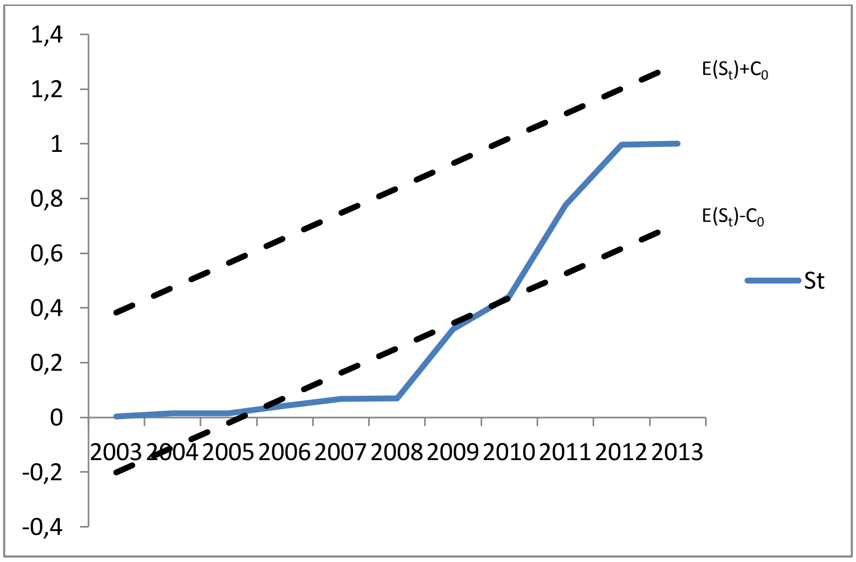
$$S_t = \frac{\sum_{r=k+1}^{t} w_r^2}{\sum_{r=k+1}^{n} w_r^2} \qquad t=k+1,\ldots,n$$

إن متوسط هذه الإحصائية هو : $E(S_t)=\frac{t-k}{n-k}$ ، و هذا لكون S_t تحت فرضية العدم تتبع توزيع كاي تربيع بدرجة حرية 1 ، كماهو الحال بالنسبة لختبار CUSUMالقيم الحرجة للإختبار يمكن تمثيلها بيانيا ولكن عن طريق $E(S_t)\pm C_0$ ، اذا قيم s_t تكون داخل المجال نقول أنه لايوجد تغيير هيكلي ، وقيم c_0 يتم الحصول عليها من جدول الاحصائي لـ CUSUM (مستوى المعنوية و n-K)

مثال 3-13 : بأخذ المثال السابق نقوم بحساب قيم الحرجة و s_t

	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013
W_t	-0,462	-0,8156	-0,2096	1,2367	-1,2445	0,1686	-3,8555	2,6447	-4,4277	-3,5932	0,4554
W_t^2	0,2134	0,6651	0,0439	1,5295	1,5487	0,0284	14,8649	6,9944	19,6047	12,9113	0,2074
SOMME W_t^2	0,2134	0,8786	0,9225	2,4521	4,0007	4,0292	18,894	25,8884	45,4931	58,4045	58,6119
S_t	0,0036	0,015	0,0157	0,0418	0,0683	0,0687	0,3224	0,4417	0,7762	0,9965	1
$E(S_t)-C_0$	-0,2014	-0,1105	-0,0195	0,0714	0,1623	0,2532	0,3441	0,435	0,5259	0,6168	0,7077
$E(S_t)+C_0$	0,3832	0,4741	0,565	0,0714	0,1623	0,8377	0,9286	1,0195	1,1105	1,2014	1,2923

قيم C_0 الحصول من جدولCUSUM ذات n-k=11 بدرجة 5% هو C_0=0,29227



نلاحظ أنه هناك تغيير هيكلي .

3-5- المتغيرات الصورية (Dummy Variable):

ان الطريقة التي تسمح لنا من معرفة تأثير سياسة معينة في نموذج قياسي متمثلة في تقدير النموذج في الفترة التي لم تطبق فيها السياسة و نموذج آخر في الفترة التي طبقت فيها السياسة، كذلك لم نريد معرفة مثلا تأثير الإنتماء الى جنس ما على الدخل المحصل عليه ويمكن كذلك تقدير النموذج للجنس الذكور و نموذج آخر للإنات؛ ومايمكن ملاحظته في هذه الأمثلة أن العامل أو المتغيرة المؤثرة هي متغيرة كيفية، من أجل تفادي بناء نموذجين لتفسيرآثرهذا العامل في النموذج؛ نقوم بتقدير نموذج واحد يأخذ بعين الاعتبار تأثير هذا العامل الكيفي وذلك بادخال متغيرة كيفية والتي نسميها بالمتغير الصورية؛ حيث تتمثل المتغيرات الصورية في متغيرات كيفية (نوعية) تأخذ قيم ثنائية (0 أو 1)، أي في حالة وجود الظاهرة المردوسة نضع 1 ، وفي حالة عدم وجود الظاهرة نضع 0.

مثال 3-14 : يتم الترميز للمتغيرة الصورية في حالة النموذج السابق ، أي سنوات تأثير الآزمة المالية 2008 على الطلب كمايلي :

$$\begin{cases} D_t = 1 & \text{سنوات وجود الأزمة} \\ D_t = 0 & \text{غير ذلك} \end{cases}$$

وتسمح كذلك المتغيرات الصورية من ايجاد الأثر المتبادل بين فترة وقوع الظاهرة على متغيرات اخرى في النموذج وذلك باستعمال ضرب المتغير الصورية في تلك المتغيرة D_t*x_t

مثال 3-15 : بأخذ معطيات المتعلق بالطلب والأسعاروذلك من أجل معلافة أثر الأزمة نستعمل المتغيرة D ، ومن أجل ادخال آثر الآزمة على المتغيرة X_2 نستعمل المتغيرة D_t*X_{2t}؛

أما بالنسبة لتأثير الأزمة على المتغيرة X_3 نستعمل المتغيرة D_t*X_{3t} وبتالي النموذج المقدر هو :

$$y_t = \beta_1 + \beta_2 D_t + \beta_3 x_{2t} + \beta_4 x_{3t} + \beta_5 (D_t \times x_{2t}) + \beta_6 (D_t \times x_{3t}) + \varepsilon_t$$

يصبح جدول المعطيات كمايلي :

D_tX_{3t}	D_t*X_{2t}	Dt	السعر المتوسط للمنتوج مستورد (IPU_t) X_3	السعرالوحدة المتوسط للمنتوج (MPU_t) X_2	الكمية المطلوبة $Y_t(QD_t)$	السنة
0	0	0	20	144	10	2000
0	0	0	22	133	20	2001
0	0	0	24	120	30	2002
0	0	0	27	111	40	2003
0	0	0	30	99	50	2004
0	0	0	34	90	60	2005
0	0	0	38	85	70	2006
0	0	0	43	75	80	2007
48	70	1	48	70	90	2008
53	55	1	53	55	100	2009
58	58	1	58	58	110	2010
60	33	1	60	33	120	2011
65	25	1	65	25	130	2012
68	20	1	68	20	140	2013

تقدير النموذج يعطي لنا مايلي :

$$\begin{array}{lllllll} \hat{Y}_t = & 77,2919 & -66,2580 D_t & -0,6273 X_{2t} & +1,1737 X_{3t} & +0,4058(D_t \times X_{2t}) & +0,7662(D_t \times X_{3t}) \\ SE & (16,4681) & (23,9375) & (0,0845) & (0,2528) & (0,1207) & (0,3452) \\ t & (4,6934)^* & (-2,7679) & (-7,4185)^* & (4,6411)^* & (3,3621)^* & (2,2092) \end{array}$$

$$\bar{R}^2 = 0,9994 \quad , F^* = 2676,979, n = 14, SCR = 13,5829, t = 2000-2013$$

تستعمل كذلك عندما يكون لدينا متغيرات فصلية و ذلك كمايلي :

$$\begin{cases} D_{it} = 1 & \text{المشاهدة خلال الفصل } t \\ D_{it} = 0 & \text{غير ذلك} \end{cases}$$

مثال 3-15 : في حالة أربع فصول فان المتغيرات الصورية تكون كمايلي :

$$\begin{array}{cccc} D_1 & D_2 & D_3 & D_4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

ملاحظة : لايتم ادخال المتغيرات الصورية في آننا واحد يجب ادخال في حالة المتغيرات الفصلية ثلاث متغيرات فقط على سبيل المثال D2 و D3 و D4 ؛ ان ادخال المتغيرات

الأربع في النموذج سيؤدي بالحصول على التعدد الخطي وذلك لارتباط المتغيرات فيما بينها مما يؤدي الى عدم امكانية قلب المصفوفة (X'X) .

3-6-اختبارات القيود على معالم النموذج المعتمدة على المعقولية العظمى :

عند بناء النموذج القياسي فان النظرية الاقصادية عادة لاتعطينا القيمة التي تأخذها المعالم بالضبط، بالاضافة الى ذلك فان قرار اختيار نموذج ملائم من بين نموذجين؛ الأول مقيد في المعالم المقدرة بينما الثاني غير مقيد في هذه الحالة نضطر الى الاختبار لتحديد النموذج الملائم، بالإضافة الى اختبار فيشر المعتاد وذلك عن طريق الاختبارات المعتمدة على المعقولية العظمى.

لنفترض أنا النموذج المقدر تم عن طريق المعقولية العظمى و نريد اختبارالفرضيات الخطية التالية :

مقيد $H_0: R\beta = q$

و :

غير المقيد $H_1: R\beta \neq q$

1-6-3-اختبار Wald : يعتمد هذا الاختبار على تقدير المعالم عن طريق المعقولية العظمى للنموذج غير المقيدة ،حيث يتمثل هدف الاختبار في تحديد الفرق بين Rb و q بحيث يكون معنويا يساوي الصفر.

تقدير المعقولية العظمى هو موزع تقاربيا نحو التوزيع طبيعي أي :

$$b_{MV} \sim> N(\beta, \sigma^2 (X'X)^{-1})$$

و

$$(b_{MV} - \beta) \sim> N(0, \sigma^2 (X'X)^{-1})$$

ومنه :

$$R(b_{MV} - \beta) = (Rb_{MV} - q) \sim> N(0, \sigma^2 R(X'X)^{-1} R')$$

ومنه نحصل على احصائية Wald كمايلي :

$$(Rb_{MV} - q)'(\hat{\sigma}^2 R(X'X)^{-1} R')^{-1} (Rb_{MV} - q) \sim> \chi^2(h)$$

أي :

$$\frac{(Rb_{MV} - q)'\left(R(X'X)^{-1} R'\right)^{-1} (Rb_{MV} - q)}{\hat{\sigma}^2} \sim> \chi^2(h)$$

هذه الاحصائية تساوي عدد القيود مضروبة في احصائية فيشر للنموذج المتعدد.

$$Wald = (Rb_{MV} - q)'(\hat{\sigma}^2 R(X'X)^{-1} R')^{-1} (Rb_{MV} - q) = h \times F_{cal}$$

اذا كانت القيم المحسوبة أصغرمن القيمة المجدولة $\chi^2_\alpha(h)$ النموذج بقيود مقبولة

$$W = h \times \frac{(e_*'e_* - e'e)/h}{e'e/n-k} \sim > \chi^2(\text{h})$$

حيث : $e_*'e_*$ مجموع مربعات الأخطاء في النموذج المقيد

$e'e$ مجموع مربعات الأخطاء في النموذج غير مقيد

مثال 3-16 : لنأخذ النموذج المتعلق بالمتغيرات الصورية المقدر السابق أي النموذج غير المقيد:

$$\underset{\substack{SE\\t}}{\hat{Y}_t} = \underset{\substack{(16,4681)\\(4,6934)^*}}{77,2919} - \underset{\substack{(23,9375)\\(-2,7679)}}{66,2580 D_t} - \underset{\substack{(0,0845)\\(-7,4185)^*}}{0,6273 X_{2t}} + \underset{\substack{(0,2528)\\(4,6411)^*}}{1,1737 X_{3t}} + \underset{\substack{(0,1207)\\(3,3621)^*}}{0,4058(D_t \times X_{2t})} + \underset{\substack{(0,3452)\\(2,2092)}}{0,7662(D_t \times X_{3t})}$$

$$\bar{R}^2 = 0,9994 \quad , F^* = 2676,979, n = 14, SCR = 13,5829, t = 2000-2013$$

ونريد أن نقارنه مع النموذج بدون المتغيرات الصورية أي المقيد :

$$\underset{\substack{SE\\t}}{\hat{Y}_t} = \underset{\substack{(15,8116)\\(4,0087)^*}}{63,3848} - \underset{\substack{(0,0885)\\(5,9652)^*}}{0,5280 X_{2t}} + \underset{\substack{(0,2087)\\(6,1133)^*}}{1,2762 X_{3t}}$$

$$\bar{R}^2 = 0,9969 \quad , F^* = 2129,30716, n = 14, SCR = 58,6118513, t = 2000-2013$$

نطبق اختبار Wald لاختيار أحسن نموذج نحصل على :

$$W = h \times \frac{(e_*'e_* - e'e)/h}{e'e/n-k} = \frac{(58,61185-13,5829)/3}{\left(\frac{13,5829}{14-6}\right)} = 26,52$$

القيمة المجدولة لـ كاي تربيع هي $\chi^2_{0,05}(3) = 7,815$ أقل من القيمة المحسوبة اذا نقبل H_1 أي النموذج غير المقيد ذات المتغيرات الصورية هو أحسن نموذج

3-6-2-اختبار نسبة المعقولية(LR) " The likelihood ratio test "

يعتمد هذا الاختبار على القيم التي تأخذها لوغريتم المعقولية سواء للنموذج مقيد أم غير مقيد.

نضع bMv تقدير المعالم للنموذج غير مقيد و e'e مجموع المربعات الأخطاء المقابل له :

$$\ln L(b_{MV}) = -\frac{n}{2}[\ln 2\pi + \ln\hat{\sigma}^2] - \frac{1}{2\hat{\sigma}^2}e'e$$

$$\ln L(b_{MV}) = -\frac{n}{2}\left[\ln 2\pi + \ln\left(\frac{e'e}{n}\right)\right] - \frac{n}{2}$$

و نضع b^*_{Mv} تقدير المعالم للنموذج المقيد و e*'e* مجموع المربعات الأخطاء المقابل له :

$$\ln L(b^*_{Mv}) = -\frac{n}{2}[\ln 2\pi + \ln\sigma^{*2}] - \frac{1}{2\hat{\sigma}^2}e^{*\prime}e^*$$

$$\ln L(b^*_{Mv}) = -\frac{n}{2}\left[\ln 2\pi + \ln\left(\frac{e^{*\prime}e^*}{n}\right)\right] - \frac{n}{2}$$

يعتمد اختبار نسبة المعقولية على الاحصائية التالية :

$$\boldsymbol{\gamma} = \frac{L(b,\hat{\sigma}^2)}{L(b^*,\sigma^{*2})}$$

تحتى فرضية H_0 احصائية نسبة المعقولية LR تكتب في حالة عينة كبير كمايلي :

$$LR = -2ln\gamma = 2(\ln L(b^*_{Mv}) - \ln L(b_{Mv})) \sim> \chi^2(h)$$

احصائية LR يمكن كتابتها على الشكل التالي :

$$LR = n(\ln(e^{*\prime}e^*) - \ln(e'e))$$

اذا $LR<\chi^2_\alpha(h)$ فاننا نقبل H_0 أي نقبل النموذج غير المقيد

مثال 3-17 : لنأخذ النموذج المتعلق بالمتغيرات الصورية المقدر السابق أي نموذج غير المقيد:

$$\begin{array}{llllll}
\hat{Y}_t = 77{,}2919 & -66{,}2580D_t & -0{,}6273X_{2t} & +1{,}1737X_{3t} & +0{,}4058(D_t\times X_{2t}) & +0{,}7662(D_t\times X_{3t}) \\
SE\quad (16{,}4681) & (23{,}9375) & (0{,}0845) & (0{,}2528) & (0{,}1207) & (0{,}3452) \\
t\quad (4{,}6934)^* & (-2{,}7679) & (-7{,}4185)^* & (4{,}6411)^* & (3{,}3621)^* & (2{,}2092)
\end{array}$$

$$\bar{R}^2 = 0{,}9994 \quad ,F^* = 2676{,}979, n = 14, SCR = 13{,}5829, t = 2000-2013$$

ونريد أن نقارنه مع النموذج بدون المتغيرات الصورية أي المقيد :

$$\begin{array}{lll}
\hat{Y}_t = 63{,}3848 & -0{,}5280X_{2t} & +1{,}2762X_{3t} \\
SE\quad (15{,}8116) & (0{,}0885) & (0{,}2087) \\
t\quad (4{,}0087)^* & (5{,}9652)^* & (6{,}1133)^*
\end{array}$$

$$\bar{R}^2 = 0{,}9969 \quad ,F^* = 2129{,}30716, n = 14, SCR = 58{,}6118513, t = 2000-2013$$

نطبق اختبار LR لاختيار أحسن نموذج نحصل على :

$$LR = n(\ln(e^{*\prime}e^*) - \ln(e'e)) = 14(\ln(58{,}6118) - \ln(13{,}5829)) = 20{,}4697$$

القيمة المجدولة لـ كاي تربيع هي $\chi^2_{0{,}05}(3) = 7{,}815$ أقل من القيمة المحسوبة اذا نقبل H_1 أي النموذج غير المقيد ذات المتغيرات الصورية هو أحسن نموذج.

3-6-3-اختبار مضاعف لاقرانج LM(اختبار Score)

يعتمد اختبار مضاعف لاقرانج على شعاع الشرط الأولى لمشكل تعظيم لوغريتم دالة المعقولية العظمى . للتقدير غير المقيد b^*_{MV} أي $\frac{\partial lnL}{\partial\beta}=0$.

هذا الاختبار مبني على الشرط السابق ويكتب مضاعف لاقرانج كمايلي :

$$LM=\left[\frac{\partial lnL}{\partial\beta}\right]'_{\beta=b^*_{MV}}\left[-E\left(\frac{\partial^2 lnL}{\partial\beta\partial\beta'}\right)\right]^{-1}_{\beta=b^*_{MV}}\left[\frac{\partial lnL}{\partial\beta}\right]_{\beta=b^*_{MV}}\sim>\chi^2(h)$$

حيث: $$\left[\frac{\partial lnL}{\partial\beta}\right]_{\beta=b^*_{MV}}=\left[\frac{1}{\sigma^2}[Y-X\beta]\right]_{\beta=b^*_{MV}}=\frac{n}{e'^*e^*}X'e^*$$

و $$\left[-E\left(\frac{\partial^2 lnL}{\partial\beta\partial\beta'}\right)\right]^{-1}_{\beta=b^*_{MV}}=[\sigma^2(X'X)^{-1}]_{\beta=b^*_{MV}}=\frac{e^{*\prime}e^*}{n}(X'X)^{-1}$$

منه نستنج أن احصائية مضاعف لاقرانج معطاة بـ :

$$LM=\left[\frac{n}{e'^*e^*}X'e^*\right]'\left[\frac{e^{*\prime}e^{*\prime}}{n}(X'X)^{-1}\right]\left[\frac{n}{e'^*e^*}X'e^*\right]$$

$$LM=\frac{ne'^*X(X'X)^{-1}X'e^*}{e'^*e^*}=nR^2$$

حيث: R^2 يمثل معامل التحديد لانحدار e^* على المتغيرات الخارجية

يمكن اعادة صياغة احصائية LM كمايلي:

$$LM=\frac{n(e'^*e^*-e'e)}{e'^*e^*}=nR^2$$

اذا كانت $LM<\chi^2_\alpha(h)$ تقبل فرضية العدم أي النموذج المقبول هو النموذج المقيد

مثال 3-18 : لنأخذ النموذج المتعلق بالمتغيرات الصورية المقدر السابق أي نموذج غير مقيد:

$$\begin{array}{lllllll} \hat{Y}_t= & 77,2919 & -66,2580D_t & -0,6273X_{2t} & +1,1737X_{3t} & +0,4058(D_t\times X_{2t}) & +0,7662(D_t\times X_{3t}) \\ SE & (16,4681) & (23,9375) & (0,0845) & (0,2528) & (0,1207) & (0,3452) \\ t & (4,6934)^* & (-2,7679) & (-7,4185)^* & (4,6411)^* & (3,3621)^* & (2,2092) \end{array}$$

$\bar{R}^2=0,9994$, $F^*=2676,979, n=14, SCR=13,5829, t=2000-2013$

ونريد أن نقارنه مع النموذج بدون المتغيرات الصورية أي مقيد :

$$\begin{array}{llll} \hat{Y}_t= & 63,3848 & -0,5280X_{2t} & +1,2762X_{3t} \\ SE & (15,8116) & (0,0885) & (0,2087) \\ t & (4,0087)^* & (5,9652)^* & (6,1133)^* \end{array}$$

$\bar{R}^2=0,9969$, $F^*=2129,30716, n=14, SCR=58,6118513, t=2000-2013$

نطبق اختبار LM لاختيار أحسن نموذج نحصل على :

الطريقة الأولى: $LM=\frac{n(\ \ '^{*}e^{*}-e\prime e)}{e'^{*}e^{*}}=\frac{14(58,6118-13,5829)}{(58,6118)}=10,75$

الطريقة الثانية : نأخذ بواقي المعادلة بدون بقيود*e ونقدرها بالنسبة لكل المتغيرات نحصل على المعادلة التالية :

$$
\begin{array}{llllllll}
\hat{e}_t^{*} & =13,90717 & -66,2580D_t & -0,0993X_{2t} & -0,1025X_{3t} & +0,4058(D_t\times X_{2t}) & +0,7629(D_t\times X_{3t}) \\
SE & (16,4681) & (23,9375) & (0,0845) & (0,2528) & (0,1207) & (0,3452) \\
t & (0,8448) & (-2,7679)^{*} & (-1,1746) & (-0,4053) & (3,3621)^{*} & (2,2092)
\end{array}
$$

$R^2=0,7681 \quad ,F^{*}=5,3009, n=14, SCR=13,5829, t=2000-2013$

$$LM=nR^2=14*0,7681=10,75$$

وهي نفس النتيجة السابقة

القيمة المجدولة لـ كاي تربيع هي $\chi^2_{0,05}(3)=7,815$ أقل من القيمة المحسوبة اذا نقبل H_1 أي النموذج المقيد ذات المتغيرات الصورية هو أحسن نموذج.

3-7-اختبار تحديد النموذج RESET (Regression Error Specification Test) لـ Ramsey

يعتمد هذا الإختبار على تحديد وجود أخطأ متثلة فيمايلي (هناك متغيرات غير مأخوذة في النموذج وهي أساسية، التحديد غير الجيد للنموذج، ارتباط بين المتغيرة X و الأخطاء) حيث بوجود أحد الحالات السابقة فان E(ε)≠0 ، وعليه فإن فرضية العدم والفرضية البديلة متمثلة في مايلي :

$$H_0 \quad : \varepsilon \sim N(0,\sigma^2)$$

$$H_1 : \varepsilon \sim N(\varepsilon,\sigma^2) \quad E(\varepsilon)\neq 0$$

نقوم بالختبار H_0 على أساس الانحدار الموسع التالي :

$$Y=X\beta+Z\alpha+\varepsilon$$

من أجل اختبار خطأ تحديد النموذج نقوم باختبار α=0 ، حيث المصفوفة Z مكونة من القيم المقدرة للمتغيرة المفسَرة مرفوعة بقوة (2،3...)

أي تتمثل مراحل الاختبار فيمايلي :

تقدير MCO للنموذج و حساب القيم المقدرة لـ Y_t:

$$\hat{Y}_t=b_1+b_2X_{2t}+b_3X_{3t}+. \quad . \quad . +b_kX_{kt}$$

2-تقدير عن طريق MCO للمعادلة التالية :

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_{2t} + \beta_3 X_{3t} + . \quad . \quad . + \beta_k X_{kt} + \alpha_2 \hat{Y}_t^2 + \alpha_3 \hat{Y}_t^3 + ... + \alpha_h \hat{Y}_t^h + \varepsilon_t$$

ويتم اختبار الفرضية التالية :

$$H_0 : \alpha_2 = \alpha_3 = ... = \alpha_h = 0$$

عن طريق اختبار الكلاسيكي لفيشر Fisher

$$F = \frac{(e'_* e_* - e'e)/(h-1)}{e'e/n-k} \mapsto F(h-1, n-k)$$

حيث: $e'_* e_*$ هو مجموع مربعات الأخطاء للنموذج (1) و $e'e$ مجموع مربعات الأخطاء للنموذج (2)

ملاحظة : اذا أخذنا h=2 فان الإختبار هو اختبار ستودنت حيث $H_0: \alpha_2=0$.

مثال 3-19 : بأخذ المثال السابق المتعلق بالسعرالوحدة المتوسط لمنتوج (MPU_t) و الكمية المطلوبة (QD_t) و السعر المتوسط للمنتوج المستورد (IPU_t) للفترة 2000 -2013 تقدير النموذج هو:

$$\underset{\substack{SE\\t}}{\hat{Y}_t} = \underset{\substack{(15,8116)\\(4,0087)^*}}{63,3848} - \underset{\substack{(0,0885)\\(5,9652)^*}}{0,5280 X_{2t}} + \underset{\substack{(0,2087)\\(6,1133)^*}}{1,2762 X_{3t}}$$

$$\bar{R}^2 = 0,9969 \quad , F^* = 2129,30716, n = 14, SCR = 58,6118, t = 2000 - 2013$$

نقوم بأخذ h=3 نتحصل على التقدير التالي :

$$\underset{\substack{SE\\t}}{\hat{Y}_t} = \underset{\substack{(6,3038)\\(7,3358)^*}}{46,2446} - \underset{\substack{(0,0411)\\(-16,2515)^*}}{0,6679 X_{2t}} + \underset{\substack{(0,2727)\\(11,2224)^*}}{3,0614 X_{3t}} - \underset{\substack{(0,0018)\\(-6,0269)^*}}{0,0110 \hat{y}_t^2} + \underset{\substack{(7,62E-06)\\(5,4471)^*}}{4,15E-05 \hat{y}_t^3}$$

$$\bar{R}^2 = 0,9995 \quad , F^* = 7543,723, n = 14, SCR = 6,7834, t = 2000 - 2013$$

قيمة فيشر Fisher :

$$F_{cal} = \frac{(e'_* e_* - e'e)/h-1}{e'e/n-k} = \frac{(58,61185 - 6,7834)/2}{6,7834/(14-5)} = 34,3820$$

$$F_\alpha(h-1, n-k) = F_{0,05}(2,9) = 4,2564$$

قيمة المحسوبة أكبر من القيمة المجدولة $F_{cal} > F_{0,05}(2,9)$ اذا نقبل H_1 وبتالي يجب اعادة النظر في النموذج

الفصل الرابع

دراسة وتحليل فرضيات النموذج القياسي

كنا نعتبر في الفصول السابقة أن فرضيات النموذج القياسي محققة حتى نتمكن من القول بأن تقدير المعالم هومن أحسن التقديرات الخطية غير متحيزة BLUE، ولكن في الحقيقة فان تلك الفرضيات غالبا ما تكون غير محققة في الواقع، ولذلك يجب التحقق من وجودها و في حالة عدم وجودها كيف يحب التعامل مع النموذج حتى نتحصل على معالم جيدة يمكن الاعتماد عليها؛ في هذا الفصل سنتطرق الى كيفية رفض هذه الفرضيات و في حالة الرفض كيف يمكن تصحيح النموذج .

4-1- التعدد الخطي (Multicolinearity)

ان اضافة عدة متغيرات في النموذج قد يؤدي الى وجود ارتباط بين المتغيرات ، وبوجد ارتباط قوي مابين المتغيرات فان الفرضية المتعلقة بوجد معكوس المصفوفة $(X'X)^{-1}$ غير محققة وبالتالي لايجود حل وحيد للمعالم بل عدد غير منتهي و يحدث هذا في حالة الارتباط التام بين المتغيرات، اما في حالة وجود ارتباط قوي بين المتغيرات فان هذا يؤدي الى نتائج مغيارة لما كنا نتوقعه مثلا اشارة سالبة للمعلمة بدلا من اشارة موجبة، معالم غير معنوية بدلا من معالم معنوية و ذلك رغم وجود معامل التحديد المصحح مرتفعة.

مثال4-1 : لدينا المعطيات التالية المتعلقة بنفقات الصيانة التجميعية في الزمن t لسيارة معينة (DCM_t)، و القيمة التجميعية للكيلومترات المنجزة (KCE_t) و عمر السيارة منذ شرائها بالأسابيع (Age_t) وقمنا بتقدير النموذج التالي :

$$DCM_t = \beta_1 + \beta_2 KCE_t + \beta_3 Age_t + \varepsilon_t$$

قبل تقدير النموذج نترقب اشارة موجبة لكلا من β2 >0 و β3 >0 ؛ أي كلما ارتفعت الكيلومترات المنجزة كلما ارتفعت النفقات ، و كلما ارتفع عمر السيارة كلما ارتفعت النفقات كذلك.

ولكن عند التقدير تحصلنا على مايلي :

$$\begin{array}{lllll} DCM_t = & 7,2883 & -151,1496 KCE_t & +27,5827 Age_t \\ SE & (117,7915) & (21,4254) & (2,8782) \\ t & (0,0618) & (-7,0546)^* & (9,5831)^* \end{array}$$

$$R^2 = 0,9476 \ , \ \overline{R}^2 = 0,9456 , F^* = 488,2955, n = 57, SCR = 268,3468$$

من خلال التقدير نلاحظ أن اشارة الكيلومترات المنجزة سالب وهذا عكس ما كون نتظره.

4-1- 1- تحديد وجود التعدد الخطي (Multicolinearity):

ان قيم عالية لمعامل التحديد R^2 و قيم منخضة لقييم ستودنت t هي من مؤشرات وجود التعدد الخطي و لكن عادة من أجل ايجاد التعدد الخطي نقوم بحساب الارتباطات مابين المتغيرات و من الاختبارات المستعملة لدينا :

أ-اختبار Klein: يتمثل هذا الاختبار في مقارنة معامل التحديد للنموذج مع معامل التحديد مابين المتغيرات أي يتمثل الاختبار في تقدير النموذج التالي:

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_{2t} + \beta_3 X_{3t} \dots \dots + \beta_k X_{kt} + \varepsilon_t$$

وتقدير معامل التحديد R^2 ومقارنته مع معامل التحديد مابين المتغيرات r^2_{xixj} حيث $i\neq j$؛ اذا كانت $r^2_{xixj} > R^2$ هناك احتمال تعدد خطي .

مثال 4-2: بأخذ نتائج تقدير النموذج في المثال 4-1 ، نقوم بحساب معامل التحديد مابين عمر السيارة و عدد الكيلومترات نحصل على مايلي :

$$r^2_{Age_t,KCE_t} = \frac{cov^2(Age_t,KCE_t)}{Var(Age_t)Var(KCE_t)} = 0{,}9929$$

$$\begin{array}{lcccc} DCM_t = & 7{,}2883 & -151{,}1496 KCE_t & +27{,}5827 Age_t \\ SE & (117{,}7915) & (21{,}4254) & (2{,}8782) \\ t & (0{,}0618) & (-7{,}0546)^* & (9{,}5831)^* \end{array}$$

$$R^2 = 0{,}9476 \ , \ \bar{R}^2 = 0{,}9456 , F^* = 488{,}2955 , n = 57 , SCR = 268{,}3468$$

معامل التحديد للنموذج R^2 > من معامل التحديد مابين المتغيرات، اذا احتمال وجود تعدد خطي.

ب-اختبار Farrar et Glauber (1967) : يسمح هذا الاختبار من تحديد درجة التعدد الخطي، ويتمثل الاختبار في حساب مايلي :

<u>المرحلة الأولى :</u> نقوم بحساب محدد مصفوفة معاملات الارتباط للمتغيرات المفسِرة

$$Det = \begin{vmatrix} 1 & r_{x_1x_2} & r_{x_1x_3} & \cdot & \cdot & \cdot & r_{x_1x_k} \\ r_{x_2x_1} & 1 & r_{x_2x_3} & \cdot & \cdot & \cdot & r_{x_2x_k} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ r_{x_kx_1} & r_{x_kx_2} & r_{x_kx_3} & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{vmatrix}$$

اذا كان يؤول إلى الصفر، هذا يعني وجود تعدد خطي معتبر

المرحلة الثانية : نقوم باختبار $\chi 2$ ، بوضع الفرضيات التالية :

(السلسلتين متعامدتين) $H_0 : Det = 1$

(السلسلتين مرتبطتين) $H_1 : Det < 1$

القيمة المحسوبة لـ $\chi 2$ هي : $\chi^2_{المحسوب} = -\left[n - 1 - \frac{1}{6}(2k+5)\right] \times LnDet$

n حجم العينة، k عدد المعالم

-إذا كانت $\chi^2_{المحسوب} > \chi^2_{المجدول}$ التي تقرأ من الجدول (درجة الحرية (1/2 k(k-1))؛ نقبل H1 .

-إذا كانت $\chi^2_{\text{المحسوب}} \quad \leq \chi^2_{\text{المجدول}}$ التي تقرأ من الجدول (درجة الحرية ((1/2 k(k-1))؛ نقبل H0 .

مثال 4-3: بأخذ نتائج تقدير النموذج في المثال 4-1 ، نقوم بحساب معامل التحديد مابين عمر السيارة و عدد الكيلومترات ونحسب المحدد:

$$r^2_{Age_t,KCE_t} = \frac{cov^2(Age_t,KCE_t)}{Var(Age_t)Var(KCE_t)} = 0{,}9929$$

$$Det = \begin{vmatrix} 1 & r_{x_1x_2} \\ r_{x_2x_1} & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0{,}9964 \\ 0{,}9964 & 1 \end{vmatrix} = 0{,}0071$$

القيمة المحسوبة لـ χ2 هي :

$$\chi^2_{\text{المحسوب}} = -\left[n-1-\frac{1}{6}(2k+5)\right]\times LnDet = -\left[57-1-\frac{1}{6}(2*3+5)\right]*Ln(0{,}0071) = 320{,}76$$

القيمة المجدولة لكاي تربيع 5% هي :

$$\chi^2_{\frac{1}{2}(k(k-1)),\alpha} = \chi^2_{3;0,05} = 7{,}815$$

القيم المجدولة لكاي أقل من القيمة المحسوبة اذا يوجد تعدد خطي.

4-1- 2- معالجة التعدد الخطي (Multicolinearity): لايوجد طريقة وحدة لمعالجة التعدد الخطي ، ومن بين الطرق المستعملة لدينا :

أ-حذف المتغيرات : نظرا لكون التعدد الخطي ناتج عن ارتباط المتغيرات فيما بينها، فان العملية التي تسمح من ازالة التعدد الخطي متمثلة في حذف المتغيرة أو المتغيرات ذات أقل قيمة لستودنت. ولكن يجب تفادي حذف العديد من المتغيرات لأنه قد يتسبب في مشكل تحديد النموذج والذي يؤدي بدوره الى الحصول على معالم ليست BLUE .

ب-زيادة حجم العينة : هذه العملية صالحة اذا كانت السلسلة المضافة تختلف عن السلسلة الأولى المستعملة.

ج– تحويل المصفوفة X/X (Ridge Regression): يتمثل في تحويل المصفوفة X/X إلى (X/X+cI)، حيث c هو ثابت كيفي مختار عشوائيا(arbitrairement)، يرفع من قيمة القطر الرئيسي، و يخفض من اثر الحسابي للتعدد الخطي.

مثال 4-3: بأخذ نتائج تقدير النموذج في المثال 4-1 ، فان المتغيرة التي يتم الاعتماد علية هو النموذج الذي يأخذ بدون متغيرة الكيلمترات مادام لها أقل قيمة لستودنت أي التقدير التالي :

$$\begin{array}{lll} DCM_t = & -626{,}2398 + & 7{,}3491 Age_t \\ SE & (104{,}7015) & (0{,}3315) \\ t & (-5{,}9811)^* & (22{,}1639)^* \end{array}$$

$$R^2 = 0{,}8993 \;\;,\; \bar{R}^2 = 0{,}8974 \,, F^* = 491{,}2394, n = 57, SCR = 368{,}5938$$

4-1- 3- اختيار النموذج الأمثلي :

هنالك عدة طرق تسمح لنا من تحديد النموذج الأمثلي وذلك في حالة نموذج يحتوي على العديد من المتغيرات كما ذكرنا سابقا نعتمد على المعيار و AIC و CS لكون معيار معامل التحديد لايمسمح بذلك؛ غير أنه يوجد طرق أخرى لاختيار أمثل نموذج من بينها:

4-1- 3- 1-طريقة الانحدار خطوة بخطوة Stepwise Regression :

تعمد هذه الطريقة على معامل الارتباط الجزئي بين المتغيرة الخارجية x و المتغير التابع y ، حيث نقوم بادخال المتغيرات ذات أكبر معامل ارتباط جزئي، ونقوم بفحص قيمة ستودنت للمتغيرة التي تم ادرجها في النموذج و نقوم بحذف المتيغرة ذات أقل قيمة لستودنت .

يتم حساب معامل الارتباط الجزئي كمايلي :

معامل الارتباط ما بين y و x1 ، تأثير x2 غير موجود= r yx1,x2

معامل الارتباط ما بين y و x2 تأثير x1 غير موجود= r yx2,x1

لحساب معامل الارتباط يمكن استعمال طريقتين :

الطريقة الأولى :

1-نقوم بحساب البواقي للإنحدار المتغير التابع مع مجمل المتغيرات الأخرى المفسِرة الباقية k-1.

2-نقوم بحساب البواقي المتغيرة xi على k-1 متغيرة مفسِرة.

3-حساب معامل الإرتباط بين ماحسب في المرحلة الأولى والثانية .

مثال 4-4 : حساب r2yx3,x1x2 أي لدينا x1، x2، x3 متغيرة مفسِرة و y متغيرة تابعة.

المرحلة الأولى: نقوم بحساب e1 من انحدار y على x1 و x2 .

$$e_1 = y - (b_1 + b_2 x_1 + b_3 x_2)$$

المرحلة الثانية : نقوم بحساب 2 e انحدار x3 على x1 و x2 .

$$e_2 = x_3 - (b_1' + b_2' x_1 + b_3' x_2)$$

المرحلة الثالثة: حساب معامل الارتباط ما بين e_1 و e_2

$$r^2_{yx_3,x_1x_2} = r^2_{e_1e_2}$$

الطريقة الثانية : في النموذج ذات k متغيرة مفسرة، يوجد علاقة مابين معامل الإرتباط الجزئي و ستودنتt :

$$r^2_{yx_i(\text{متغيرت الأخرى})} = \frac{t_i^2}{t_i^2 + (n-k)}$$

ملاحظة: هذه العلاقة صالحة إلا في حالة معامل الإرتباط ذات رتبة K.

مثال 4-5 : لدينا المعطيات التالية المتعلقة بظاهرة اقصادية ما

25	24	23	22	21	20	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	T
51	49	53	41	43	39	36	35	30	15	19	18	15	16	15	13	13	12	13	11	8	8	8	7	6	X1
52	49	47	52	42	41	39	38	35	15	14	13	13	14	11	11	11	10	10	7	6	6	5	5	4	X2
51	49	55	43	40	38	39	40	34	15	17	17	17	16	12	12	11	12	13	11	6	8	9	7	7	X3
52	50	53	41	41	40	36	39	32	15	19	18	16	16	15	13	14	12	13	12	8	9	8	7	7	X4
51	49	52	40	40	39	35	37	31	14	18	15	16	15	14	13	14	12	12	11	9	9	9	8	8	X5
46	45	50	39	40	37	36	35	33	15	14	13	12	12	11	10	8	8	8	7	5	5	4	3	2	y

مع افتراض العلاقة بين المتغير التابع و المتغيرات المسقلة هي:

$$Y_t=\beta_1+\beta_2X_{1t}+\beta_3X_{2t}+\beta_4X_{3t}+\beta_5X_{4t}+\beta_6X_{5t}+\varepsilon_t$$

اختيار النموذج الأمثل الممثلة للمتغير التابع عن طريق الانحدار خطوة بخطوة يتم كمايلي :

- المرحلة الأولى : حساب الارتباطات مع المتغير التابع نأخذ أكبر ارتباط نحصل على مايلي

القيمة	الارتباط
0,9932	R_{yx1}
0,9884	R_{yx2}
0,9941	R_{yx3}
0,9940	R_{yx4}
0,9928	R_{yx5}

أكبر قيمة هي مع المتغيرة X_3

- **المرحلة الثانية :** نقدر المتغيرة Y و X_3 مع المتغيرات الأخرى و نختار النموذج ذات أكبر ارتباط جزئي للمتغيرات المضافة كمايلي :

أ-1- ادخال المتغيرة X_1 :

$$\hat{Y}_t = -3{,}222 + 0{,}0562X_{3t} + 0{,}446X_{1t}$$
$$t \quad (-5{,}9811)^* \quad (3{,}3526)^* \quad (2{,}5537)^*$$
$$R^2_{YX1,X3} = 0{,}2286$$

أ-2- ادخال المتغيرة X_2 :

$$\hat{Y}_t = -2{,}101 + 0{,}0686X_{3t} + 0{,}2383X_{2t}$$
$$t \quad (-3{,}3841)^* \quad (5{,}9688)^* \quad (2{,}6540)^*$$
$$R^2_{YX2,X3} = 0{,}2425$$

أ-3- ادخال المتغيرة X_4 :

$$\hat{Y}_t = -3{,}387 + 0{,}512X_{3t} + 0{,}493X_{4t}$$
$$t \quad (-5{,}3073)^* \quad (2{,}2927)^* \quad (2{,}1362)^*$$
$$R^2_{YX1,X3} = 0{,}1717$$

أ-4-ادخال المتغيرة X_5 :

$$\hat{Y}_t = -3,315 + 0,617 X_{3t} + 0,396 X_{5t}$$
$$t \quad (-5,0424)^* \quad (2,2309)^* \quad (1,7811)$$
$$R^2_{YX1,X3} = 0,1260$$

من خلال النماذج الثلاثة نحتفظ بالنموذج (أ-2) لأننا لدينا أكبر ارتباط جزئي ، النموذج (أ-4) لم نأخذه لأن معامل X_5 غير معنوي عند 5% .

نعيد المرحلة الثانية على النموذج (2) أي نقوم بادخال المتغيرة X_1 و X_4 و X_5 كمايلي :

ب-1-ادخال المتغيرة X_1 :

$$\hat{Y}_t = -2,542 + 0,380 X_{3t} + 0,238 X_{2t} + 0,370 X_{1t}$$
$$t \quad (-4,2384)^* \quad (2,2398)^* \quad (2,3978)^* \quad (2,2953)^*$$
$$R^2_{YX1,X2X3} = 0,2005$$

ب-2-ادخال المتغيرة X4 :

$$\hat{Y}_t = -2,646 + 0,327 X_{3t} + 0,251 X_{2t} + 0,408 X_{4t}$$
$$t \quad (-4,0725)^* \quad (1,5240) \quad (2,4599)^* \quad (1,9342)$$
$$R^2_{YX4,X2X3} = 0,1512$$

هذا النموذج لايؤخذ بعين الاعتبار لأن بعض معاملاته غير معنوية عند 5%

ب-3- ادخال المتغيرة X5 :

$$\hat{Y}_t = -2,543 + 0,444 X_{3t} + 0,251 X_{2t} + 0,294 X_{5t}$$
$$t \quad (-3,7318)^* \quad (2,1871) \quad (2,3609)^* \quad (1,4254)$$
$$R^2_{YX5,X2X3} = 0,0082$$

هذا النموذج لايؤخذ بعين الاعتبار لأن بعض معاملاته غير معنوية عند 5%

النموذج الذي نحتفظ به هو النموذج (ب-1) ، نعيد المرحلة الثانية على هذا النموذج (ب-1) نحصل على مايلي :

ج-1- ادخال المتغيرة X4 على النموذج نحصل على :

$$\hat{Y}_t = -2,577 + 0,359 X_{3t} + 0,238 X_{2t} + 0,330 X_{1t} + 0,062 X_{4t}$$
$$t \quad (-3,931)^* \quad (1,6672) \quad (2,3410)^* \quad (1,124) \quad (0,1674)$$
$$R^2_{YX4,X2X3X1} = 1,3999 * 10^{-3}$$

هذا النموذج لايؤخذ بعين الاعتبار لأن بعض معاملاته غير معنوية عند 5%

ج-2- ادخال المتغيرة X5 على النموذج نحصل على :

$$\hat{Y}_t = -2,494 + 0,400 X_{3t} + 0,241 X_{2t} + 0,408 X_{1t} - 0,061 X_{4t}$$
$$t \quad (-3,8144)^* \quad (2,033) \quad (2,3523)^* \quad (1,69818) \quad (-0,21307)$$
$$R^2_{YX5,X2X3X1} = 2,2648 * 10^{-3}$$

اذا النموذج الذي نعتمد عليه حسب الانحدار خطوة بخطوة هو(ب-1) أي :

$$\hat{Y}_t = -2,542 + 0,380 X_{3t} + 0,238 X_{2t} + 0,370 X_{1t}$$

$$t \quad (-4,2384)^* \quad (2,2398)^* \quad (2,3978)^* \quad (2,2953)^*$$

$$R^2_{YX1,X2X3} = 0,2005$$

4-1- 3- 2-طريقة الاقصاء التدريجي Backward Elimnation :

تتمثل هذه الطريقة في تقدير النموذج بكامل المتغيرات k المفسِرة ، ثم القيام باقصاء المتغيرات التي قيمة ستودنت أقل من قيمة المجدولة لستودنت بمعنوية معينة، ونعيد تقدير النموذج في كل مرة حتى نتحصل على النموذج النهائي ؛غير أن هذه الطريقة صالحة اذا كان النموذج الابتدائي قابل للتقدير نظرا لامكانية وجود التعدد الخطي.

مثال 4–6: نأخذ المثال 4-5 و نقوم بتطبيق الاقصاء التدريجي ، يتمثل ذلك في تقدير النموذج الكلي :

$$\hat{Y}_t = -2,5277 + 0,3419 X_{1t} + 0,2240 X_{2t} + 0,3655 X_{3t} + 0,1875 X_{4t} - 0,1538 X_{5t}$$

$$t \quad (-3,7501)^* \quad (1,1348) \quad (2,3234)^* \quad (1,6561) \quad (0,3817) \quad (-0,4029)$$

$$R^2 = 0,993, \bar{R}^2 = 0,991, F = 542,1912, Dw = 1,48$$

نقوم بحذف المتغيرات ذات أقل معنوية و المتمثلة في X4 و نعيد تقدير النموذج بدون هذه الأخيرة

$$\hat{Y}_t = -2,494 + 0,408 X_{1t} + 0,247 X_{2t} + 0,40 X_{3t} - 0,061 X_{5t}$$

$$t \quad (-3,8144)^* \quad (1,6918) \quad (2,3523)^* \quad (2,033) \quad (-0,2130)$$

$$R^2 = 0,9929, \bar{R}^2 = 0,9915, F = 707,9405, Dw = 1,374$$

من خلال هذا النموذج X5 أقل معنوية نقوم بحذفها نحصل على :

$$\hat{Y}_t = -2,542 + 0,380 X_{3t} + 0,238 X_{2t} + 0,370 X_{1t}$$

$$t \quad (-4,2384)^* \quad (2,2398)^* \quad (2,3978)^* \quad (2,2953)^*$$

$$R^2 = 0,997, \bar{R}^2 = 0,991, F = 988,8574, Dw = 1,35$$

في هذا النموذج كل المتغيرات معنوية و بالتالي هو آخر نموذج و هو نفس نموذج الاقصاء التدريجي.

4-2- عدم تجانس الأخطاء (Heteroscedasticity)

ان عدم تجانس الأخطاء متمثل في عدم صحة الفرضية المتمثلة في $E(\varepsilon\varepsilon')=\sigma^2 I$، وعندما لاتكون محققة فانه يوجد تقدير آخر خطي و غير متحيز وذات أقل تباين من تباين تقدير طريقة المربعات الصغرى و المتمثل في التقدير عن طريق المربعات الصغرى المعممة MCG ، وعادة مانجد عدم التجانس في البيانات المقطعية.

4-2-1- التقدير عن طريق المربعات الصغرى المعممة MCG :

تعتمد هذه الطريقة على تقدير النموذج التالي : $Y = XB + \varepsilon$

مع :$E(\varepsilon\varepsilon')=\sigma^2\Omega$

ان قيمة التباين في حالة التقدير عن طريق MCO هو :

$$Var(b)=E\left[(b-B)(b-B)'\right]=\sigma_{\varepsilon}^{2}(X'X)^{-1}X'\Omega X(X'X)^{-1}$$

ان المصفوفة Ω متناضرة شبه موجبة مقلوبها هي المصفوفة Ω^{-1} والتي هي بدورها متناضرة شبه موجبة ، يوجد مصفوفة $\Omega^{-1/2}$ متناضرة شبه موجبة بحيث :

$$\Omega^{-1}=\Omega^{-1/2}\,\Omega^{-1/2}$$

بضرب النموذج بالمصفوفة $\Omega^{-1/2}$ نحصل على نموذج ذات أخطاء متجانسة أي :

$Y^*=\Omega^{-1/2}Y$ ، $X^*=\Omega^{-1/2}X$ و $\varepsilon^*=\Omega^{-1/2}\varepsilon$

النموذج المحول يعطى كمايلي : $Y^*=X^*\beta+\varepsilon^*$

مع : $E(\varepsilon^*)=\Omega^{-1/2}E(\varepsilon)=0$

و

$$Var(\varepsilon^*)=E\left(\Omega^{-\frac{1}{2}}\varepsilon\varepsilon'\Omega^{-\frac{1}{2}}\right)=\Omega^{-\frac{1}{2}}\underbrace{E(\varepsilon\varepsilon')}_{\sigma^2\Omega}\Omega^{-\frac{1}{2}}=\sigma^2 I$$

تقدير عن طريق المربعات الصغرى على النموذج المحول يعطي التقدير عن طريق المربعات الصغرى المعممة كمايلي :

$$b_{MCG}=(X^{*\prime}X^*)^{-1}X^{*\prime}Y^*$$

أي :

$$b_{MCG}=(X'\Omega^{-1}X)^{-1}X'\Omega^{-1}Y$$

والتباين معطى بـ :

$$Var(b_{MCG})=\sigma^2(X^{*\prime}X^*)^{-1}=\sigma^2(X'\Omega^{-1}X)^{-1}$$

4-2-2- اختبار تجانس الأخطاء : يتمثل اختبار تجانس الأخطاء في اختبار الفرضية التالية :

$$H_0:\sigma_1^2=\ldots=\sigma_m^2=\sigma^2$$

تتمثل المرحلة الأولى في كل الاختبارات في تقديرالنموذج عن طريق المربعات الصغرى و حساب البواقي (e_i)، و أخذ مربع الأخطاء(e_i^2) كمرحلة ثانية وكتقدير لـσ_i^2 .

4-2-2-1-اختبار White(1980): يعتمد هذا الاختبار على اختبار عدم التجانس وذلك بدون المعرفة الأولية لنوع عدم التجانس أو المتغيرة التي هي سبب في وجوده؛ ويتمثل الإختبار في اتباع المراحل التالية:

المرحلة الأولى : تقدير النموذج عن طريق طريقة المربعات الصغرى:

لنفترض النموذج الذي نريد تقديره هو:

$$Y_i=\beta_1+\beta_2X_{2i}+\beta_3X_{3i}+\varepsilon_i$$

نقوم بتقديره و الاحتفاظ بمربع الأخطاء e_i^2

المرحلة الثانية : تقدير النموذج التالي :

$$e_i^{\,2}=\alpha_1+\alpha_2X_{2i}+\alpha_3X_{3i}+\alpha_4X_{2i}^{\,2}+\alpha_5X_{3i}^{\,2}+\alpha_6X_{2i}X_{3i}+v_i$$

اختبار الفرضية التالية:

$$H_0:\ \alpha_2=\alpha_3=\alpha_4=\alpha_5=\alpha_6=0$$

عن طريق الاحصائية مضاعف لاقرانج nR^2 التي تتبع توزيع كاي تربيع

الذي يتبع توزيع كاي تربيع في حالتنا هذه درجة حريته 5 ، اذا القيمة المحسوبة أقل من القيمة المجدولة نقول انه التباين متجانس.

مثال4-4: لدينا المعطيات المتعلقة بالنفقات في المواد الغذائية و النفقات الكلية لـ 30 عائلة كمايلي :

العائلة	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
النفقات DT الكلية	382	388	391	415	456	460	472	478	494	655	662	663	677	680	690
النفقات في DC المواد الغذائية	217	196	303	270	325	260	300	325	336	390	385	470	322	540	433
العائلة	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
النفقات DT الكلية	695	695	720	721	516	752	752	769	773	775	785	788	790	795	801
النفقات في DC المواد الغذائية	295	340	450	415	345	332	397	446	480	410	380	610	530	360	305

قمنا ببناء النموذج التالي: $DC_i=\beta_1+\beta_2DT_i+\varepsilon_i$ فتحصلنا على مايلي :

$$\begin{array}{llll} DC_i & = 93{,}5216 & + 0{,}437\,DT_i \\ SE & (59{,}1210) & (0{,}0906) \\ t & (1{,}5818) & (4{,}8327)^* \end{array}$$

$$R^2=0{,}4547\ ,\ F^*=23.3556,\ n=30,\ SCR=142234.8$$

من أجل اختبار تجانس الأخطاء عن طريق اختبار White نقوم بحساب مربع الأخطاء للنموذج السابق و تقدير النموذج التالي :

$$e_i^{\,2}=\alpha_1+\alpha_2 DT_i+\alpha_3 DT_i^2+v_i$$

نحصل على :

$$\begin{array}{llll} e_i^2 = & 251063{,}86 & -97{,}0937DT_i & +0{,}0973DT_i^2 \\ SE & (30163{,}49) & (106{,}5508) & (0{,}097) \\ t & (0{,}8323) & (-0{,}9112) & (0{,}0891) \end{array}$$

$$R^2=0{,}1842\ ,\ \overline{R}^2=0{,}1238\,,\mathrm{F}=3{,}0489,n=30,SCR=6696{,}688$$

اختبار الفرضية التالية:

$$H_0:\ \alpha_2=\alpha_3=0$$

مضاعف لاقرانج nR^2 =5,5271 اقل من قيمة توزيع كاي تربيع درجة جرية (2) التي قيمتها 5,9915 وهذا بمستوى معنوية 5 %، وبتالي يمكن استنتاج أنه لايوجد عدم تجانس لتباين الأخطاء حسب اختبار White

4-2-2-2-اختبار قولد فيلد- كوندت (Goldfel-Quandt):

يستخدام هذا الاختبارعندما يكون تباين الاخطاء دالة لمتغيرة مفسرة X_k في النموذج ، وتتمثل عملية الاختبار فيمايلي :

ترتيب البيانات من أصغر الى أكبر قيمة حسب القيم المستقلة X_k التي هي سبب في عدم التجانس

اجراء انحدرين منفصلين الأول للقيم الصغيرة و الثاني للقيم الكبيرة للسيطرة على X_K مع حذف بعض المشاهدات في الوسط و التي حجمها c، قيم المتغيرات المحذوفة هي بالتقريب تساوي ربع المشاهدات الكلية.

حساب مجموع مربعات الأخطاء لانحدار القيم الكبيرة على مجموع مربعات الأخطاء لانحدار القيم الصغيرة ، ونقوم بحساب قيمة فيشر :

$$\frac{\text{SCR1}}{\text{SCR2}}\sim>F(\text{n1}-\text{k},\text{n2}-\text{k})$$

اذاكانت القيمة المحسوبة اكبر من القيمة المجدولة يوجد عدم تجانس .

مثال 4-5 : بأخذ المثال 4-4 المتعلق بالنفقات في المواد الغذائية و و النفقات الكلية، سنطبق عليه اختبار قولد فيلد- كوندت (Goldfel-Quandt) ، أي نقوم بترتيب المشاهدا من الأصغر الى الأكبر حسب المتغيرة DT وبحذف بالتقريب ربع المشاهدات أي 8 مشاهدات والقيام بانحدارين.

ترتيب السلسلة حسب DT نحصل على مايلي :

15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	
680	677	663	662	655	516	494	478	472	460	456	415	391	388	382	**النفقات DT الكلية**
540	322	470	385	390	345	336	325	300	260	325	270	303	196	217	**النفقات في DC المواد الغذائية**
30	29	28	27	26	25	24	23	22	21	20	19	18	17	16	
801	795	790	788	785	775	773	769	752	752	721	720	695	695	690	**النفقات DT الكلية**
305	360	530	610	380	410	480	446	397	332	415	450	295	340	433	**النفقات في DC المواد الغذائية**

نقوم بالقيام بانحدار أول للقيم الصغيرة لـ DT من 1 الى 11 و انحدار ثاني للقيم الكبيرة من 20 الى 30 ، المشاهدات المحذوفة من 11 الى 19 (8 مشاهدات).

- انحدار القيم الكبيرة (من 20 الى 30):

$$\begin{array}{lll} DC_i = & 120{,}1989 + & 0{,}3932 DT_i \\ SE & (969{,}3503) & (1{,}2537) \\ t & (0{,}1239) & (0{,}3136) \end{array}$$

$$R^2 = 0{,}010 \quad , \ F = 0.0983, n = 11, SCR_1 = 78259{,}57$$

- انحدار القيم الصغيرة (من 1 الى 11):

$$\begin{array}{lll} DC_i = & 14{,}6283 + & 0{,}6283 DT_i \\ SE & (64{,}7388) & (0{,}1376) \\ t & (0{,}2259) & (4{,}4417)^* \end{array}$$

$$R^2 = 0{,}6843 \quad , F^* = 19.5111, n = 11, SCR_2 = 10349.42$$

ج- القيمة المحسوبة لفيشر تساوي:

$$F_{CAL} = \frac{SCR_1}{SCR_2} = \frac{78259.57}{10349.42} = 7.5617$$

القيمة المجدولة عند مستوى معنوية 5% هي:

$$F(n1 - \mathrm{k}, \mathrm{n}2 - \mathrm{k}) = F_{0,05}(9,9) = 3{,}18$$

القيمة المحسوبة أكبر من القيمة المجدولة ، اذا يوجد عدم تجانس للأخطاء

4-2-2-3-اختبار قليزر Glejser :

يسمح هذا الإختبار من تحديد نوع عدم التجانس لتباين الأخطاء، وذلك عن طريق أخذ القيمة المطلقة للأخطاء و تقديرها بدلالة المتغيرة التي نعتقد أنها السبب في وجود هذا الأخير؛ و ذلك حسب النماذج التالية :

1-$|e_i| = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 X_i$ اذا كانت قيمة المعلمة X_i معنوية فان عدم التجانس للتباين هو من النوع $\hat{\sigma}_\epsilon^2 = k^2 X_i^2$ قيمة الدالة هي $f(X) = X_i^2$

2-$|e_i| = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 \sqrt{X_i}$ اذا كانت قيمة المعلمة X_i معنوية فان عدم التجانس للتباين هو من النوع $\hat{\sigma}_\epsilon^2 = k^2 X_j$ قيمة الدالة هي $f(X) = X_j$

3-$|e_i| = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 \frac{1}{X_i}$ اذا كان قيمة المعلمة X_i معنوية فان عدم التجانس للتباين هو من النوع $\hat{\sigma}_\epsilon^2 = k^2 X_i^{-2}$ قيمة الدالة هو $f(X) = X_i^{-2}$

إذا كانت كل معاملات النموذج مقبولة نختار نوع عدم التجانس الذي لديه أكبر قيمة لستودنت

التصحيح يتم بقسمة المعطيات على $\sqrt{(X)}$

مثال 4-6 :بأخذ المثال السابق المتعلق با بأخذ المثال 4-4 المتعلق بالنفقات في المواد الغذائية و و النفقات الكلية، سنطبق عليه النماذج السابقة :

1-تقدير النموذج : $|e_i| = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 X_i$

$$\underset{\substack{SE\\ t}}{|e_i|} = \underset{\substack{(34,2593)\\ (-0,7309)}}{-25,0418} + \underset{\substack{(0,05251)\\ (2,3431)^*}}{0,31230} DT_i$$

$$R^2 = 0,1639 \quad , \ F^* = 5,4909, n = 30, SCR = 47761.88$$

حسب النموذج فانه يوجد عدم تجانس للأخطاء لأن معامل DT مقبول

2-تقدير النموذج : $|e_i| = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 \sqrt{X_i}$

$$\underset{\substack{SE\\ t}}{|e_i|} = \underset{\substack{(64,1759)\\ (-1,42788)}}{-91,6361} + \underset{\substack{(2,544)\\ (2,2737)^*}}{5,7845} \sqrt{DT_i}$$

$$R^2 = 0,1558 \quad , \ F^* = 5,1699, n = 30, SCR = 48222.96$$

حسب هذا النموذج فانه يوجد عدم تجانس للأخطاء لأن معامل DT مقبول كذلك

3- تقدير النموذج : $|e_i| = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 \frac{1}{X_i}$

$$\underset{\substack{SE\\t}}{|e_i|} = \underset{\substack{(35{,}8188)\\(-0{,}5684)}}{-20{,}3609} + \underset{\substack{(0{,}0553)\\(2{,}1167)^*}}{5{,}7845\frac{1}{DT_i}}$$

$$R^2 = 0{,}1423 \quad , \; F^* = 4{,}4804, n = 30, SCR = 48917.45$$

حسب هذا النموذج فانه يوجد عدم تجانس للأخطاء لأن معامل DT مقبول كذلك

من خلال الأشكال الثلاثة فان عدم التجانس هو من الشكل $\hat{\sigma}_\epsilon^2 = k^2 X_i^2$ قيمة الدالة هي $f(X) = X_i^2$ لأن أكبر قيمة لستنودنت متواجدة في النموذج الأول.

وعليه نعيد تقدير النموذج بالتصحيح المتغيرات بتقدير النموذج التالي:

حيث β_2 يمثل معامل DT_i ، و β_1 يمثل الثابت

$$\underset{\substack{SE\\t}}{\frac{DC_i}{DT_i}} = \underset{\substack{(42{,}32621)\\(1{,}7461)}}{73{,}9093}\frac{1}{DT_i} + \underset{\substack{(0{,}0732)\\(6{,}4092)^*}}{0{,}4697}$$

$$R^2 = 0{,}0982 \quad , \; F^* = 3{,}049, n = 30$$

4-3- ارتباط الأخطاء (Autocorrelation)

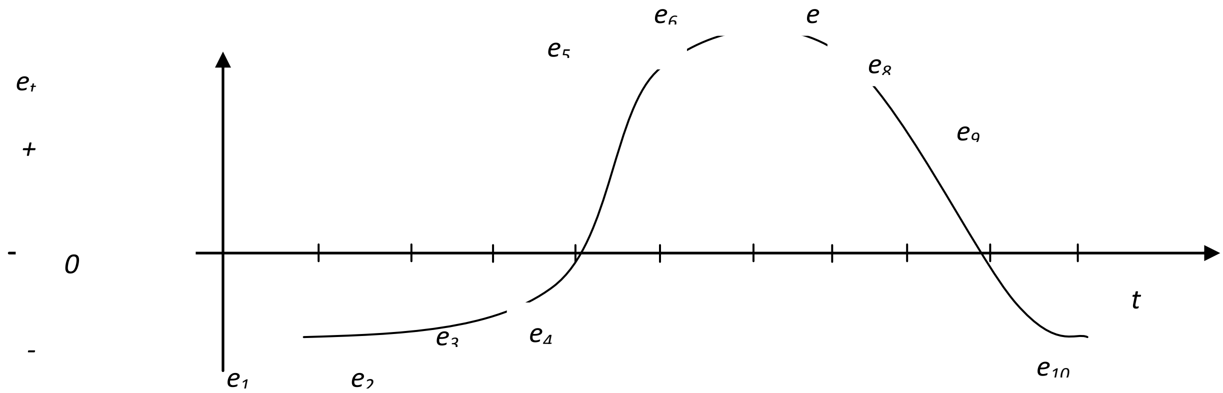
يتمثل الارتباط الذاتي للأخطاء في عدم تحقق الفرضية E(εt,εt')=0،

وفي حالة وجود الارتباط الأخطاء فان تقدير النموذج يتم عن طريق طريقة المربعات الصغرى المعممة؛ سنتطرق هنا الى الارتباط من الدرجة 1، وينسب عادة ارتباط الأخطاء الى السلاسل الزمنية ولكم هذا لايعني عدم وجوده في البيانات المقطعية؛ ومن نتائج ارتباط الأخطاء تقديرات ليست BLUE أي تقديرات غير متحيزة و لكن ليست ذات أقل تباين، كذلك تقدير تباين المعالم عن طريق المربعات الصغرى متحيز مما يؤثر على قيمة ستودنت المحسوبة والتي تكون مرتفعة؛ وهذا مايؤدي الى قبول المعلمة وهي مرفوضة في الواقع.

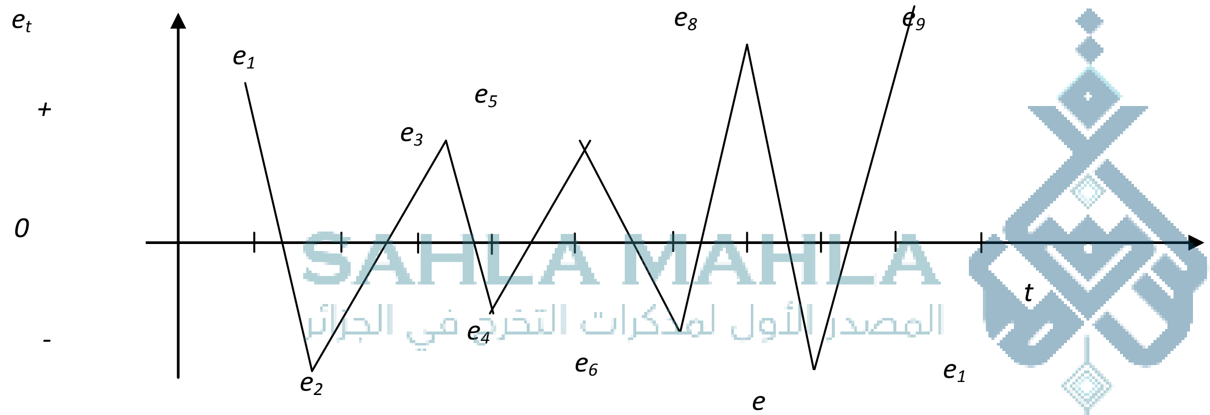
4-3-1- تحديد الارتباط الأخطاء :

4-3-1- 1- التمثيل البياني : يتمثل ذلك في تحليل البواقي بيانيا حيث إذا كانت البواقي متتابعة(موجبة أو سالبة)؛ لدينا ارتباط موجب للأخطاء،أما إذا كانت متناوبة (موجبة وسالبة)، لدينا ارتباط سالب؛غير أنه عادة ما يصعب تحليل بياني؛ حيث أنه من الصعب تفسير البيان، لذلك نستعمل اختبار لمعرفة إن كان هناك ارتباط أم لا.

أ-ارتباط ذاتي موجب : نتحصل على ارتباط ذاتي موجب إذا كانت البواقي متتالية نفس الإشارة .



ب - ارتباط ذاتي سالب: نتحصل على ارتباط ذاتي سالب، لم تتغير بواقي إشارتها بكثرة كالتالي :



4-3-1-2-اختبار دربين واتسون Durbin-Watson

يسمح لنا هذا اختبار في تحديد الإرتباط الذاتي للأخطاء من الدرجة 1 على الشكل التالي :

$$\varepsilon_t = \rho\varepsilon_{t-1} + u_t \qquad , \quad \mathrm{u}_t \to N(0, \sigma_u^2)$$

الاختبار هو كالتالي:

$H_0 : \rho = 0$ لايوجد إرتباط

$\mathrm{H}_1 : \rho \neq 0$ الأخطاء مرتبطة

من أجل اختبار فرضية العدم H_0 ، نقوم بحساب إحصائية DW :

$$DW = \frac{\sum_{t=2}^{n}(e_t - e_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^{n} e_t^2}$$

حيث: e_t تمثل البواقي في النموذج

$$DW = \frac{\sum_{t=2}^{n} e_t^2 - 2\sum_{t=2}^{n} e_t e_{t-1} + \sum_{t=2}^{n} e_{t-1}^2}{\sum_{t=1}^{n} e_t^2}$$

لما n يكون كبير لدينا : $\sum_{t=1}^{n} e_t^2 \approx \sum_{t=2}^{n} e_{t-1}^2 \approx \sum_{t=2}^{n} e_t^2$

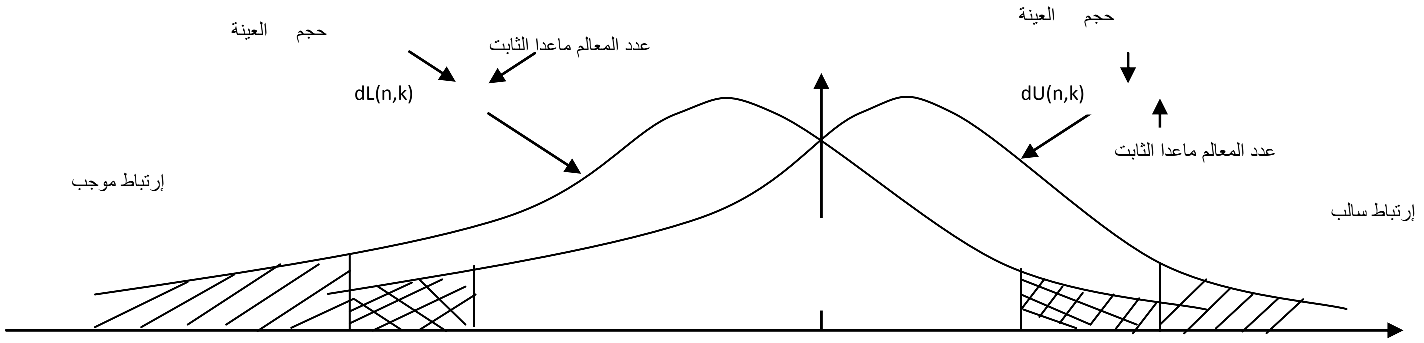
إذا :

$$DW = \frac{2\sum_{t=2}^{n} e_t^2 - 2\sum_{t=2}^{n} e_t e_{t-1}}{\sum_{t=1}^{n} e_t^2}$$

مع العلم أن: $\hat{\rho} = \frac{\sum_{t=2}^{n} e_t e_{t-1}}{\sum_{t=1}^{n} e_t^2}$

إذا :

$$DW = 2(1 - \hat{\rho})$$



α تؤخذ من الجدول (عادة ماتكون 5%) ، و DW∈ [0،4]

(تمثل القيمة العليا Uper)، و dL (تمثل القيمة الدنيا Lower)

DL و DUهي قيم مأخوذة من جدول Durbin Wtson

الإختبار يكون كالتالي :

إذا كانت القيمة DW تنتمي إلى المجال :

]dL، 0 [∈DW، H_1 محققة، الإرتباط موجب (0<ρ)

]4، 4-dL [∈DW، H_1 محققة، الإرتباط سالب (0>ρ)

]dU،4-dU [∈DW، H_0 محققة، لايوجد إرتباط (0=ρ)

]dU، dL [∈DW، أو]4-dL، 4-dU [∈DW H_1 ، منطقة الشك.

أ-شروط إستعمال اختبار Durbin –Watson

1-النموذج يحتوي على الثابت.

2-المتغيرة المفسَرة لاتظهر كمتغير مفسِرة(كمتغيرة مؤخرة).

3-المصفوفة x غير عشوائيا (إطلاقا).

مثال 4-6:

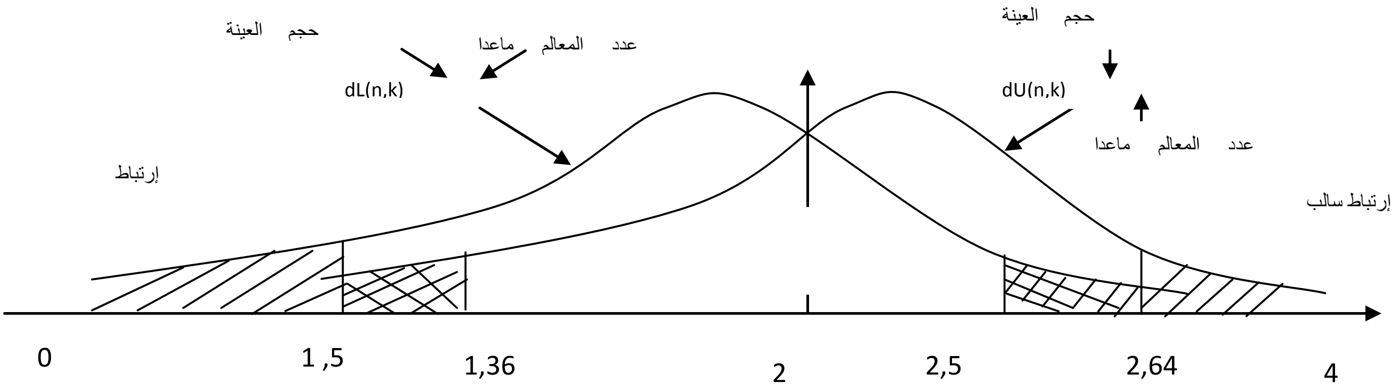
لدينا المعطيات المتعلقة بالأرباح (P) و المبيعات (V) قمنا بتقدير النموذج فتحصلنا على النتائج التالية:

$$\begin{array}{cccc} \hat{P}_t & = 8,5167 & + 0,0418 V_t \\ SE & (4,86819) & (0,0033) \\ t & (1,751) & (12,607)^* \end{array}$$

$$R^2 = 0,8457, \bar{R}^2 = 0,8403, \mathrm{DW} = 0,9695 \quad ,$$

$$\mathrm{F}^* = 158,9542, n = 31, SCR = 5891,945, t = 1984 - 2014$$

من جدول دربين واتسون (انظر الملحق) بعدد المشاهدات 31 و عدد المعالم 1 نتحصل على القيم الدنيا و العاليا(قيم dl=1,36 ،du =1,50)



$$DW = \frac{\sum_{t=2}^{n}(e_t - e_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^{n} e_t^2} = \frac{5712,0036}{5892,0317} = 0,9694$$

نلاحظ أن احصائية دربين واتسون تقع في H_1 اذا يوجد ارتباط للأخطاء

تم التقدير و حساب قيمة احصائية دربين وتسون من خلال الجدول التالي :

1994	1993	1992	1991	1990	1989	1988	1987	1986	1985	1984	السنوات
694,6	631,9	575,4	492,2	443,1	412,7	389,4	356,4	345,7	338,0	305,3	المبيعات Vt
28,6	33,2	32,1	29,0	30,9	27,5	23,223,2	19,5	17,7	15,3	15,2	الأرباح PT
-8,9510	-1,7301	-0,4684	-0,0907	3,8617	1,7324	-1,5936	-3,9142	-5,2670	-7,3451	-6,0782	et
52,1408	1,5919	0,1427	15,6213	4,5338	11,0627	5,3852	1,8299	4,3187	1,6049		(et-et-1)2
80,1200	2,9933	0,2194	0,0082	14,9129	3,0013	2,5396	15,3211	27,7409	53,9505	36,9450	et^2

تابع :

2005	2004	2003	2002	2001	2000	1999	1998	1997	1996	1995	السنوات
1912,8	1741,8	1496,4	1328,1	1203,2	1065,2	1060,6	1017,2	849,5	751,1	708,8	المبيعات Vt
101,3	92,6	98,7	81,1	70,4	64,5	49,1	58,7	48,1	36,5	31	الأرباح PT
12,8283	11,2761	27,634	17,06872	11,58954	11,4579	-3,74978	7,66434	4,0742	-3,41268	-7,14454	et
2,40932	267,575	111,62	30,02141	0,017319	231,275	130,282	12,8891	56,0534	13,92678	3,26323	(et-et-1)2
164,564	127,15	763,63	291,3412	134,3174	131,284	14,0609	58,7421	16,5991	11,64638	51,0445	et^2

تابع :

$\Sigma(\varepsilon_\tau - \varepsilon_{\tau-1})^2$	$\Sigma\varepsilon^2=$	2014	2013	2012	2011	2010	2009	2008	2007	2006	السنوات
		2596,2	2378,2	2220,9	2331,4	2335	2335	2114,3	2039,4	2144,7	المبيعات Vt
		154	115,6	83,1	87,6	83,1	87,6	107,6	85,8	70,9	الأرباح PT
		36,962	7,67454	-18,2503	-18,3692	-23,0197	-18,5197	10,7056	-7,96362	-27,2652	et
5712		857,76	672,0984	0,014137	21,627	20,25	854,116	348,538	372,5494	1607,48	(et-et-1)2
	5892,03	1366,2	58,89856	333,0742	337,428	529,907	342,979	114,609	63,41924	743,389	et^2

ملاحظة: في حالة معطيات موسمية أو فصلية نستعمل اختبار Walis ،حيث في هذا النوع من المعطيات يكمن الحصول على إرتباط من الدرجة الرابعة، إذ النموذج الملائم هو :

$$\varepsilon_t = \varphi_4 \varepsilon_{t-4} + u_t$$

الإختبار يكون كالتالي : $H_0 : \varphi = 0$

إحصائية Walis مستخرجة من إحصائية Durbin –Wtson كالتالي : $d_4 = \frac{\sum_{t=5}^{n}(e_t - e_{t-4})^2}{\sum_{t=1}^{n} e_t^2}$

حيث : e_t تمثل الأخطاء المستخرجة من طريقة المربعات الصغرى MCO .

4-3-1-3-اختبار Durbin في حالة انحدار يحتوي على متغير مؤخر للمتغيرة التابعة(المفسرة):

ليكن النموذج كالتالي :

$$y_t = B_0 + B_1 y_{t-1} + B_2 x_{1t} + . \quad . \quad . + \mathrm{B}_{s+1} x_{st} + \varepsilon_t \qquad . \qquad . \qquad . \qquad (\mathrm{I})$$

مع : $u_t \to N(0, \sigma_u^2 I)$ ، $|\rho| < 1$ ، $\varepsilon_t = \rho\varepsilon_{t-1} + u_t$

الناتجة الأساسية لـ Durbin متمثلة في أنه تحت فرضية الأساسية :

$$H_0 : \quad \rho = 0$$

الإحصائية المستعملة للاختبار هي : $h = \hat{\rho}\sqrt{\frac{n}{1 - n \cdot Var(b_1)}} \mapsto N(0,1)$

حيث : n حجم العينة (يكون معتبر كبير)

$Var(b_1)$: تباين معامل y_{t-1} المقدر من نموذج I عن طريق MCO .

$\hat{\rho}$: القيمة المقدرة من النموذج عن طريق العلاقة التالية : $\hat{\rho} = \sum_{t=2}^{n} e_t e_{t-1} \Big/ \sum_{t=2}^{n} e_{t-1}^2$

المراحل المتبعة هي كالتالي :

1-تقدير النموذج I عن طريق MCO، وحساب $Var(b_1)$.

2-باستعمال البواقي، نقوم بحساب $\hat{\rho}$ ، إذا قمنا بحساب إحصائية Durbin –Wtson؛ نستعمل التقريب التالي : $\hat{\rho} = 1 - dW/2$

3- يتم تقريب توزيع h بتوزيع الطبيعي ونقوم بالإختبار.

$$H_0 \ : \ \mathrm{h} = 0$$
$$\mathrm{H}_1 \ : \mathrm{h} \neq 0$$

إذا كان $|h| \leq z^{\alpha/2}$ نقبل H_0 ؛ غير ذلك نقبل H_1

ملاحظة : إذا $n\ Var(b) \geq 1$ ، فإن الاختبار غير صالح، وبالتالي يمكن استعمال طريقة مقربة والمتمثلة فيمايلي :

1-نقوم بتقدير النموذج (ا) باستعمال طريقة MCO، من أجل ايجاد البواقي e .

2-استعمال انحدار ثاني عن طريقة MCO لـ :

e_t على كل من e_{t-1} ، y_{t-1}، x_{1t}، . . . ، x_{st}

اختبار معامل e_{t-1} في الانحدار(2) اذا كان غير معنوي (يختلف عن الصفر) باستعمال اختبار ستودنت t المعتاد، نرفض فرضية العدم : $H_0 : \rho = 0$

يمكن تعميم هذا الاختبار للاختبار الارتباط يفوق (1) وذلك باضافة الأخطاء et-2 ، et-3،....et-p

ملاحظة : يمكن كذلك استعمال اختبار لاقرانج لـ Breusch-Godfrey للاختبار الارتباط

4-3-1-4- اختبار لاقرانج لـ Breusch-Godfrey : يستعمل هذا الاختبار للاختبار الأخطاء كمايلي:

1-نقوم بتقدير النموذج (ا) باستعمال طريقة MCO، من أجل ايجاد البواقي e .

2-استعمال الانحدار باستعمال طريقة MCO لـ :

الانحدار الثاني e_t على كل من e_{t-1} ، y_{t-1}، x_{1t}، . . . ، x_{st}

3- نستعمل اختبار لاقرانج $LM=nR^2$ ونقارنه باحصائية كاي تربيع $\chi^2(1)$ حيث R^2 هو معامل التحديد النموذج في المرحلة (2)

يستعمل كذلك هذا الاختبار لتحديد ارتباط للأخطاء يفوق (1) و ذلك باضافة في المرحلة (2) الأخطاء et-2 ، et-3،....et-p ، واستعمال اختبار لاقرانج $LM=nR^2$ ومقارنته باحصائية كاي تربيع $\chi^2(p)$.

مثال 4-7: نقوم بتقدير النموذج الذي يربط بين الأجر(Y_t) و الانتاجية(X_t) و الأجر السابق (Y_{t-1})

$$\begin{array}{llll}
\hat{Y}_t = & 8,3091 & +0,1265X_t & +0,7982Y_{t-1} \\
SE & (1,9113) & (0,0033) & (0,0606) \\
t & (4,3425)^* & (2,8431)^* & (13,1719)^*
\end{array}$$

$$R^2 = 0,9923, \bar{R}^2 = 0,9919, \text{DW} = 1,7336$$

$$\text{F}^* = 2348,399, n = 39, SCR = 44,0190$$

وهذا بأخذ المعطيات التالية:

20	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	السنة
89.7	88.1	87	84.5	83.7	84.7	82.9	80.5	79	76.6	76.5	73.7	71.8	69.3	67.8	65.3	63.3	61.7	59.9	58.5	Yt
79.5	78.4	77.2	74.8	72.2	73.1	71	68.8	66.2	64.8	64.5	62.3	61	58.6	54.6	54.1	52.1	49.8	48	47.2	X_t
88.1	87	84.5	83.7	84.7	82.9	80.5	79	76.6	76.5	73.7	71.8	69.3	67.8	65.3	63.3	61.7	59.9	58.5	-	Y_{t-1}

تابع

40	39	38	37	36	35	34	33	32	31	30	29	28	27	26	25	24	23	22	21	السنة
105.1	101.1	99.6	99.1	97.7	99.9	100	97.4	96.4	95.8	97.3	96.3	95.9	92.8	91.5	91.2	91.1	89.8	89.7	90	Yt
110.5	107.5	105.2	102.2	101.4	100.1	100	95.9	94.5	93.3	92.4	91.3	90.7	88.1	86.4	84	81.2	81.4	79.8	79.7	X_t
101.1	99.6	99.1	97.7	99.9	100	97.4	96.4	95.8	97.3	96.3	95.9	92.8	91.5	91.2	91.1	89.8	89.7	90	89.7	Y_{t-1}

مادام المتغير التابع يوجد كما متغير مؤخر فان احصائية دربين واتسون غير صالحة نستعمل احصائية دربين.

نقوم باحساب ارتباط الأخطاء من احصائية دربين واتسون .

$$\hat{\rho} = 1 - dW/2 = 1 - (1,7336/2) = 0,1332$$

$$h = \hat{\rho}\sqrt{\frac{n}{1 - n \cdot Var(b_1)}} = 0,1332\sqrt{\frac{39}{1 - 39 \cdot (0,0606)^2}} = 0,1332\sqrt{\frac{39}{0,8531056}} = 0,9118$$

من خلال احصائية التوزيع الطبيعي 1,96 ، القيمة المحسوبة أقل من القيمة المجدولة اذا نقبل عدم وجود ارتباط للأخطاء.

و باستعمال اختبار لاقرانج لـ Breusch-Godfrey نحصل على :

$$e_t = 1,4159 + 0,0246X_t - 0,0391Y(-1) + 0,1250\, e_{t-1}$$

$$R^2 = 0,0163 \;, n = 38$$

$$LM = nR^2 = 38 * 0,0163 = 0,6194 < \chi^2_{0,05}(1) = 3,84$$

وعليه نقبل H_0 لايوجد ارتباط للأخطاء

4-3-2- تقدير النموذج في حالة وجود إرتباط ذاتي للأخطاء :

لنفترض وجود ارتباط ذاتي من الدرجة (1)، النموذج يكتب كالتالي : $Y = XB + \varepsilon$

مع : $|\rho| < 1$ ، $\varepsilon_t = \rho\varepsilon_{t-1} + u_t$ (AR(1)) ، $u_t \mapsto N(0, \sigma_u^2)$ ، $E(u_t u_{t'}) = 0, t \neq t'$

لدينا :

$$Var(\varepsilon_t) = E(\varepsilon_t^2) = \frac{\sigma_u^2}{1-\rho^2} = \sigma_\varepsilon^2$$

$\rho \neq 1$

وباستعمال خصائص ut، نبرهن مايلي : $E(\varepsilon_t \varepsilon_{t-2}) = \rho^2 \sigma_\varepsilon^2, E(\varepsilon_t \varepsilon_{t-1}) = \rho \sigma_\varepsilon^2$

وعليه مصفوفة التباين والتباين المشترك للأخطاء في هذه الحالة هي :

$$\Omega_\varepsilon = E(\varepsilon\varepsilon') = \frac{\sigma_u^2}{1-\rho^2} \begin{bmatrix} 1 & \rho & \rho^2 & . & . & . & \rho^{n-1} \\ \rho & 1 & \rho & . & . & . & \rho^{n-2} \\ \rho^2 & \rho & 1 & . & . & . & \rho^{n-3} \\ . & . & . & & . & . & . \\ \rho^{n-1} & \rho^{n-3} & \rho^{n-3} & . & . & . & 1 \end{bmatrix}$$

مع : $\rho \neq 1$

من أجل إيجاد نموذج غير متحز وذات أصغر تباين نستعمل طريقة المربعات الصغرى المعممة MCG (Moindre Carré généralisé)

$$b_{MCG} = (X'\Omega_\varepsilon^{-1} X)^{-1} (X'\Omega_\varepsilon^{-1} Y) \qquad \text{(أ)}$$

بما أننا لانملك قيم ρ و σ_u^2 لايمكن حساب مصفوفة التباين والتباين المشترك، لذلك نقوم بتحويل المصفوفي يمكننا من إيجاد نموذج ذات تباين للأخطاء متجانس $E(\varepsilon^2) = \sigma^2$ ومستقلة .

$$MY = MXB + M\varepsilon$$

وليكن : $E(M\varepsilon(M\varepsilon)') = E(M\varepsilon\varepsilon') = ME(\varepsilon\varepsilon')M' = M\Omega_\varepsilon M' = \sigma_\varepsilon^2 I$

في هذه الحالة يمكن تحديد مقدر BLUE لـ B باستعمال طريقة المربعات الصغرى MCO :

$$b = ((MX)'MX)^{-1}(MX)'MY = (X'M'MX)^{-1}X'M'MY$$

$$b = (X'M'MX)^{-1}X'M'MY \qquad (ب)$$

بمقارنة حدود العلاقة (أ) مع حدود العلاقة (ب) نتحصل على : $M'M = \Omega_{\varepsilon}^{-1}$

إذا يمكن تعويض طريقة المربعات الصغرى المعممة MCG بالطريقة MCO(إذا حجم العينة n كبير) مستعملة على النموذج $MY = MXB + M\varepsilon$

أي نقوم باستعمال تحويلات على متغيرات النموذج كالتالي :

$$MY = \begin{bmatrix} y_2 - \rho y_1 \\ y_3 - \rho y_2 \\ . \\ . \\ . \\ y_n - \rho y_{n-1} \end{bmatrix} \quad \wedge \quad MX_k = \begin{bmatrix} x_{k2} - \rho x_{k1} \\ x_{k3} - \rho x_{k2} \\ . \\ . \\ . \\ x_{kn} - \rho x_{kn-1} \end{bmatrix}$$

ملاحظة : اذا قمنا بتعويض القيم الأولى بـ $y_1\sqrt{1-\rho^2}$ و $x_{k1}\sqrt{1-\rho^2}$ نتكلم عن طريقة Prais-Winsten،

مثال : ليكن النموذج $y_t = \beta_1 + \beta_2 x_{1t} + \beta_3 x_{2t} + \varepsilon_t$ --------- (1)

$$|\rho| < 1 \text{ ، } \varepsilon_t = \rho\varepsilon_t + u_t$$

يمكن كتابة النموذج كالتالي : $y_{t-1} = \beta_1 + \beta_2 x_{1t-1} + \beta_3 x_{2t-1} + \varepsilon_{t-1}$ -------(2)

حساب (1)-ρ(2) يعطينا :

$$y_t - \rho y_{t-1} = \beta_1(1-\rho) + \beta_2(x_{1t} - \rho x_{1t-1}) + \beta_3(x_{2t-1} - \rho x_{2t-1}) + (\varepsilon_t - \rho\varepsilon_{t-1})$$

$$dy_t = a_1 + \beta_2 dx_{1t} + \beta_3 dx_{2t} + v_t$$

ونطبق MCO ؛ فيما يخص الثابت : $\beta_1 = a_1/1-\rho$

4-3-2-1- طرق التقديرللنموذج ذات ارتباط ذاتي للأخطاء : ان قيمة معامل الارتباط للأخطاء ρغير معلومة لذلك هناك عدة طرق تسمح لنا بحسابها وهذا من أجل تطبيق طريقة MCG من بين هذه الطرق لدينا :

أ- حساب ρ من خلال النموذج البدائي :

المرحلة (1): تقدير ρ بطريقة مباشرة باستعمال e_t و e_{t-1} كمايلي :

$$\hat{\rho}=\sum_{t=2}^{n} e_t e_{t-1} \Big/ \sum_{t=1}^{n} e_t^2$$

أو عن طريق احصائية دربين واتسون:

$$\hat{\rho}=1-DW/2$$

المرحلة (2): تحويل المتغيرات باستعمال شبه فروقات وتقدير النموذج

$$y_t-\rho y_{t-1}=\beta_1(1-\rho)+\beta_2(x_{2t}-\rho x_{2t-1})+\ldots+\beta_k(x_{kt}-\rho x_{kt-1})+(\varepsilon_t-\rho\varepsilon_{t-1})$$

مثال 4-8: لدينا المعطيات المتعلقة بالأرباح (P) و المبيعات (V) قمنا بتقدير النموذج فتحصلنا على النتائج التالية:

$$\begin{array}{lll} \hat{P}_t = & 8,5167 & +0,0418V_t \\ SE & (4,86819) & (0,0033) \\ t & (1,751) & (12,607)^* \end{array}$$

$$R^2=0,8457, \bar{R}^2=0,8403, \mathrm{DW}=0,9695 \quad ,$$

$$\mathrm{F}^*=158,9542, n=31, SCR=5891,945, t=1984-2014$$

من خلال تقدير النموذج نلاحظ ارتباط للأخطاء موجب حسب قيم dl=1,36، du =1,50 من جدول دربين واتسون . اذا تصحيح النموذج يكون كمايلي:

حساب ارتباط الأخطاء من قيمة دربين واتسون :

$$\hat{\rho}=1-DW/2=0,51525$$

المرحلة (2): تحويل المتغيرات على شبه فروقات، و القيم الأولى بـ اذا قمنا بتعويض القيم الأولى بـ $y_1\sqrt{1-\rho^2}$ و $x_{k1}\sqrt{1-\rho^2}$ نحصل على التقدير التالي :

$$\begin{array}{lll} \hat{P}_t = & 4,0426 & +0,04312V_t \\ SE & (4,4137) & (0,0058) \\ t & (0,9159) & (7,3529)^* \end{array}$$

$$R^2=0,6508, \bar{R}^2=0,6388, \mathrm{DW}=1,6191 \quad ,$$

$$\mathrm{F}^*=54,0604, n=31, SCR=4628,8110, t=1984-2014$$

كما هو ملاحظ في الجدول التالي:

السنوات	1984	1985	1986	1987	1988	1989	1990	1991	1992	1993	1994
المبيعات Vt	305,3	338	345,7	356,4	389,4	412,7	443,1	492,2	575,4	631,9	694,6
الأرباح PT	15,2	15,3	17,7	19,5	23,22	27,5	30,9	29	32,1	33,2	28,6
القيم الجديدة للمبيعات	261,6543	180,6942	171,5455	178,2781	205,7649	212,0617	230,456	263,8927	321,79	335,4252	369,0135
القيم الجديدة للأرباح	13,027	7,4682	9,8167	10,3801	13,1526	15,5462	16,7306	13,0788	17,158	16,6605	11,4937

تابع :

السنوات	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005
المبيعات Vt	708,8	751,1	849,5	1017,2	1060,6	1065,2	1203,2	1328,1	1496,4	1741,8	1912,8
الأرباح PT	31	36,5	48,1	58,7	49,1	64,5	70,4	81,1	98,7	92,6	101,3
القيم الجديدة للمبيعات	350,9074	385,8908	462,4957	579,4951	536,4877	518,7259	654,356	708,1512	812,1	970,7799	1015,3376
القيم الجديدة للأرباح	16,2639	20,5273	29,2934	33,9165	18,8548	39,2012	37,1664	44,8264	56,913	41,7448	53,5879

تابع :

السنوات	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014
المبيعات Vt	2144,7	2039,4	2114,3	2335	2335	2331,4	2220,9	2378,2	2596,2
الأرباح PT	70,9	85,8	107,6	87,6	83,1	87,6	83,1	115,6	154
القيم الجديدة للمبيعات	1159,13	934,3433	1063,499	1245,607	1131,89	1128,291	1019,6	1233,881	1370,8325
القيم الجديدة للأرباح	18,7052	49,2688	63,3916	32,1591	37,9641	44,7827	37,964	72,7827	94,4371

4-3-2-1- 1- طريقة Cochrane-Orcutt: تتم هذه الطريقة على عدة مراحل :

المرحلة (1): التقدير عن طريق MCO للنموذج الأول و تقدير الأخطاء e_t

المرحلة (2) : تقدير ρ عن طريق العلاقة التالية :

$$\hat{\rho} = \sum_{t=2}^{n} e_t e_{t-1} \Big/ \sum_{t=1}^{n} e_t^2$$

المرحلة(3): تطبيق طريقة MCO على النموذج المحول :

$$y_t - \rho y_{t-1} = \beta_1(1-\rho) + \beta_2(x_{2t} - \rho x_{2t-1}) + \ldots + \beta_k(x_{kt} - \rho x_{kt-1}) + (\varepsilon_t - \rho\varepsilon_{t-1})$$

نتحصل على مقدرتقاربي مماثل لتقدير MCG

المرحلة (4): أخذ التقدير السابق للمرحلة (3) و حساب البواقي لنموذج

المرحلة(5) : نعيد المرحلة (2) تتوقف لما $\hat{\rho}$ لاتتغير بطريقة معنوية مابين تكررين (مثلا 0.001)

ملاحظة: ان هذه الطريقة تعطي نتيجة في وقت ضيق بعد 6 تكرارات أو أقل ، بالاضافة الى أن التقدير يتم على T-1 مشاهدة ، ولكن يمكن استعمال طريقة Prais-Winsten وذلك بوضع القيم الابتدائية ـ $y_1\sqrt{1-\rho^2}$ و $x_{k1}\sqrt{1-\rho^2}$

مثال 4-9 : نأخذ المعطيات المتعلقة بالأرباح (P) و المبيعات (V) قمنا بتقدير النموذج فتحصلنا على النتائج التالية:

$$\begin{array}{lll} \hat{P}_t = & 8,5167 & +0,0418V_t \\ SE & (4,86819) & (0,0033) \\ t & (1,751) & (12,607)^* \end{array}$$

$$R^2 = 0,8457, \bar{R}^2 = 0,8403, \mathrm{DW} = 0,9695 \quad ,$$

$$\mathrm{F}^* = 158,9542, n = 31, SCR = 5891,945, t = 1984-2014$$

المرحلة (2) : تقدير ρ عن طريق العلاقة التالية :

$$\hat{\rho} = \sum_{t=2}^{n} e_t e_{t-1} \Big/ \sum_{t=1}^{n} e_{t-1}^2$$

حساب ارتباط الأخطاء من قيمة دربين واتسون :

$$\hat{\rho} = 1 - DW/2 = 0,51525$$

المرحلة (2): تحويل المتغيرات على شبه فروقات، و القيم الأولى بـ اذا قمنا بتعويض القيم الأولى بـ $y_1\sqrt{1-\rho^2}$ و $x_{k1}\sqrt{1-\rho^2}$ نحصل على التقدير التالي :

$$\begin{array}{lll} \hat{P}_t = & 4,0426 & +0,04312V_t \\ SE & (4,4137) & (0,0058) \\ t & (0,9159) & (7,3529)^* \end{array}$$

$$R^2 = 0,6508, \bar{R}^2 = 0,6388, \mathrm{DW} = 1,6191 \quad ,$$

$$\mathrm{F}^* = 54,0604, n = 31, SCR = 4628,8110, t = 1984-2014$$

4-3-2-1- 2- طريقة Hildreth-Lu : تمم هذه الطريقة كمايلي :

المرحلة(1): نقوم باختيار قيمة لـ ρ مثلا ρ_1 بأخذه هذه القيمة، نحول المتغيرات عن طريق شبه الفروقات :

$$y_t - \rho_1 y_{t-1} = \beta_1(1-\rho_1) + \beta_2(x_{2t} - \rho_1 x_{2t-1}) + \ldots + \beta_k(x_{kt} - \rho_1 x_{kt-1}) + (\varepsilon_t - \rho_1\varepsilon_{t-1})$$

المرحلة (2): من خلال التقديرالسابق نقوم بحساب مجموع مربعات الأخطاء SCR ونعود الى المرحلة (1)

المرحلة (3): نعيد العملية عن طريق أخذ قيم مختلفة لـ ρ محصورة بين 0 و 1 ، بخطوة على سبيل المثال 0.05 أو 0.01، ونختار ρ ذات أقل قيمة لمجموعة مربعات الأخطاء.

ملاحظة : قبل القيام بتصحيح النموذج يجب التأكد من أن الارتباط غير ناتج عن غياب متغيرة أساسية في النموذج.

4-4- ارتباط المتغيرات المستقلة بالأخطاء $E(X_t\varepsilon_t)\neq 0$:

ان ارتباط المتغيرات المستقلة مع الأخطاء ناتج عن خطأ في قياس المتغيرات المستقلة و الذي هو ناتج بدوره، اما عن العينة المأخوذة أو بسبب كيفية حساب السلسلة الذي يختلف مفهومه عن النظرية الاقتصادية.

البرهان : لفترض النموذج التالي :

$$Y^*=X^*B+\varepsilon$$

نضع : $Y = Y^* +v$ و $X=X^*+\mu$

مع : $E(X^*v)=0$ ، $E(Y^*v)=0$ ، $E(X^*\mu)=0$ ، $E(v)=0$ ، $E(\mu)=0$ ، $E(Y^*\mu)=0$.

منه لدينا :

$$E(\varepsilon' \mu)=E((Y^*-X^*B)' \mu)=E(Y^* \mu)-B'E(X^{*\prime}\mu)=0$$

$$E(\varepsilon' v)=E((Y^*-X^*B)'v)=E(Y^* v)-B'E(X^{*\prime}v)=0$$

اذا لدينا استقلالية مابين الأخطاء على المتغيرات (μ و v) و خطاء تحديد النموذج ε

العلاقة مابين المتغيرات المشاهدات X و Y هي كمايلي :

$$Y^*= Y-v=(X-\mu)B+\varepsilon\rightarrow Y= XB-v-\mu B+\varepsilon=XB+\eta$$

$$Y= XB+\eta$$

حيث: $\eta= v-\mu B+\varepsilon$

الخواص الاحصائية لـη هي :

$$E(\eta)=E((v-\mu B+\varepsilon)=E(v)-E(\mu)B+E(\varepsilon)=0$$

$$E(X^{*\prime}\eta)=E((X^{*\prime}v)-E(X^{*\prime}\mu)B+E(X^{*\prime}\varepsilon)=0$$

$$E(X^{'}\eta)=E((X^{*}+v)\eta=E(\mu'\eta)$$

$$E(X^{'}\eta)=E(\mu^{'}v)-E(\mu'\mu)B+E(\mu^{'}\varepsilon)$$

$$E(X^{'}\eta)=-E(\mu'\mu)B\neq 0$$

اذا الأخطاء مرتبطة بالمتغيرات الخارجية وبالتالي :

$$plim\hat{\beta}_{mco}=\beta+plim\left(\frac{X'X}{N}\right)^{-1}plim\left(\frac{X'\varepsilon}{N}\right)\neq 0$$

4-4-1-طريقة المتغيرات الأدواتية ' La méthode des variables instrumentales' (VI)

اذا كانت المتغيرات المستقلة مرتبطة بالأخطاء في هذه الحالة نبحث عن متغيرات مرتبطة بصفة قوية مع المتغيرة X وغير مرتبطة بالأخطاء، هذه المتغيرة أو المتغيرات نسميها بالمتغيرة الأدواتية .

ليكن النموذج التالي : Y=XB+ε ذات $E(X^{'}\varepsilon)\neq 0$

لتكن Z مصفوفة المشاهدات للمتغيرات الاصطناعية ذ ات نمط (N,K) حيث يتم اختيارها بحيث تحقق الشروط التالية :

$$plim\left(\frac{Z'X}{N}\right)=V_{Z'X}\ ،plim\left(\frac{Z'\varepsilon}{N}\right)=0$$

ومنه :

$$E(Z'Y)=E(Z'(XB+\varepsilon))=E(Z'X)B-E(Z'\varepsilon)=E(Z'X)B$$

وبالتالي :

$$b_{VI}=(Z'X)^{-1}Z'Y$$

ذات الخواص التقاربية التالية :

$$Plim\ b_{vi}=B$$

لأن : $plim\left(\frac{Z'\varepsilon}{N}\right)=0$

مصفوفة التباين و التباين المشترك التقاربية معطاة بـ:

$$\hat{\Omega}_{b_{VI}}=\hat{\sigma}^2_{b_{VI}}(Z'X)^{-1}(Z'Z)(X'Z)^{-1}$$

حيث : $\hat{\sigma}^2_{b_{VI}}=\frac{(Y-Xb_{VI})'(Y-Xb_{VI})}{n-k}$

من أجل الحصول على تقدير دقيق من الأحسن تحديد مصفوفة المتغيرات الأدواتية Z تحتوي L عمود مع L>K مقدر المتغيرات الاصطناعية يكتب في هذه الحالة :

$$\hat{\beta}_{VI} = \left(\hat{X}'X\right)^{-1}\hat{X}'Y$$

حيث : $\hat{X} = Z(Z'X)^{-1}Z'X$ و الذي يمثل اسقاط X على أعمدة Z

أي أن :

$$\hat{\beta}_{VI} = (X'Z(Z'Z)^{-1}Z'X)^{-1}X'Z(Z'Z)^{-1}ZY$$

من خلال هذه العبارة نستنتج مايلي :

$$\hat{a}_{Mco} = (Z'Z)^{-1}Z'X$$

و الذي تمثل تقدير المعالم للنموذج : X=Za+ε

وعليه : $\hat{X} = Z\hat{a} = Z((Z'Z)^{-1}Z'X)$

ومنه لدينا :

$$\hat{\beta}_{VI} = \left(\hat{X}'X\right)^{-1}\hat{X}'Y = (\hat{X}'\hat{X})^{-1}\hat{X}'Y$$

لأن $\hat{X}'X = \hat{X}'\hat{X}$:

$$\hat{X} = Z(Z'X)^{-1}Z'X$$

$$\hat{X}'\hat{X} = XZ(Z'Z)^{-1}Z'Z(Z'Z)^{-1}Z'X = XZ(Z'Z)^{-1}Z'X = \hat{X}'X$$

وهذا مايسمى بالتقدير على مرحلتين

ملاحظة :تكمن الصعوبة في اختيار المتغيرات الادواتية والتي هي غير مرتبطة بالأخطاء، في بعض الحالات يمكن أخذ المتغيرات الخارجية مؤخرة كمتغيرة أدواتية و ذلك في حالة وجود متغير تابع مؤخرفإن المصفوفة المتغيرات الخارجية مؤخرة يمكن أخذها كمتغيرة أدواتية.

مثال 4-10: لدينا المعطيات المتعلقة بالمبيعات V_t و نفقات الاشهارPB خلال23 سنة لمؤسسة كمايلي:

12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	T
6,62	6,48	6,45	6,23	6,1	5,86	5,46	5,41	5,21	4,98	4,8	4,72	PB
79	77,6	76,6	73,7	71,8	69,3	67,8	65,3	63,9	61,7	59,9	58,5	vt

تابع

23	22	21	20	19	18	17	16	15	14	13	T
8,14	7,98	7,98	7,95	7,84	7,72	7,48	7,22	7,31	7,1	6,88	PB
89,8	89,7	90	89,7	88,1	87	84,5	83,7	84,7	82,9	80,5	vt

نقوم بتقدير النموذج التالي : $V_t=\beta_1+\beta_2 PB_t+\beta_3 V_{t-1}+\varepsilon_t$

نحصل على مايلي :

$$\underset{\substack{SE\\t}}{\hat{V}_t} = \underset{\substack{(1{,}8807)\\(5{,}2503)^*}}{9{,}8746} + \underset{\substack{(1{,}3097)\\(3{,}2083)^*}}{4{,}2021PB_t} + \underset{\substack{(0{,}1345)\\(3{,}8859)^*}}{0{,}5228V_{t-1}}$$

$$R^2 = 0{,}9953, \bar{R}^2 = 0{,}9948, \mathrm{DW} = 1{,}3497$$

$$\mathrm{F}^* = 2025{,}949, n = 22, SCR = 0{,}7153$$

ان وضع المتغير التابع كمتغيرة مستقل يؤدي الى ارتباطه بالأخطاء (عن طريق اختبار دربين يمكن أن نبين ذلك) وعليه الطريقة المستعملة للتقدير اما طريقة المربعات الصغرى المعممة أو عن طريق طريقة المتغيرة الاصطناعية IV، حيث يمكن أخذ المتغيرة المستقلة PB مؤخرة كمتغيرة اصطناعية و نقوم بتقدير النموذج كمايلي :

$$Y_{(22,3)} = \begin{pmatrix} V_t \\ 59{,}9 \\ 61{,}7 \\ \vdots \\ 89{,}8 \end{pmatrix}، X_{(22,3)} = \begin{pmatrix} C & PB_t & V_{t-1} \\ 1 & 4{,}8 & 58{,}5 \\ 1 & 4{,}98 & 59{,}9 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 8{,}14 & 89{,}7 \end{pmatrix}، Z_{(22,3)} = \begin{pmatrix} C & PB_t & PB_{t-1} \\ & & 4{,}72 \\ 1 & 4{,}8 & 4{,}8 \\ 1 & 4{,}98 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \\ 1 & 8{,}14 & 7{,}98 \end{pmatrix},$$

$$Z'X = \begin{pmatrix} 22 & 147{,}2 & 1685{,}5 \\ 147{,}2 & 1008{,}9902 & 11513{,}251 \\ 143{,}78 & 986{,}6076 & 11257{,}839 \end{pmatrix}$$

$$(Z'X)^{-1} = \begin{pmatrix} -0{,}01208789 & 6{,}36519125 & -6{,}5077912 \\ -1{,}83558028 & 5{,}44248878 & -5{,}2910807 \\ 0{,}16101984 & -0{,}55825883 & 0{,}54689987 \end{pmatrix}$$

$$Z'Y = \begin{pmatrix} 1717{,}2 \\ 11712{,}691 \\ 11451{,}094 \end{pmatrix}$$

$b_{VI}=(Z'X)^{-1}Z'Y$ وعليه القيمة المقدرة عن طريقة طريقة المربعات الصغرى الاصطناعية هي :

$$b_{vi} = \begin{pmatrix} 11{,}4322 \\ 5{,}4684 \\ 0{,}3919 \end{pmatrix}$$

أما بالنسبة مصفوفة التباين و التباين المشترك :

$$\hat{\Omega}_{b_{VI}} = \hat{\sigma}^2_{b_{VI}}(Z'X)^{-1}(Z'Z)(X'Z)^{-1}$$

لدينا: $Z'Z = \begin{pmatrix} 22 & 147,2 & 143,78 \\ 147,2 & 1008,9902 & 986,6076 \\ 143,78 & 986,6076 & 965,009 \end{pmatrix}$ ،

$$(X'Z)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3,6E-12 & -1,869 \\ -1E-13 & 1 & -0,2594 \\ 0 & 0 & 0,1323 \end{pmatrix}$$

$$(Z'X)^{-1} = \begin{pmatrix} -0,01208789 & 6,36519125 & -6,5077912 \\ -1,83558028 & 5,44248878 & -5,2910807 \\ 0,16101984 & -0,55825883 & 0,54689987 \end{pmatrix}$$

$$\hat{\sigma}^2_{b_{VI}} = 0,5371$$

$$\hat{\Omega}_{b_{VI}} = \hat{\sigma}^2_{b_{VI}}(Z'X)^{-1}(Z'Z)(X'Z)^{-1} = \begin{pmatrix} 6,5273 & 4,3261 & -0,4626 \\ 4,3261 & 3,6609 & -0,3761 \\ -0,4625 & -0,3761 & 0,0388 \end{pmatrix}$$

تلخيص النتائج التقدير عن طريق المتغيرة الاصطناعية هو :

$$\begin{aligned} &\hat{V}_t = 11,4320 + 5,4685 PB_t + 0,3919 V_{t-1} \\ &SE \quad (2,5548) \quad (1,9133) \quad (0,1971) \\ &t \quad (4,4746)^* \quad (2,8580)^* \quad (1,9877) \end{aligned}$$

$$R^2 = 0,9951, \bar{R}^2 = 0,9945, \mathrm{DW} = 1,1671$$

$$F^* = 1924,590, n = 22, SCR = 0,7329$$

4-4-2-اختبار Hausman : اذ لم يكون هناك ارتباط مابين المتغيرات الخارجية و الأخطاء فان التقدير المربعات الصغرى هو أحسن من تقدير عن طريق المتغيرات الأدواتية ولذلك يجب اختبار ارتباط الأخطاء مع المتغيرات الخارجية عن طريق اختبار Hausman و الذي يتمثل في اختبار فرضية العدم H_0 و المتمثلة في تباين مشترك مابين الأخطاء و المتغيرات الخارجية في هذه الحالة فان التقدير عن طريق المربعات الصغرى و IV متقارب ولكن تقدير MCO أدق، وتحت الفرضية H_1 فانه يوجد ارتباط للأخطاء مع المتغيرات الخارجيةو عليه تقدير MCO متحيز وليس تقاربي ولكن تقدير IV هو تقاربي .

يتمثل الاختبار في تحديد الفرق مابين التقديرين:

$$H = (\hat{\beta}_{VI} - \hat{\beta}_{mco})'\left(Var(\hat{\beta}_{VI}) - Var(\hat{\beta}_{Mco})\right)^{-1}(\hat{\beta}_{VI} - \hat{\beta}_{mco}) \rightarrow \chi^2(J)$$

حيث (J) يمثل عدد المعالم المقدرة

(J) يساوي إلى k اذا المصفوفة X و Z لاتحتوي على متغيرات مشتركة، ولكن عادة ما تكون X و Z تحتوي على متغيرات مشتركة في هذه الحالة فان المتغيرات التي تظهر في المصفوفتين تساوي K_0 في هذه الحالة درجة الحرية هي $K-K_0$

(أي نقوم في هذه الحالة باختبار مابين المتغيرات الخارجية و الأخطاء لعدد من المتغيرات $(K-K_0$

مثال 4-11: بأخذ المثال السابق 4-10 سوف نقوم بتطبيق اختبار Hausmam :

$$H = (\hat{\beta}_{VI} - \hat{\beta}_{mco})'\left(Var(\hat{\beta}_{VI}) - Var(\hat{\beta}_{Mco})\right)^{-1}(\hat{\beta}_{VI} - \hat{\beta}_{mco}) \to \chi^2(J)$$

نحن لدينا :

$$\mathrm{Var}(\hat{\beta}_{vi}) = \begin{pmatrix} 6,5273 & 4,3261 & -0,4626 \\ 4,3261 & 3,6609 & -0,3761 \\ -0,4625 & -0,3761 & 0,0388 \end{pmatrix}$$

$$Var(\hat{\beta}_{ols}) = \begin{pmatrix} 3,5372 & 1,9416 & -0,2153 \\ 1,9416 & 1,7154 & -0,1751 \\ -0,2153 & -0,1751 & 0,0181 \end{pmatrix}$$

$$(\hat{\beta}_{VI} - \hat{\beta}_{mco})' = (1,5575 \quad 1,2663 \quad -0,1309)$$

$$\left(Var(\hat{\beta}_{VI}) - Var(\hat{\beta}_{Mco})\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 863,0124 & 5774,3375 & 66134,2096 \\ 5774,3375 & 39580,5026 & 451639,9284 \\ 66134,2096 & 451639,9284 & 5156478,238 \end{pmatrix}$$

اذا باستعمال عملية الضرب نحصل على قيمة احصائية Hausman :

H= 0,82474

القيمة المجدولة لكاي تربيع هي بمستوى معنوية 5 % : $\chi^2(J) = \chi^2(1) = 3,84$ وبتالي نقبل طريقة المربعات الصغرى.

4-5-**<u>اختبار التوزيع الطبيعي للأخطاء :</u>** من أجل حساب مجال الثقة للتنبؤ و القيام باختبار ستودنت Student على المعالم، من الأحسن التحقق من التوزيع الطبيعي للأخطاء.

ومن أجل ذلك لدينا اختبار Jarque Berra(1984) ، والذي يعتمد على المفهوم التناضر(Skewness) و التفرطح (Kurtosis) والذي يسمح من التحقق من توزيع الطبيعي لتوزيع معين.

4-5-1-اختبار التناضر(Skewness) و التفرطح (Kurtosis):

ليكن العزم من الدرجة k : $\mu_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^k$

معامل التناضر $\left(\beta^{\frac{1}{2}}\right)$: $\beta_1^{\frac{1}{2}} = \frac{\mu_3}{\mu_2^{\frac{3}{2}}}$ ، معامل التفرطح : $\beta_2 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2}$

إذا كانت عدد المشاهدات كبير n>30 :

$$\beta_2 \mapsto N\left(3;\sqrt{\frac{24}{n}}\right) \quad ، \quad \beta_1^{\frac{1}{2}} \mapsto N\left(0;\sqrt{\frac{6}{n}}\right)$$

ونقوم ببناء الإحصائية التالية :

$$v_2 = \frac{\left|\beta_2 - 3\right|}{\sqrt{\frac{24}{n}}} \quad ، \quad v_1 = \frac{\left|\beta_1^{\frac{1}{2}} - 0\right|}{\sqrt{\frac{6}{n}}}$$

نقوم بمقارنتها بقيمة z المجدولة عند 5%، أي 1,96

مثال 4-11 : قمنا بتقدير نموذج الخطي للاستهلاكCONS بدلالة الدخلY :

لدينا المعطيات التالية المتعلقة بالدخل Y و الاستهلاكCONS ذات المعطيات التالية:

الزمن	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
الاستهلاكcons	1134,3	1128,9	1141,4	1151	1149,1	1161,32	1168,2	1170	1170	1179,3
الدخلy	1186,1	1178,1	1196,5	1210	1207,9	1225,8	1235,8	1238,5	1238,5	1252

تابع

الزمن	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
الاستهلاكcons	1195,9	1212,7	1224,5	1237,63	1233,4	1230,4	1233,4	1231,8	1243,1	1263,74
الدخلy	1276,1	1300,5	1317,5	1336,3	1330,2	1325,9	1330,3	1327,9	1344,2	1373,6

تابع

الزمن	21	22	23	24	25	26	27	28
الاستهلاكcons	1277,2	1298,79	1318,5	1330,6	1339,79	1351,9	1356,4	1372,5
الدخلy	1392,7	1423,3	1451,1	1468,1	1480,9	1497,8	1504,1	1526,5

$$\begin{array}{lll} \hat{CONS}_t = & 304{,}505+ & 0{,}6988\ Y_t \\ \text{s.e} = & (1{,}5518) & (0{,}001165) \\ \text{t} = & (196{,}7360)^* & (599{,}73604)^* \end{array}$$

$$R^2 = 0{,}999928 \quad , F^* = 359683{,}3, n = 28$$

العزم من الدرجة الثانية للأخطاء e	u_2	**0,385332**
العزم من الدرجة الثالثة للأخطاءe	u_3	**0,10017163**
العزم من الدرجة الرابعة للأخطاءe	u_4	**0,28356443**

معامل التناضر $\left(\beta^{\frac{1}{2}}\right)$:

$$\beta_1^{\frac{1}{2}} = \frac{\mu_3}{\mu_2^{\frac{3}{2}}} = \frac{0,10017163}{\sqrt{(0,385332)^3}} = 0,4187$$

معامل التفرطح (β_2):

$$\beta_2 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} = \frac{0,28356443}{(0,3858332)^2} = 1,9097$$

$$v_2 = \frac{|\beta_2 - 3|}{\sqrt{\frac{24}{n}}} = \frac{|1,9097 - 3|}{\sqrt{\frac{24}{28}}} = 1,1775$$

$$v_1 = \frac{\left|\beta_1^{\frac{1}{2}} - 0\right|}{\sqrt{\frac{6}{n}}} = \frac{\left|\sqrt{0,4187} - 0\right|}{\sqrt{\frac{6}{28}}} = 1,3979$$

كل من V_1 و V_2 أقل من القيمة المجدولة 1,95 اذا الأخطاء تتبع التوزيع الطبيعي

4-5-2- اختبار Jaraque et Berra: هو اختبار يجمع النتائج السابقة أي بين التناضر و التفرطح كمايلي :

$$S = \frac{n}{6}\beta_1 + \frac{n}{24}(\beta_2 - 3)^2 \mapsto \chi^2_{1-\alpha}(2)$$

إذا كان s أقل من القيمة المجدولة $\chi^2_{1-\alpha}$ فاننا المتغيرة تتبع التوزيع الطبيعي.

يصلح كذلك هذا الإختبار لاختبار عدم تجانس الأخطاء، لأن عدم التجانس يظهر على شكل ضيل غليظ (Leptoturtique).

مثال 4 -12 : بأخذ مثال (4-11) :

معامل التناضر $\left(\beta^{\frac{1}{2}}\right)$: $$\beta_1^{\frac{1}{2}} = \frac{\mu_3}{\mu_2^{\frac{3}{2}}} = \frac{0{,}10017163}{\sqrt{(0{,}385332)^3}} = 0{,}4187$$

معامل التفرطح (β_2): $$\beta_2 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} = \frac{0{,}28356443}{(0{,}3858332)^2} = 1{,}9097$$

قيمة Jarque et berra :

$$S = \frac{n}{6}\beta_1 + \frac{n}{24}(\beta_2 - 3)^2 = \frac{28}{6}(0{,}1753) + \frac{28}{24}(1{,}9097 - 3)^2 = 2{,}20$$

إذا القيمة المجدولة هي : $\chi^2_{0,05}(2) = 5{,}99$

القيمة المحسوبة أقل من القيمة المجدولة اذا الأخطاء طبيعية.

الفصل الخامس
دراسة النماذج غير الخطية

قمنا فيما سبق بدراسة النماذج الخطية، غير أنه عادة مايواجه النظرية الإقتصادية أو شكل الإنتشار هو علاقة غير خطية، ومن الممكن تحويل بعض الدوال غير الخطية إلى دوال خطية وذلك اذا كانت المعالم خطية و المتغيرات غير خطية وهذا ماسنتطرق اليه في المرحلة الأولى ثم نتطرق الى الحالة أين المعالم تكون غير خطية وكيفية تقدير النماذج من هذا الشكل.

5-1-الدوال غير الخطية ذات معالم خطية : في هذا النوع من النماذج يكفي تحويل المتغيرات الداخل في النموذج حتى نتمكن من تقدير النموذج عن طريق طريقة المربعات الصغرى:

5-1-1- الدوال الأسية : وهي من الشكل التالي :

$$Y = b_0 X^{b_1} e^{u}$$

يتم تحويلها إلى مايلي بإدخال اللوغارتم : $LnY = Lnb_0 + b_1 LnX + u$

أي : $Y^* = b_0^* + b_1 X^* + u$

مثال5-1 : تقدير دالة كوب دوقلاص Cobb-Douglas لدينا المعطيات في صناعة ما كالتالي:

20	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	السنة
107.6	106.2	104.	102.5	100	102.5	103.1	99	95	94.4	93	90.1	86.5	85	82.6	80.7	78.9	76.5	75.1	71.8	Q
12.8	12.5	12.1	11.7	11.4	11.1	10.7	10.2	9.8	9.4	9.0	8.6	8.1	7.8	7.4	7.1	6.9	6.4	6.1	6.1	K
680	682	689	691	701	740	728	730	744	765	755	744	760	768	766	761	764	772	763	748	L

حيث : Q تمثل الإنتاج، K عامل رأس المال، L عامل العمل

دالة الإنتاج لكوب دوقلاص هي من الشكل :

$$Q = \alpha_0 K^{\alpha_1} L^{\alpha_2}$$

1-نقوم بتحويل المعادلة إلى معادلة خطية: $LnQ = Ln\alpha_0 + \alpha_1 LnK + \alpha_2 LnL$

إذا $\alpha_1 = \dfrac{\Delta y / y}{\Delta x / x} = \dfrac{\partial Log(y)}{\partial Log(x)}$ و $\alpha 2$ تمثل المرونات.

النتيجة هي :

$$LnQ = -0.01893 + 0.4941 Ln(L) + 0.5772 Ln(K)$$
$$(t) \quad (-0.0238) \quad (4.3095) \quad (28.5284)$$
$$R^2 = 0.9920$$

تشير المعاملات المقدرة 0.4941 و 0.5772 على الترتيب، إلى مرونة الإنتاج بالنسبة إلى L و K .

وفي هذا النوع من النماذج لدينا :

1-إذا كان $\alpha_1 + \alpha_2 < 1$ (الإنتاج يزداد بقيمة أقل من عوامل الإنتاج)؛ نقول أنه لدينا وفرات إنتاج متناقصة.

2-إذا كان $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$ (الإنتاج يزداد بقيمة تفوق عوامل الإنتاج).

3-إذا كان $\alpha_1 + \alpha_2 > 1$ (الإنتاج يزداد بقيمة تفوق أقل من عوامل الإنتاج).

في مثالنا0.4941 + 0.5772=1.0713 > 1 فهناك تزايد للغلة لهذه الصناعة (أي زيادة المدخلات كل من L و K بمقدار 10% يؤدي إلى زيادة الانتاج بـ 7.13%).

5-1-2- دوال نصف لوغاريتيمة : وهي من الشكل التالي :

$$LnY = \beta_0 + \beta_1 X + u$$

تكتب كالتالي : $Y^* = \beta_0 + \beta_1 X + u$

مثال 5-2-: لتكن المعطيات التالية والتي تمثل عدد العاملين N و الزمن t

السنة t	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008
N	69.6	70.5	70.6	71.8	73.1	74.5	75.8	77.3	78.7	80.7	82.7	84.1	86.5	88.7
السنة t	2009	2010	2011	2012	2013	2014								
N	91.0	92.6	94.6	97.4	100.4	104.9								

النتيجة هي :

$$LnN = 4.21 + 0.02T$$
$$(638.4642) \quad (36.1138)$$
$$R^2 = 0.9863$$

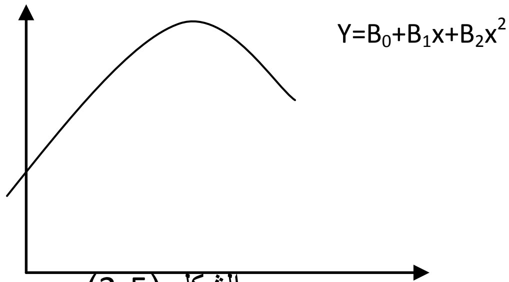
5-1-3- دوال كثيرات الحدود :

دوال الكثيرات الحدود من الدرجة q هي من الشكل :

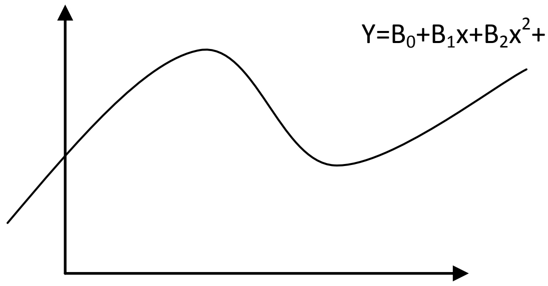
$$y = B_0 + B_1 x + B_2 x^2 + . \quad . \quad . + B_q x^q$$

يمثل الشكل (5-1) كثير الحدود من الدرجة 2 ؛ أما الشكل (5-2) كثير الحدود من الدرجة الثالثة

الشكل (1-5)



الشكل (2-5)



ملاحظة: رغم عد ود ارتباط ما بين x، x^2، . . .، x^q إلا أنه يمكن أن يقع إرتباط خطي، وهذا الاحتمال يزداد كلما قل عدد المشاهدات.

بالإضافة إلى ذلك فإن درجة الكثير الحدود يجب ان يكون محدود، في حالة التطبيقية $q=4$ يعتبر أقصى درجة؛ حتى يكون الانحدار جيد و التفسير الاقتصادي له معنى بالإضافة إلى ذلك فإن التنبؤ يكون غير جيد.

يمكن أن نذكر أمثلة عن تطبيقات هذا النوع من النماذج فيمايلي :

1-السلاسل الزمنية: $y = B_0 + B_1 t + B_2 t^2 + B_3 t^3$

2-دالة التكاليف الكلية: $CT = B_0 + B_1 Q + B_2 Q^2 + B_3 Q^3$ (Q الإنتاج)

مثال 5-3: لدينا المعطيات التالية المتعلقة بالتكاليف كمايلي :

CT	193	226	240	244	257	260	274	297	350	420
Q	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

$$
\begin{array}{lllll}
CT_t = & 141,7667 & +\,63,477Q_t & -\,12,9615Q_t^2 & +\,0,9396Q_t^3 \\
SE & (6,3753) & (4,7786) & (0,9857) & (2,8782) \\
t & (22,2367)^* & (13,2837)^* & (-13,1500)^* & (15,8967)^*
\end{array}
$$

$$R^2 = 0,9983 \quad , \quad \overline{R}^2 = 0,9975\,,\ F^* = 1202,220,\ n = 10,\ SCR = 64,7438$$

5-1-4- دالة المقلوب(المعكوس): وهي تعطى بالعلاقة التالية :

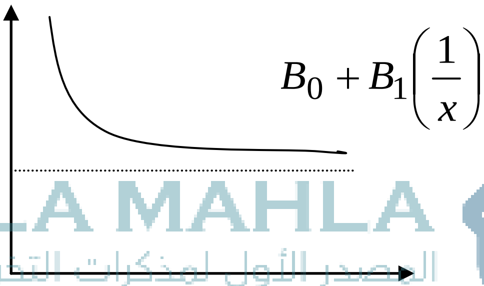
$$y = B_0 + B_1\left(\frac{1}{x}\right)$$

هذا النوع من النماذج يؤول إلى B0 لما x يؤول إلى ∞

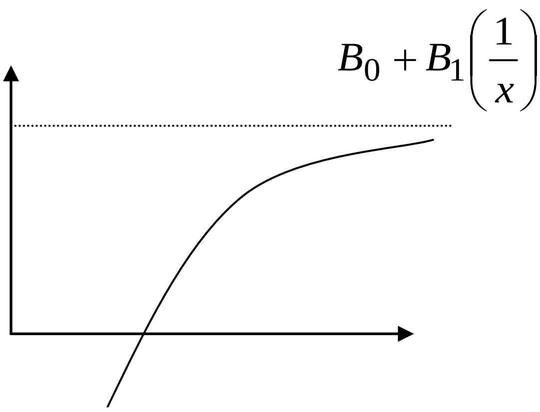
هذا النموذج يستعمل للتقدير الدوال فليبس (Philips) (العلاقة مابين التضخم والبطالة).

وهي من الشكل :

الشكل 5-3



الشكل 5-4

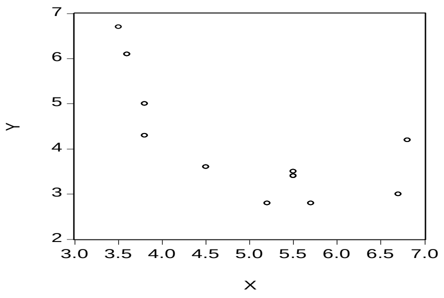


دالة

مثال 5-4: لدينا معطيات متعلقة نسبة تغير في مؤشر ربح الساعي (Y) و معدل البطالة (X)

السنة	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Y	4,2	3,5	3,4	3	3,4	2,8	2,8	3,6	4,3	5	6,1	6,7
X	6,8	5,5	5,5	6,7	5,5	5,7	5,2	4,5	3,8	3,8	3,6	3,5

و من خلال الانتشار التالي :



نقوم بتقدير النموذج التالي :

$$y = B_0 + B_1\left(\frac{1}{x}\right)$$

نتحصل على :

$$\hat{Y}_t = -0{,}2594 + 20{,}588\left(\frac{1}{X_t}\right)$$
$$t \quad (-0{,}2572) \qquad (4{,}3996)$$
$$R^2 = 0{,}6594$$

5-2-الدوال غير الخطية في المعالم : عندما تكون المعالم غير خطية فان محاولة تحويل المعتاد للنموذج غير خطي الى نموذج خطي من أجل تقدير النموذج عن طريق طريقة المربعات الصغرى غير صالحة؛ وعليه من أجل تقدير نستعمل طرق تكرارية تعتمد في تقديرها على تحويل النموذج الى نموذج خطي عند قيم ابتدائية للمعالم؛ ثم نقوم بتقدير عن طريق طريقة المربعات الصغرى للقيم المحصل ثم نعيد تحويل النموذج الى نموذج خطي؛ ونستمر في هذه العملية حتى يوجد هناك تغير معنوي في المعالم المقدرة ، حيث تتمثل الطريقة الرئسية في التحويل الخطي في تحويل تايلور.

5-2-1- طريقة التكرارية لقوص نيوتون Gauss-Newton :

ليكن النموذج غير الخطي التالي : $y_t = f(X,\beta) + \varepsilon_t$

حيث : X مصفوفة المشاهدات ذات نمط (n,k) و β شعاع المعالم المراد تقديرها ذات نمط k

تحت فرضيات الكلاسيكية لـ ε_t ، تقدير عن طريق المربعات الصغرى لـ β و الذي يصغر مجموع مربعات الأخطاء :

$$S(\beta) = e'e = [y_t - f(X,\beta)]'[y_t - f(X,\beta)]$$

لدينا k شرط من الدرجة الأولى $\partial s/\partial\beta$ أي :

$$\frac{\partial s}{\partial\beta} = -2\frac{\partial f(X,\beta)}{\partial\beta}[y_t - f(X,\beta)]$$

مع :

$$\frac{\partial f(X,\beta)}{\partial\beta} = Z(\beta) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f(x_1,\beta)}{\partial\beta_1} & \cdots & \frac{\partial f(x_1,\beta)}{\partial\beta_k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f(x_n,\beta)}{\partial\beta_1} & \cdots & \frac{\partial f(x_n,\beta)}{\partial\beta_k} \end{bmatrix}$$

حيث : المصفوفة $Z(\beta^1)$ تحسب القيم الخاصة لـ β ($\beta=\beta^1$)

باستعمال منشور تيلور في جوار β^1 يمكن تقريب المشاهدات (t) :

$$f(x_t,\beta) \cong f(x_t,\beta^1) + \left[\left.\frac{\partial f(x_t,\beta)}{\partial\beta_1}\right|_{\beta=\beta^1} \cdots \left.\frac{\partial f(x_t,\beta)}{\partial\beta_k}\right|_{\beta=\beta^1}\right](\beta-\beta^1)$$

نضع :

$$\bar{y}(\beta^1) = y - f(X,\beta^1) + Z(\beta^1)\beta^1$$

بناء شبه نموذج يساوي :

$$\bar{y}(\beta^1) = Z(\beta^1)\beta^1 + \varepsilon$$

تقدير النموذج للنموذج الخطي السابق يعطي كمايلي :

$$\beta^2 = [Z(\beta^1)'Z(\beta^1)]^{-1}Z(\beta^1)'\bar{y}(\beta^1)$$

$$\beta^2 = \beta^1 + [Z(\beta^1)'Z(\beta^1)]^{-1}Z(\beta^1)'[y - f(X,\beta^1)]$$

والذي يعطي k قيمة جديدة للشعاع $\beta=\beta^2$ ، العملية تتوقف عند التكرار p أي لم نلاحظ استقرار نسبي للمعالم المقدر بـ: $\hat{\beta} = \beta^p \cong \beta^{p-1}$

مثال 5-5: لدينا نموذج غير الخطي لدالة الاستهلاك:

$$C = \beta_1 + \beta_2 Y^{\beta_3} + \varepsilon_t$$

ذات المعطيات التالية:

الزمن	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
الاستهلاكcons	1134,3	1128,9	1141,4	1151	1149,1	1161,32	1168,2	1170	1170	1179,3
الدخلy	1186,1	1178,1	1196,5	1210	1207,9	1225,8	1235,8	1238,5	1238,5	1252

تابع

الزمن	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
الاستهلاكcons	1195,9	1212,7	1224,5	1237,63	1233,4	1230,4	1233,4	1231,8	1243,1	1263,74
الدخلy	1276,1	1300,5	1317,5	1336,3	1330,2	1325,9	1330,3	1327,9	1344,2	1373,6

تابع

الزمن	21	22	23	24	25	26	27	28
الاستهلاكcons	1277,2	1298,79	1318,5	1330,6	1339,79	1351,9	1356,4	1372,5
الدخلy	1392,7	1423,3	1451,1	1468,1	1480,9	1497,8	1504,1	1526,5

من أجل تقدير النموذج نطبق طريقة قوص نيوتن :

1- نقوم بتحويل النموذج غير خطي الى نموذج خطي :

نحن لدينا: $C = f(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = \beta_1 + \beta_2 Y^{\beta_3} + \varepsilon_t$

يتم التحويل الخطي عند جوار النقطة $\beta_1 = \beta_1^*, \beta_2 = \beta_2^*, \beta_3 = \beta_3^*$ ، كمايلي :

$$C = f(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = f(\beta_1^*, \beta_2^*, \beta_3^*) + f_{\beta_1}(\beta_1^*, \beta_2^*, \beta_3^*)(\beta_1 - \beta_1^*) + f_{\beta_2}(\beta_1^*, \beta_2^*, \beta_3^*)(\beta_2 - \beta_2^*) + f_{\beta_3}(\beta_1^*, \beta_2^*, \beta_3^*)(\beta_3 - \beta_3^*) + \varepsilon_t$$

أي :

$$C = f(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = \beta_1^* + \beta_2^* Y^{\beta_3^*} + (\beta_1 - \beta_1^*) + Y^{\beta_3^*}(\beta_2 - \beta_2^*) + \beta_2^* Y^{\beta_3^*} Ln(Y)(\beta_3 - \beta_3^*) + \varepsilon_t$$

أي: $C + \beta_3^* \beta_2^* Y^{\beta_3^*} Ln(Y) = \beta_1 + \beta_2 Y^{\beta_3^*} + \beta_3 \beta_2^* Y^{\beta_3^*} Ln(Y) + \varepsilon_t$

وعليه التقدير عن طريق المربعات للنموذج التالي :

أي: $C^* = \beta_1 + \beta_2 X_1^* + \beta_3 X_2^* + \varepsilon_t$

مع : $X_2^* = \beta_2^* Y^{\beta_3^*} Ln(Y)$، $X_1^* = Y^{\beta_3^*}$ ، $C^* = C + \beta_2^* \beta_3^* Y^{\beta_3^*} Ln(Y)$

2- القيم الابتدائية يمكن أن نأخذ القيم المستخرجة من تقدير النموذج الخطي الذي هو حالة خاصة من التقدير غير الخطي أي $\beta_3=1$ أي نقوم بتقدير النموذج التالي :

$$C=\beta_1+\beta_2 Y+\varepsilon$$

نحصل على التقدير التالي: $C = 304,505 + 0,6988Y$

اذا القيم الابتدائية هي : $\beta_1 = 304{,}505; \beta_2 = 0{,}6988, \beta_3 = 1$

نقوم بحساب القيم الجديدة لـ c و القيم الجديدة X^*_1 و X^*_2 بتعويض القيم الابتدائية ، ثم نقوم بتقدير النموذج $C^* = \beta_1 + \beta_2 X_1^* + \beta_3 X_2^* + \varepsilon_t$ ثم نتحصل على القيم الجديدة لـ β_1،β_2،β_3 و هكذا نعيد العملية حتى لاتتغير القيم من تقدير للآخر كما هو مبين في الجدول التالي :

التقدير		1	2	3	4	5
B1	304,505	529,216	485,800015	485,800019	485,7999998	485,7999998
B2	0,698814	-0,6762	0,0999999	0,09999987	0,1	0,1
B3	1	1,23983	1,23980098	1,24000032	1,24	1,24

من خلال الجدول قيم التقدير النموذج غير الخطي هي $\beta_1 = 485{,}7999; \beta_2 = 0{,}1, \beta_3 = 1{,}24$

اذا نتائج التقدير يمكن تلخيصها فيمايلي :

النموذج غير الخطي		النموذج الخطي		
الانحراف المعياري	التقدير	الانحراف المعياري	التقدير	المعالم
1,34093E-07	485,8	1,551846	304,505	B_1
1,76188E-10	0,1	0,0011650	0,698814	B_2
2,19908E-10	1,24	-	1	B_3
	2,6117E-16		10,78930	e'e
	9,0447E-18		0,644184	σ
	0,999999		0,999928	R^2

الفصل السادس

النماذج ذات المتغيرات المؤخرة

عندما قمنا ببناء النموذج القياسي فإننا لم ندخل المتغيرة التابع كمتغير مستقل مؤخر وهذا ما قد يقع في النماذج القياسية بالإضافة إلى وجود المتغيرة المستقلة مؤخرة.

6-1-النماذج ذات الإبطاء الموزع:

يكتب النموذج العام للنماذج الإبطاء الموزع كمايلي :

$$y_t = a + \beta_0 x_t + \beta_1 x_{t-1} + \ldots + \beta_h x_{t-h} + \varepsilon_t = a + \sum_{i=0}^{h} \beta_i x_{t-i} + \varepsilon_t$$

من المشاكل التي تواجه هذا النوع من النماذج هو فقدان عدد المشاهدات حسب عدد فترات الإبطاء؛ بالإضافة إلى ارتباط المتغيرات فيما بينها.

بسبب عدم معرفة عدد الفترات الإبطاء التي يجب أن نطبقها لاختيار النموذج الملائم؛ نقوم باختبار لتحديد عدد التأخيرات.

6-1-1- تحديد عدد التأخيرات : من أجل تحديد عدد فترات الإبطاء يمكن استعمال مايلي: :

أ- اختبار فيشر : يتمثل هذا الاختبار في مقارنة النموذج بدون قيود مع النموذج بقيود أي عن طريق العلاقة التالية:

$$F(m, T-k) = \left[\frac{RRSS - URRSS}{URRSS}\right]\left(\frac{T-k}{m}\right)$$

حيث :

T: حجم العينة في النموذج بدون قيود

K : عدد المعالم في النموذج بدون قيود.

m : عدد القيود

ونقوم بمقارنتها مع قيمة فيشر المجدولة $F(m, T-k)$

ب-معيار Akaike: يتمثل هذا المعيار في الاحتفاظ بقيمة h التي تصغر دالة Akaike المعطاة بـ:

$$Aic(h) = \ln\left(\frac{SCR_h}{n}\right) + \frac{2h}{n}$$

حيث :

SCR_h : مجموع مربعات البواقي ذات h تأخر.

n: عدد المشاهدات المتوفرة(كل تأخر يؤدي إلى فقدان مشاهدة

Ln : لوغاريتم النبيري.

ج- معيار Schwartz(SC) : هذه الطريقة تقريبية متمثلة في الإحتفاظ بقيمة h التي تصغر من دالة Schwartz :

$$Sc(h) = \ln\left(\frac{SCR_h}{n}\right) + \frac{h \ln n}{n}$$

مثال 6-1: لدينا المعطيات التالية:

15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	السنة
648	620	550	509	510	429	485	456	423	355	310	340	265	215	200	الاستهلاك (Y)
6097	5703	5272,9	6261	4550	4528,75	4873,15	4694,8	4491,85	3801	3796,9	3981,4	3520,15	3212,65	3120,4	الضريبة على الثروة(x)

تابع :

28	27	26	25	24	23	22	21	20	19	18	17	16	السنة
2410	2240	2100	1916	1800	1542	1100	900	880	790	750	740	652	الاستهلاك (Y)
16711,90	15666,4	14805,4	13673,8	11591	11373,7	8655,399	7400	7302,4	6748,9	6671	5990	5900,2	الضريبة على الثروة(x)

نريد تقدير النموذج التالي

$$y_t = a + \beta_0 x_t + \beta_1 x_{t-1} + \ldots + \beta_h x_{t-h} + \varepsilon_t = a + \sum_{i=0}^{h} \beta_i x_{t-i} + \varepsilon_t$$

نقوم بحساب بتقدير النموذج حتى الفترة h=10، و القيام باختبار فيشر و AIC و SC لتحديد قيمة h المثلى نحصل على الجدول التالي :

SCR	Fisher	Schwarz	Akaike	التاخر
100979,98	4,8630	8,2136	8,2136	0
76436,8222	0,7418	8,1220	8,0741	1
72570,644	**3,3267**	8,2405	8,1437	2
57783,4996	0,3880	**8,2130**	**8,0667**	**3**
55971,3091	0,6891	8,3787	8,1823	4
52671,4794	0,4091	8,5033	8,2564	5
50601,0149	0,3926	8,6565	8,3589	6
48485,6050	0,3007	8,7718	8,4236	7
46728,7236	0,0810	8,9556	8,5573	8
46188,9182	0,6093	9,1900	8,7434	9
41930,4117		9,3591	8,8645	10

القيمة المثلى هي h=3 ، نقوم بتقدير النموذج نحصل على :

$$\hat{Y}_t = -295{,}6041 + 0{,}1323X_t + 0{,}0668X_{t-1} + 0{,}0008X_{t-2} - 0{,}0415X_{t-3}$$

SE	(30,0924)	(0,0164)	(0,0209)	(0,0209)	(0,0196)
t	(−9,8223)*	(8,0388)*	(3,9714)*	(0,0418)	(−2,1093)*

$$\bar{R}^2 = 0{,}9926 \quad , F^* = 812{,}1762, DW = 1{,}92 \quad n = 25, SCR = 62670{,}60$$

6-2-تقدير نماذج الإبطاء الموزع:

نظرا لتعدد الخطي الذي ينتج عن ارتباط المتغيرات المفسِرة المؤخر، فانه من ضروري ايجاد طريقة تسمح من الحد من هذا التعدد الخطي ومن بين الطرق المستعملة لدينا:

6-2-1- طريقة ألمون Almon:

تعتمد طريقة ألمون على تحديد المعاملات النموذج عن طريق كثير حدود، حيث هذه المعاملات تنتمي إلى نفس الكثير الحدود.

لنفترض النموذج التالي :

$$y_t = a + \beta_0 x_t + \beta_1 x_{t-1} + \ldots + \beta_h x_{t-h} + \varepsilon_t = a + \sum_{i=0}^{h} \beta_i x_{t-i} + \varepsilon_t$$

حسب ألمون فان المعاملات النموذج تعطى كمالي:

$$b_i = c_0 + c_1 i + c_2 i^2 + \ldots + c_n i^q = \sum_{j=0}^{q} c_j i^j$$

مثال6-2: لنفترض أن النموذج الذي تتبعه معالم النموذج هي من الدرجة الثالثة فان المعالم تكتب كمايلي:

$$\beta_i = c_0 + c_1 i + c_2 i^2 + c_3 i^3$$

إذا صيغة معالم النموذج تكتب كمايلي :

$$\begin{aligned}
\beta_0 &= c_0 \\
\beta_1 &= c_0 + c_1 + c_2 + c_3 \\
\beta_2 &= c_0 + 2c_1 + 4c_2 + 8c_3 \\
&\vdots \\
\beta_n &= c_0 + nc_1 + n^2 c_2 + n^3 c_3
\end{aligned}$$

معادلة الإبطاء تصبح :

$$y_t = a + c_0 x_t + (c_0 + c_1 + c_2 + c_3) x_{t-1}$$
$$+ (c_0 + 2c_1 + 4c_2 + 8c_3) x_{t-2} + \ldots + (c_0 + nc_1 + n^2 c_2 + n^3 c_3) x_{t-m} + \varepsilon_t$$

أي :

$$y_t = a + c_0 \sum_{i=0}^{h} x_{t-i} + c_1 \sum_{i=0}^{h} i x_{t-i} + c_2 \sum_{i=0}^{h} i^2 x_{t-i} + c_3 \sum_{i=0}^{h} i^3 x_{t-i} + \varepsilon_t$$

وبالتالي نقوم بتعريف ثلاثة متغيرات جديدة :

$$z_{0t} = \sum_{i=0}^{h} x_{t-i}, z_{1t} = \sum_{i=0}^{h} i x_{t-i}, z_{2t} = \sum_{i=0}^{h} i^2 x_{t-i}; z_{3t} = \sum_{i=0}^{h} i^3 x_{t-i}$$

والمعادلة التي نقوم بتقديرها هي :

$$y_t = a + c_0 z_{0t} + c_1 z_{1t} + c_2 z_{2t} + c_3 z_{3t} + \varepsilon_t$$

ملاحظة: يتم تحديد درجة كثير الحدود بالاستعانة بالاختبار المتعلقة المعنوية

مثال 6-3: بأخذ المثال 6-1 المتعلق بالاستهلاك و الضريبة على الثروة نتحصل على نموذج ألمون Almond ذات كثير حدود من الدرجة (1) لأنه عندما نرفع من كثير الحدود للمعالم فانها هذه الأخيرة تصبح غير معنوية؛ أي كثير الحدود المعبر للمعالم هو :

$$\beta_i = c_0 + c_1 i$$

أي النموذج هو :

$$y_t = a + c_0 \sum_{i=0}^{3} x_{t-i} + c_1 \sum_{i=0}^{3} i x_{t-i} + \varepsilon_t$$

$$z_{0t} = \sum_{i=0}^{3} x_{t-i}, z_{1t} = \sum_{i=0}^{3} i x_{t-i}$$

اعادة حساب المتغيرات الجديدة موجدة في الجدول التالي :

السنة	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
الاستهلاك	200	215	265	340	310	355	423	456	485	429	510	509	550	620	648
الضريبة على الثروة	3120,4	3212,65	3520,15	3981,4	3796,9	3801	4491,85	4694,8	4873,15	4528,75	4550	6261	5272,9	5703,4	6097
Z0				13834,6	14511,1	15099,5	16071,2	16784,6	17860,8	18588,6	18646,7	20212,9	20612,65	21787,3	23334,3
Z !				19306,7	20659,7	22320,2	23339	23484,6	25081,5	27738,3	28359,5	28226,95	28947,25	31444,9	35032,2

تابع

السنة	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
الاستهلاك	652	740	750	790	880	900	1100	1542	1800	1916	2100	2240	2410
الضريبة على الثروة	5900,2	5990	17987,3	6748,9	7302,4	7400	8655,4	11373,7	11591	13673,8	14805,4	15666,4	16711,9
Z0	22973,5	23690,6	35974,5	36626,4	38028,6	39438,6	30106,7	34731,5	39020,1	45293,9	51443,9	55736,6	60857,5
Z1	33322,5	35204,4	36081,4	47667,9	60693,5	74762,1	42251,5	45362,6	50884,5	60304,6	70976,9	76926	86298,6

تقدير النموذج لكثير الحدود يعطي مايلي :

$$\begin{array}{llll} \hat{Y}_t = & -293,6528 & +0,1284Z_{0t} & -0,0592Z_{1t} \\ SE & (28,6819) & (0,0101) & (0,0075) \\ t & (-10,2382)^{*} & (12,6127)^{*} & 5-7,8435)^{*} \end{array}$$

$$\overline{R}^2 = 0,9937 \quad , F^{*} = 1761,507, Dw = 1,89, n = 25, SCR = 63564,44$$

قيم معالم النموذج المؤخر تؤخذ من العلاقة التالية : $\beta_i = c_0 + c_1 i$

وعليه : $\beta_0 = c_0 = 0,128403$ ، $\beta_1 = c_0 + c_1 = 0,069146$ ،

$\beta_2 = c_0 + 2c_1 = 0,009889$ ، $\beta_3 = c_0 + 3c_1 = -0,049368$ ،

$$\hat{y}_t = -2936528 + 0,1284x_t + 0,0691x_{t-1} + 0,0098x_{t-2} - 0,0493x_{t-3}$$

6-2-2-طريقة كويك Koyck: يعتمد هذا الأخير على استخدام أوزان تتناقص كمتوالية هندسية للمعالم $\beta_i = \lambda^i \beta_0$

حيث: $0 < \lambda < 1$

بالتعويض في المعادلة نحصل على:

$$Y_t = a + \beta_0 X_t + \beta_0 \lambda X_{t-1} + \beta_0 \lambda^2 X_{t-2} + \ldots + \varepsilon_t \qquad (1)$$

بالابطاء بفترة زمنية واحدة نحصل :

$$Y_{t-1} = a + \beta_0 X_{t-1} + \beta_0 \lambda X_{t-2} + \beta_0 \lambda^2 X_{t-3} + \ldots + \varepsilon_{t-1}$$

بالضرب بـ λ نحصل على :

$$\lambda Y_{t-1} = \lambda a + \lambda \beta_0 X_{t-1} + \lambda^2 \beta_0 \lambda X_{t-2} + \ldots + \lambda \varepsilon_{t-1} \qquad (2)$$

بالطرح المعادلة (1) من المعادلة (2):

$$Y_t - \lambda Y_{t-1} = a - \lambda a + \beta_0 X_t + \lambda\beta_0 X_{t-1} - \lambda\beta_0 X_{t-1} + \\ + \beta_0 \lambda^2 X_{t-2} - \beta_0 \lambda^2 X_{t-2} + \ldots + \varepsilon_t - \lambda\varepsilon_{t-1}$$

$$Y_t - \lambda Y_{t-1} = a(1-\lambda) + \beta_0 X_t + v_t$$

$$Y_t = a(1-\lambda) + \beta_0 X_t + \lambda Y_{t-1} + v_t$$

حيث : $v_t = \varepsilon_t - \lambda\varepsilon_{t-1}$

المشكل الذي يواجه نموذج كويك متمثل في ارتباط الأخطاء مما يؤدي إلى عدم صلاحية طريقة المربعات الصغرى، ومادام المتغير التابع يظهر كمتغير مستقل فان اختبار دربين واتسون يصبح ضعيف، مما يتطلب استعمال اختبارات أخرى لتحديد وجود أو عدم وجود ارتباط الأخطاء.

مثال 6-4: بأخذ المثال 6-1 ، نقوم بتقدير نموذج كويك :

$$y_t = a(1-\lambda) + \beta_0 X_t + \lambda y_{t-1} + v_t$$

نحصل على :

$$\underset{\substack{SE\\ t}}{\hat{Y}_t} = \underset{\substack{(46,4355)\\ (-4,7811)^*}}{-222,0157} + \underset{\substack{(0,0213)\\ (5,3630)^*}}{0,1146 X_t} + \underset{\substack{(0,1430)\\ (2,3517)^*}}{0,3364 Y_{t-1}}$$

$$\bar{R}^2 = 0,9918 \quad , \mathrm{F}^* = 1580,507, Dw = 198, n = 25, SCR = 83990,47$$

وبالتالي : $\lambda = 0,3364$ ، $a(1-\lambda) = -222,0157 \Rightarrow a = -334,5625$

$$\beta_0 = 0,1146$$

نحن لدينا : $\beta_i = \lambda^i \beta_0$

$$\beta_1 = \lambda\beta_0 = 0,3364(0,1146) = 0,0385$$

$$\beta_2 = \lambda^2\beta_0 = (0,3364)^2(0,1146) = 0,0129$$

$$\beta_3 = \lambda^3\beta_0 = (0,3364)^3(0,1146) = 0,0043$$

النموذج هو :

$$\hat{y}_t = -334,5625 + 0,1146 x_t + 0,03851 x_{t-1} + 0,0129 x_{t-2} - 0,0043 x_{t-3}$$

3-6-نموذج الضبط الجزئي : (Le modèle d’ajustement partiel)

لنفترض أن قيمة المتغيرة المفسَرة المرغوب y_t^* ، محدد عن طريق متغيرات مفسِرة xt كمايلي" :

(أ) $Y_t^* = \alpha + \beta X_t + \varepsilon_t$

واذا وضعنا العلاقة التي تربط بين المتغيرة المرغوب فيها و الحقيقية كمايلي :

(ب) $Y_t - Y_{t-1} = \mu\left(Y_t^* - Y_{t-1}\right)$

مع : $0 \leq \mu < 1$

بتعويض العلاقة (أ) في المعادلة (ب) نحصل نموذج Koyck كمايلي :

$$Y_t - Y_{t-1} = \mu\left(\alpha + \beta X_t + \varepsilon_t - Y_{t-1}\right)$$

$$Y_t = (1-\mu)Y_{t-1} + \mu\alpha + \mu\beta x_t + \mu\varepsilon_t$$

أي : (ج) $Y_t = \beta_1 Y_{t-1} + C_0 + C_1 x_t + v_t$

حيث: $\beta_1 = 1-\mu, C_0 = \mu\alpha, C_1 = \mu\beta$

مثال 6-5: بأخذ المثال 6-1 نقوم بتقدير نموذج الضبط الجزئي :

نحصل أولا على :

$$\begin{array}{llll} \hat{Y}_t = & -222{,}0157 + & 0{,}1146 X_t + & 0{,}3364 Y_{t-1} \\ SE & (46{,}4355) & (0{,}0213) & (0{,}1430) \\ t & (-4{,}7811)^* & (5{,}3630)^* & (2{,}3517)^* \end{array}$$

$$\bar{R}^2 = 0{,}9918 \quad , F^* = 1580{,}507, Dw = 198, n = 25, SCR = 83990{,}47$$

وبالتالي :

$$\mu = 1 - 0{,}3364 = 0{,}6636; \Rightarrow \alpha = -222{,}0157/0{,}96636 = -334{,}5625$$
$$\beta = 0{,}1146/0{,}99636 = 0{,}1726$$

اذا نموذج الضبط الجزئي هو :

$$Y_t^* = -334{,}5625 + 0{,}1726 X_t + e_t$$

مع : $Y_t - Y_{t-1} = 0,6636\left(Y_t^* - Y_{t-1}\right)$

4-6-نموذج التوقعات التكيفية : (Le modèle d’anticipation adaptatives)

في هذا النموذج قيم المتغيرة المفسَرة هي بدلالة قيم المتغيرة المفسِرة المرتقبة أي :

$$Y_t = \alpha + \beta X_t^* + \varepsilon_t$$

حيث : X_t^* هي القيمة المرتقبة لـ X_t

واذا وضعنا العلاقة التي تربط بين المتغيرة المرغوب فيها و الحقيقية كمايلي :

$$X_t^* - X_{t-1}^* = \mu\left(X_t - X_{t-1}^*\right) \quad (د)$$

مع : $0 \le \mu < 1$

هذه العلاقة (د) يمكن كتابتها كمايلي :

$$X_t^* = \mu X_t + \mu(1-\mu)X_{t-1} + \mu(1-\mu)^2 X_{t-2} + \mu(1-\mu)^3 X_{t-3} + \dots$$

$$X_t^* = \mu \sum_{i=0}^{\infty} (1-\mu)^i X_{t-i}$$

بتعويض هذه العلاقة في المعادلة (ج) نحصل على :

$$Y_t = \alpha + \beta\mu \sum_{i=0}^{\infty} (1-\mu)^i X_{t-i} + \varepsilon_t$$

هذا النموذج عبارة عن نموذج Koyock :

$$Y_t = \mu\alpha + \mu\beta X_t + (1-\mu)Y_{t-1} + \left[\varepsilon_t - (1-\mu)\varepsilon_{t-1}\right]$$

مثال 6-6: بأخذ المثال 6-1 نقوم بتقدير نموذج التوقعات التكيفية نحصل على :

$$Y_t^* = -334,5625 + 0,1726 X_t + e_t$$

مع :

$$X_t^* - X_{t-1}^* = 0,6636\left(X_t - X_{t-1}^*\right)$$

الفصل السابع
النماذج الأنية

عادة ماتكون المتغيرة المفسِرة (الخارجية) في النموذج المتعددة هي بدورها متغيرة تابعة للمتغيرات الأخرى، في هذه الحالة فإن تقدير النموذج يؤدي إلى تحيز المقدرات لم نستعمل طريقة المربعات الصغرى، وبالتالي سنقوم بالبحث عن تحويل النموذج بحيث النموذج الإبتدائي يصبح معبر عنه بدلالة المتغيرات الخارجية.

مثال 7-1 : ليكن النموذج الكلي التالي :

$$\begin{cases} C_t = \alpha_0 + \alpha_1 Y_t + \varepsilon_{1t} & \text{(I)} \\ \mathrm{S_t} = \beta_0 + \beta_1 \mathrm{Y}_{t-1} + \varepsilon_{2t} & \text{(II)} \\ \mathrm{Y_t} = C_t + S_t & \text{(III)} \end{cases}$$

المعادلة (III) هي معادلة تعريفية

C_t : الإستهلاك

S_t : الادخار

Y_t : الدخل الكلي

يسمى النظام بالنظام الهيكلي.

بتعويض (III) في (I) نحصل على :

$$C_t = \alpha_0 + \alpha_1 (C_t + S_t) + \varepsilon_{1t} = \alpha_0 + \alpha_1 C_t + \alpha_1 S_t + \varepsilon_{1t}$$

بتعويض قيمة S_t نحصل على :

$$(1-\alpha_1) C_t = \alpha_0 + \alpha_1 \beta_0 + \alpha_1 \beta_1 \mathrm{Y}_{t-1} + \alpha_1 \varepsilon_{2t} + \varepsilon_{1t}$$

لدينا :

$$C_t = \frac{\alpha_0 + \alpha_1 \beta_0}{(1-\alpha_1)} + \frac{\alpha_1 \beta_1}{(1-\alpha_1)} Y_{t-1} + \frac{\alpha_1 \varepsilon_{2t} + \varepsilon_{1t}}{(1-\alpha_1)}$$

نحصل على :

$$Y_t = C_t + S_t = \frac{\alpha_0 + \alpha_1 \beta_0}{(1-\alpha_1)} + \beta_0 + \left[\frac{\alpha_1 \beta_1}{(1-\alpha_1)} + \beta_1 \right] Y_{t-1} + \frac{\alpha_1 \varepsilon_{2t} + \varepsilon_{1t}}{(1-\alpha_1)} + \varepsilon_{2t}$$

$$Y_t = \frac{\alpha_0}{(1-\alpha_1)} + \frac{\beta_1}{(1-\alpha_1)} Y_{t-1} + \frac{\varepsilon_{2t} + \varepsilon_{1t}}{(1-\alpha_1)}$$

إذا المعادلة الهيكلية تكافئ المعادلة المختصرة (المتغيرات الداخلية معبر عنها بدلالة المتغيرات الخارجية فقط).

$$C_t = \frac{\alpha_0 + \alpha_1\beta_0}{(1-\alpha_1)} + \frac{\alpha_1\beta_1}{(1-\alpha_1)} Y_{t-1} + \frac{\alpha_1\varepsilon_{2t} + \varepsilon_{1t}}{(1-\alpha_1)}$$

$$Y_t = \frac{\alpha_0 + \beta_0}{(1-\alpha_1)} + \frac{\beta_1}{(1-\alpha_1)} Y_{t-1} + \frac{\varepsilon_{2t} + \varepsilon_{1t}}{(1-\alpha_1)}$$

$$S_t = \beta_0 + \beta_1 Y_{t-1} + \varepsilon_{2t}$$

7-1-النموذج العام: ليكن النموذج العام ذات g متغيرة داخلية محددة مسبقا .

$$\begin{aligned}
&\alpha_{11}Y_{1t} + \alpha_{12}Y_{2t} + \ldots + \alpha_{1g}Y_{gt} + \beta_{11}X_{1t} + \beta_{12}X_{2t} + \ldots + \beta_{1k}X_{kt} = \varepsilon_{1t}\\
&\alpha_{21}Y_{1t} + \alpha_{22}Y_{2t} + \ldots + \alpha_{2g}Y_{gt} + \beta_{21}X_{1t} + \beta_{22}X_{2t} + \ldots + \beta_{2k}X_{kt} = \varepsilon_{2t}\\
&. \qquad . \qquad .\\
&\alpha_{g1}Y_{1t} + \alpha_{g2}Y_{2t} + \ldots + \alpha_{gg}Y_{gt} + \beta_{g1}X_{1t} + \beta_{g2}X_{2t} + \ldots + \beta_{gk}X_{kt} = \varepsilon_{gt}
\end{aligned}$$

تكتب على شكل مصفوفات كمايلي:

$$A_{(g,g)}Y_{(g,1)} + B_{(g,k)}X_{(k,1)} = \varepsilon_{(g,1)}$$

إذا كانت المعادلة لا تحتوي على عامل عشوائي فهي تعتبر تعريفية، إذا كانت المصفوفة A تقبل معكوس، فإننا نمر من الشكل الهيكلي نحو الشكل المختصر وذلك بوضع Y بدلالة X، أي :

$$Y = -A^{-1}BX + A^{-1}\varepsilon$$

ويمكن تطبيق MCO لأن $A^{-1}\varepsilon$ غير مرتبط بـ X.

إن هذه العملية سهلة من حيث التعبير ولكن صعبة التحقيق تطبيقيا، بالإضافة إلى ذلك يجب فرض شروط حتى تكون قابلة للتطبيق(معرفة العناصر $g \times k$ و المصفوفة $(-A^{-1}B)$ لاتسمح من تحديد وتعريف المصفوفة A المكونة من $g \times g$ عنصر) كذلك المصفوفة B (المكونة من $g \times k$ عنصر) إذا نحن في حالة معادلة ذات $g \times g + (g \times k)$ مجهول، وبدون وضع بعض الشروط مستحيلة الحل).

مثال 7-2: بالنسبة للمثال 7-1 الكتابة على المصفوفات هو كتالي :

$$Y=\begin{bmatrix} C_t \\ S_t \\ Y_t \end{bmatrix}; A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}; X=\begin{bmatrix} 1 \\ \\ Y_{t-1} \end{bmatrix}; B=\begin{bmatrix} -a_0 & 0 \\ -\beta_0 & -\beta_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\varepsilon=\begin{bmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \\ 0 \end{bmatrix}$$

7-2-تعريف المعادلات الآنية :

نميز ثلاث حالات :

-نموذج ناقص التعريف : عدد المعادلات أقل من المعالم المعرفة في الشكل الهيكلي، إذا النموذج لايحتوي على حل.

- نموذج معرف تماما : كل المعادلات معرفة تماما (عدد المعادلات يساوي عدد المعاملات)

- نموذج زائد التعريف : إذا كانت كل المعادلات معرفة تماما، زائدة التعريف

كيف يتم تحديد ذلك:

نضع :

g : عدد المتغيرات الداخلية في النموذج (أو عدد المعادلات في النموذج)

k : عدد المتغيرات الخارجية في النموذج

g' : عدد المتغيرات الداخلية الظاهرة في المعادلة.

k' : عدد المتغيرات الخارجية في المعادلة

r : عدد القيود في المعادلة

إذا الشروط هي :

- تكون معادلة ناقصة التعريف إذا :

$$g'-1>k-k'+r \quad \text{أو} \quad g-1>g-g'+k-k'+r$$

-تكون معادلة معرفة تماما إذا :

$$g'-1=k-k'+r \quad \text{أو} \quad g-1=g-g'+k-k'+r$$

-تكون معادلة زائدة التعريف إذا :

$$g'-1<k-k'+r \quad \text{أو} \quad g-1<g-g'+k-k'+r$$

7-3-طريقة التقدير: طريقة التقدير المستعملة مرتبطة بالشروط التعريفية :

أ-إذا كان النموذج أقل تعريفا : لايوجد تقدير ممكن

ب-إذا كان النموذج معرف تماما أو أكثر تعريفا، يمكن أن نستعمل التقدير معادلة بمعادلة وذلك حسب شرط تعريف المعادلة:

-معادلة معرفة تماما: يمكن أن نطبق طريقة المربعات الصغرى غير المباشرة، أو طريقة المربعات الصغرى على مرحلتين.

-معادلة زائدة التعريف: نطبق طريقة المربعات الصغرى على مرحلتين.

7-3-1-طريقة المربعات الصغرى غير المباشرة : MCI

تتمثل هذه الطريقة في تطبيق طريقة المربعات الصغرى على المعادلات المعرفة تماما للنموذج المختصر، وهي تتمثل في ثلاثة مراحل:

- **المرحلة الأولى:** وضع على شكل مختصر النموذج الهيكلي.

-**المرحلة الثانية:** التقدير عن طريق MCO لكل المعادلات.

-**المرحلة الثالثة:** تحديد معاملات المعادلات من خلال العلاقات الجبرية مابين المعاملات المختصرة و الهيكلية(مادام النموذج معرف تماما، الحل وحيد)

- يستعمل هذا النوع من التقدير يستعمل بصفة نادرة نظرا لصعوبة تحديد الشكل المختصر، لذلك يستحسن استعمال طريقة المربعات الصغرى على مرحلتين، و التي تعطي نفس النتائج.

7-3-2- طريقة المربعات الصغرى على مرحلتين 2SLS:

تطبق هذه الطريقة على المعادلة المعرفة تماما، أو زائدة التعريف وهي تتمثل فيما يلي:

ليكن النظام الآني التالي :

$$\alpha_{11}Y_{1t} + \alpha_{12}Y_{2t} + \ldots + \alpha_{1g}Y_{gt} + \beta_{11}X_{1t} + \beta_{12}X_{2t} + \ldots + \beta_{1k}X_{kt} = \varepsilon_{1t}$$
$$\alpha_{21}Y_{1t} + \alpha_{22}Y_{2t} + \ldots + \alpha_{2g}Y_{gt} + \beta_{21}X_{1t} + \beta_{22}X_{2t} + \ldots + \beta_{2k}X_{kt} = \varepsilon_{2t}$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$\alpha_{g1}Y_{1t} + \alpha_{g2}Y_{2t} + \ldots + \alpha_{gg}Y_{gt} + \beta_{g1}X_{1t} + \beta_{g2}X_{2t} + \ldots + \beta_{gk}X_{kt} = \varepsilon_{gt}$$

المرحلة الأولى : نقوم بتقدير انحدار لكل متغيرة داخلية على كل المتغيرات الخارجية :

$$Y_{1t} = c_{11}X_{1t} + c_{12}X_{2t} + \ldots + c_{1k}X_{kt} + v_{1t}$$
$$Y_{2t} = c_{21}X_{1t} + c_{22}X_{2t} + \ldots + c_{2k}X_{kt} + v_{2t}$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$Y_{gt} = c_{g1}X_{1t} + c_{g2}X_{2t} + \ldots + c_{gk}X_{kt} + v_{gt}$$

المرحلة الثانية : نقوم بتعويض المتغيرات التي تظهر في المعادلات الهيكلية بالقيم المقدرة من النموذج المقدر في المرحلة الأولى:

$$Y_{1t} = \alpha_{12}\hat{Y}_{2t} + \ldots + \alpha_{1g}\hat{Y}_{gt} + \beta_{11}X_{1t} + \beta_{12}X_{2t} + \ldots + \beta_{1k}X_{kt} + \varepsilon_{1t}$$
$$Y_{2t} = \alpha_{11}\hat{Y}_{1t} + \ldots + \alpha_{2g}\hat{Y}_{gt} + \beta_{21}X_{1t} + \beta_{22}X_{2t} + \ldots + \beta_{2k}X_{kt} + \varepsilon_{2t}$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$Y_{gt} = \alpha_{g1}\hat{Y}_{1t} + \alpha_{g2}\hat{Y}_{gt} + \ldots + \beta_{g1}X_{1t} + \beta_{g2}X_{2t} + \ldots + \beta_{gk}X_{kt} + \varepsilon_{gt}$$

مثال 7-3: لدينا النظام الكنزي المبسط التالي :

$$\begin{cases} C_t = \alpha_0 + \alpha_1 Y_t + \varepsilon_t & \text{(I)} \\ \mathrm{Y}_t = C_t + I_t & \text{(II)} \end{cases}$$

ذات المعطيات التالية :

T	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Y	3	4	6	7	10	23	24	26	27	30	43	44	46	47	50	63	64	66	67	70
C	2	3	4	5	6	12	13	14	15	16	22	23	24	25	26	32	33	34	35	36
I	1	1	2	2	4	11	11	12	12	14	21	21	22	22	24	31	31	32	32	34

ان عدد التغيرات الخارجية في النظام هي : k=1 متمثل في المتغيرة I_t و عدد المتغيرات الخارجية g=2 متمثلة في Y_t و C_t ؛ و المعادلة (I) عدد المتغيرات الخارجية هو k'=0 أما عدد المتغيرات الدخلية g'=2 متمثلة في Y_t و C_t وعليه لدينا :1= g'-1=2-1 و -k k'=1-0=0

اذا المعادلة (I) معرفة تماما . يمكن تقديرها عن طريق طريقة المربعات الصغرى غير المباشرة MCI أو عن طريق طريقة المربعات الصغرى على مرحلتين 2SLS

- تقدير عن طريق MCI : البحث أولا على الشكل المختصر نحصل على مايلي :

$$C_t = \alpha_0 + \alpha_1 Y_t + \varepsilon_t$$
$$C_t = \alpha_0 + \alpha_1 (C_t + I_t) + \varepsilon_t$$
$$(1-\alpha_1) C_t = \alpha_0 + I_t + \varepsilon_t$$

الشكل المختصر هو :

$$C_t = \frac{\alpha_0}{(1-\alpha_1)} + \frac{\alpha_1}{(1-\alpha_1)} I_t + \frac{\varepsilon_t}{(1-\alpha_1)}$$

نقوم بتقدير الشكل المختصر أي : $C_t = B_1 + B_2 I_t + v_t$، عن طريق طريقة المربعات الصغرى MCO نحصل على مايلي:

$$\hat{C}_t = 1{,}973059 + 1{,}001585 I_t$$

لايجاد معالم النموذج : $C_t = \alpha_0 + \alpha_1 Y_t + \varepsilon_t$ نقوم بتعويض لحل النظام التالي:

$$\begin{cases} B_1 = \dfrac{\alpha_0}{(1-\alpha_1)} \\ B_2 = \dfrac{\alpha_1}{(1-\alpha_1)} \end{cases} \quad \text{أي :} \quad \begin{cases} 1{,}973059 = \dfrac{\alpha_0}{(1-\alpha_1)} \\ 1{,}001585 = \dfrac{\alpha_1}{(1-\alpha_1)} \end{cases}$$

نحصل على القيم التالية :

$$\hat{C}_t = 0{,}9857 + 0{,}5003 Y_t$$

- التقدير عن طريق طريقة المربعات الصغرى على مرحلتين 2SLS:

نحن لدينا النموذج التالي : $C_t = \alpha_0 + \alpha_1 Y_t + \varepsilon_t$

- المرحلة الأولى :نقوم بتقدير Y_t بدلالة المتغيرة الخارجية مادام المتغيرة الخارجية الوحيدة هي I_t ، اذا نقوم بتقدير النموذج التالي :

$$Y_t = \alpha_0' + \alpha_1' I_t + \varepsilon_t$$

فنحصل على مايلي :

$$\hat{Y}_t = 1,97305 + 2,001 I_t$$

وعليه القيم الجديد لـ Y_t هي $\hat{Y}_t$ هي التي نستعملها

- المرحلة الثانية : تقدير عن طريق طريقة المربعات الصغرى للنموذج التالي :

$$C_t = \alpha_0 + \alpha_1 \hat{Y}_t + \varepsilon_t$$

القيم الجديدة $\hat{Y}_t$ نحصل عليها من النموذج السابق فنحصل على مايلي :

T	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
y chapeau	3,9746	3,9746	5,9762	5,9762	9,9794	23,9905	23,9905	25,9921	25,9921	29,9952	44,0063	44,0063	46,0079	46,0079	50,0111	64,0222	64,0222	66,0238	66,0238	70,0269
C	2	3	4	5	6	12	13	14	15	16	22	23	24	25	26	32	33	34	35	36
I	1	1	2	2	4	11	11	12	12	14	21	21	22	22	24	31	31	32	32	34

تقدير النموذج يعطينا مايلي :

$$\hat{C}_t = 0,9857 + 0,5003 \hat{Y}_t$$

هي نفس النتيجة التي تحصلنا عليها عن طريق MCI

7-4-ارتباط الأخطاء في النظام الآني :

عندما نستعمل معطيات زمنية أو سلاسل زمنية لتقدير الأنظمة الآنية، ومن المحتمل أن تكون الأخطاء مرتبطة، ومن أجل تقدير النظام نستعمل طريقة المربعات الصغرى على ثلاثة مراحل والمتمثلة فيمايلي:

المرحلة الأولى : تقدير كل معادلة عن طريق 2SLS و الاحتفاظ بالأخطاء المقدرة $\hat{u}_t$.

المرحلة الثانية: استعمال أخطاء المرحلة الأولى لتقدير معاملات النظام عن طريق طريقة MCG

الفصل الثامن
استقرارية السلاسل الزمنية

ان التقديرات التي قمنا بها لحد الأن لم تتم على أساس دراسة السلاسل من حيث الاستقرارية، ونظرا للدور الأساسي الذي تلعبه استقرارية في تحديد العلاقة الممكنة بين المتغيرات سنتطرق في هذا الفصل الى دراسة استقرارية السلاسل و كيفية تحديدها وكيفية تحويلها من اجل أن تصبح مستقرة.

8-1- ظاهرة الانحدار الزائف:

غالبا ما يعطي تقدير النموذج الانحداري الذي يعتمد على السلاسل الزمنية نتائج زائفة، أو قيم مشكوك فيها، بمعنى أن النتائج تظهر سطحيا جيدة، ولكن اذا تعمقنا فيها نشك في مصداقيتها.

مثال8-1: لو أخذنا على سبيل السلسلة Y_t والتي هي عبارة عن سلسلة مرتبطة بالزمن كمايلي :

$$Y_t=7+0,30t+\varepsilon_t$$

$$\varepsilon_t \sim N(0,\sigma_\varepsilon^2)$$

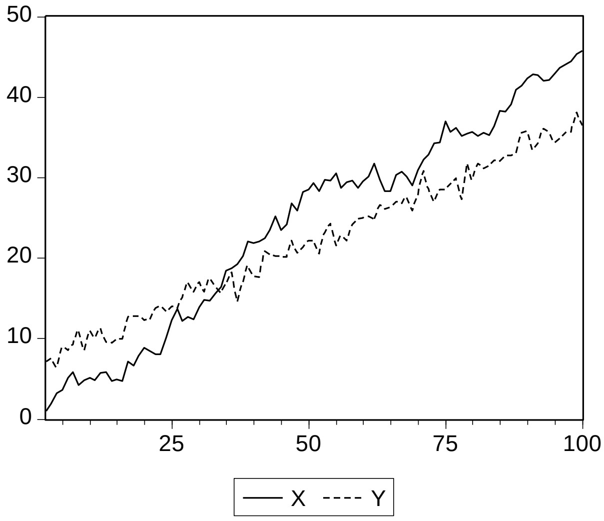
ومتغيرة أخرى X_t هي كتالي :

$X_t=0,5+X_{t-1}+u_t$: مع $X_0=0$

$$u_t \sim N(0,\sigma_u^2)$$

حيث : ε_t و u_t متغيرات عشوائية طبيعية ممركزة متجانسة ذات انحراف معياري 1، وغير مرتبطة فيما بينها.

فان محاكاة السلسلتين ذات أخطاء مستقلة يعطينا عند رسمها مايلي :



عملية تقدير الانحدار الخطي للنموذج تعطينا مايلي :

$$\begin{aligned} Y_t &= 6.1776 + 0.6525 \quad X_t \\ s.e &= (0.3781) \quad (0.0137) \\ t &= (16.3378) \quad (47.4627) \end{aligned}$$

$$R^2 = 0.9587 \quad , DW = 0.7848 \ , F = 2252.708 \ , n = 100$$

من خلال الانحدار فان النتائج تظهر بأنها ممتازة ، R^2 مترفع جيدا ، قيمة ستودنت t مرتفع، المشكل الوحيد متمثل في كون قيمة دربين واتسون منخفضة، ويقترح كل من Granger و Newbold أنه اذا ظهرت قيمة معامل التحديد R^2 أكبر من قيمة دربين واتسون فهي قاعدة للاعتبار أن الانحدار زائف أو ليس له معنى.؛ أي في حالتنا هذه يوجد انحدار زائف.

يعود سبب وجود هذا الانحدار الزائف الى كون السلا سل غير مستقرة ، ويتمثل مفهوم الاستقرارية، في كون المتوسط ثابت غير مرتبط بالزمن و التباين ثابت كذلك :

$$\begin{aligned} &E(Y_t) = \mu \qquad \forall t \in T \\ &E(Y_t - \mu)^2 = \sigma^2 = \gamma_0 \qquad \forall t \in T \\ &\gamma_k = E[(Y_t - \mu)(Y_{t+k} - \mu)] = \gamma_k \end{aligned}$$

حيث : γ_k تمثل التباين المشترك

اما سلسلة ضجيج أبيض Bruit Blanc تعطى بـ:

$$\begin{aligned} &E(Y_t) = \mu \qquad \forall t \in T \\ &E(Y_t - \mu)^2 = \sigma^2 = \gamma_0 \qquad \forall t \in T \\ &\gamma_k = E[(Y_t - \mu)(Y_{t+k} - \mu)] = 0 \end{aligned}$$

ان أغلب السلاسل الاقتصادية تحتوي على اتجاه عام قوي مثل الناتج الدخلي الخام PIB و الاستهلاك و مستوى العام للأسعار. وبالتالي فهي غير مستقرة مما يؤدي بنا الى تحويلها حتى تصبح صالحة أي حتى تصبح مستقرة وبتالي يمكن الاعتماد عليها في النموذج، ومن أجل ذلك عادة ما نستعمل تحويلات على السلسلة وذلك عن طريق عملية الفروقات أو تحويلات أخرى بسيطة، ولكن قبل القيام بذلك يجب القيام باختبار على السلسة لتحديد ان كانت مستقرة أم لا ، وتحديد نوع عدم الاستقرار للقيام بالتحويل المناسب ، ومن الاختبارات المستعملة لدينا اختبار Dickey-fuller.

2-8- دالة الارتباط الذاتي :

تسمح هذه الدالة من توضيح الارتباط بين المشاهدات في فترات مختلفة وتعرف دالة الارتباط مابين السلسلة Y_t و Y_{t-k} كمايلي:

$$\rho_k = \frac{Cov(Y_t, Y_{t-k})}{\sqrt{Var(Y_t)Var(Y_{t-k})}}$$

أي :

$$\rho_k = \frac{\frac{1}{n-k}\sum_{t=k+1}^{n}(Y_t-\bar{Y}_1)(Y_{t-k}-\bar{Y}_2)}{\sqrt{\frac{1}{n-k}\sum_{t=k+1}^{n}(Y_t-\bar{Y}_1)^2}\sqrt{\frac{1}{n-k}\sum_{t=k+1}^{n}(Y_t-\bar{Y}_2)^2}}$$

حيث : $\bar{Y}_1 = \frac{1}{n-k}\sum_{t=k+1}^{n} Y_t$ ، $\bar{Y}_2 = \frac{1}{n-k}\sum_{t=k+1}^{n} Y_{t-k}$

اذا كان حجم العينة كبير بما فيه الكفاية يمكن تقريب العلاقة السابقة وتصبح :

$$\rho_k = \frac{\sum_{t=k+1}^{n}(Y_t-\bar{Y})(Y_{t-k}-\bar{Y})}{\sum_{t=k+1}^{n}(Y_{t-k}-\bar{Y})^2}$$

حيث : $\bar{Y}$ متوسط السلسلة .

1-2-8-دراسة دالة الارتباط الذاتي :

1- اختبار الفردي للارتباط من أجل كل ρ_k هو :

$$H_0: \rho_k = 0$$

$$H_1: \rho_k \neq 0$$

من أجل اختبار هذه الفرضية يمكن استعمال مايلي :

نقوم بالتقريب إلى التوزيع الطبيعي حيث ρ_k يؤول الى التوزيع الطبيعي بمتوسط 0 و انحراف معياري $\frac{1}{\sqrt{n}}$ ، أي تحت فرضية العدم H_0 المعامل ρ_k يكون داخل المجال :

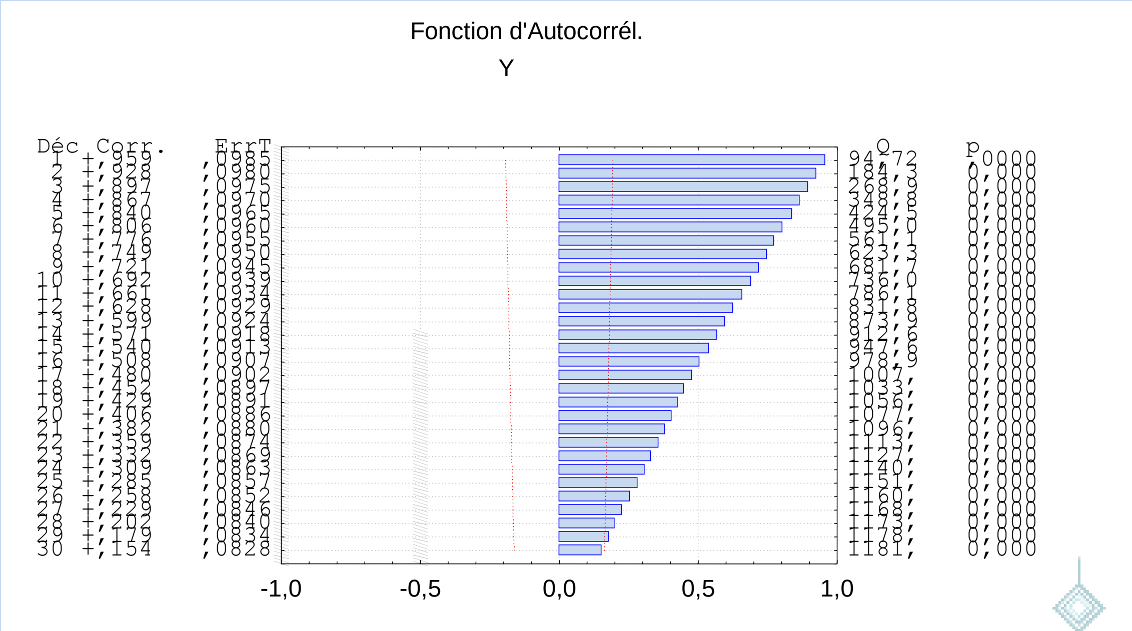
$$0 \pm Z_{\alpha/2}\frac{1}{\sqrt{n}}$$

n : عدد المشاهدات

$Z_{\alpha/2}$: قيمة التوزيع الطبيعي بمستوى معنوية تأخذ $\alpha=5\%$ أي $Z_{\alpha/2}=1,96$

اذا كانت قيمة ρ_k المحسوبة خارج المجال فهو يختلف عن الصفر.

مثال2-8 : اذا أخذنا المتغير Y_t و قمنا بحساب الارتباطات له و المجال نحصل على الشكل التالي:



من خلال الشكل نلاحظ أن كل الارتباطات خارج المجال ابتداء من الارتباط ρ_1 حتى الارتباط ρ_{29} أي ان السلسلة Y غير مستقرة؛ حيث المجال هو: $0 \pm 0{,}196$

- **الاختبار الإجمالي لـ ρ_k :** يتمثل الاختبار الاجمالي فيمايلي :

$$H_0: \rho_1 = \rho_2 = \cdots = \rho_h = 0$$

$$H_1: \ \exists \rho_h \neq 0$$

بحيث يتم اختيار h

يتم ا ختبار هذه الفرضيات عن طريق احصائية Ljung-Box و المعطاة بالعلاقة التالية :

$$LB(h) = n(n+2)\sum_{k=1}^{h}\frac{\hat{\rho}_k^2}{n-k} \to \chi^2(h)$$

تتبع توزيع كاي تربيع بدرجة حرية h

***h* :** عدد التأخرات

$\hat{\rho}_k$: الارتباط الذاتي من الدرجة k

n : عدد المشاهدات

مثال 8-3 : بالنسبة للمتغيرة Y_t فان اختبار الاجمالي لعدد التأخرات 3 هو :

$$H_0: \rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = 0$$

$$H_1: \ \rho_1 \neq \rho_2 \neq \rho_3 \neq 0$$

$$LB(3) = 100(100+2)\left(\frac{0{,}959^2}{100-1} + \frac{0{,}928^2}{100-2} + \frac{0{,}897^2}{100-3}\right) = 268{,}99$$

القيمة المجدولة لكاي تربيع بمستوى معنوية 5% ودرجة حرية 3 هو 7,851 اذا نقبل H_1 ، معاملات الارتباط تختلف عن الصفر وبالتالي السلسلة Y_t غير مستقرة

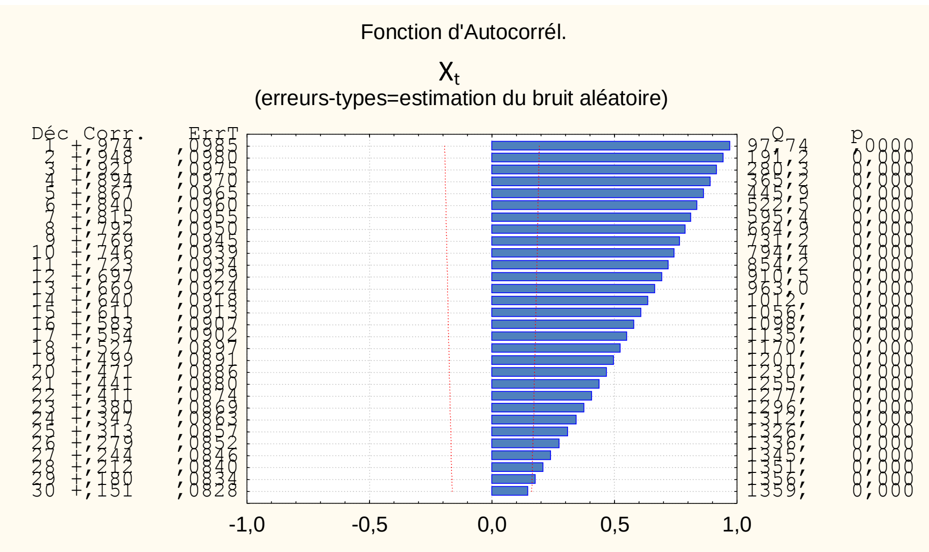
مثال 8 -4 : بالنسبة لسلسلة X_t نختبر استقريتها :

- استقرار السلسلة عن طريق الاختبار الفردي لمعامل الارتباط:

$$H_0: \rho_k = 0$$

$$H_1: \rho_k \neq 0$$

نحصل على الشكل التالي :



من خلال الشكل نلاحظ أن كل الارتباطات خارج المجال ابتداء من ارتباط ρ_1 حتى ارتباط ρ_{29} أي ان السلسلة X_t غير مستقرة؛ حيث المجال هو :

أما الاختبار الاجمالي لعدد التأخرات 4 هو :

$$H_0: \rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = \rho_4 = 0$$

$$H_1: \ \rho_1 \neq \rho_2 \neq \rho_3 \neq \rho_4 \neq 0$$

$$LB(4) = 100(100+2)\left(\frac{0{,}974^2}{100-1} + \frac{0{,}948^2}{100-2} + \frac{0{,}921^2}{100-3} + \frac{0{,}894^2}{100-4}\right) = 365{,}396257$$

القيمة المجدولة لكاي تربيع بمستوى معنوية 5% ودرجة حرية 4 هو 9,488اذا نقبل H_1 ، معاملات الارتباط تختلف عن الصفر وبالتالي السلسلة X_t غير مستقرة

ومنه كل من السلسة Y_t و X_t غير مستقرة، من أجل تحويل هذه السلاسل الى سلاسل مستقرة نبحث عن نوعية عدم الاستقرارية ، ومن أجل ذلك يجب أن نعرف عن أنواع عدم الاسقرارية.

8-2-2-أنواع عدم الاستقرارية:

يوجد نوعين من عدم الاستقرارية وذلك حسب نوعية السلاسل الزمنية:

أ- السلاسل الزمنية ذات الاتجاه العام (Trend Stationary) (TS) و التي تعطى كما يلي:

$$y_t = a_0 + a_1 t + \varepsilon_t)$$

من خلال صيغة هذه السلسة فهي غير مستقرة نظراً لكون التوقع الرياضي أو المتوسط هو تابع لعنصر الزمن، ومن الممكن كذلك أن تأخذ هذه السلاسل الزمنية شكل كثير حدود، حيث الصيغة السابقة هي ذات درجة واحد؛ وحتى تصبح السلسلة مستقرة نقوم بحساب مايلي :

$$y_t - (\hat{a}_0 + \hat{a}_1 t)$$

ب- السلاسل الزمنية ذات الاستقرارية في الفرق (Differency Stationary) (DS) و التي لا تحتوي على اتجاه عام، و من أجل جعل هذه السلاسل الزمنية مستقرة، فإننا نلجأ إلى طريقة الفروقات كما يلي:

$$(1-D)^d y_t = \beta + \varepsilon_t$$

حيث أن:

D: تشير إلى معامل التأخير.

d: درجة الفروقات.

β : هو ثابت .

ε_t: هو عبارة عن الحد العشوائي، و هو ذات سيرورة مستقرة.

هذه السلاسل عادة ماتكون ممثلة باستعمال مصفات الفرق من الدرجة 1 (d=1)، ويسمى تطور من الدرجة (1)؛ ويكتب :

$$(1-D)y_t = \beta + \varepsilon_t$$

أي:

$$y_t = y_{t-1} + \beta + \varepsilon_t$$

ويمكن أن نمييز بين نوعين من السلاسل في هذه الحالة:

أ) حالة $\beta = 0$ تطور بدون انحراف :

$$y_t = y_{t-1} + \varepsilon_t$$

ويتم استقرارها عن طريق الفرق الأول

ب) حالة $\beta \neq 0$ تطور ذات انحراف :

$$y_t = y_{t-1} + \beta + \varepsilon_t$$

ويتم استقرارها عن طريق الفرق الأول

من أجل ايجاد نوع النموذج الذي تتبعه السلاسل غير المستقرة هناك اختبارات تسمح من تحديد نوع النموذج الذي تنتمي اليه السلسلة ومن الاختبارات الشائعة الاستعمال اختبار Dickey-Fuller .

3-8-اختبارات الاستقرارية لـ Dickey-fuller:

تسمح اختبارات الاستقرارية لـ Dickey –Fuller من اظهار الاستقرارية وعدم الاستقرارية للإظهار وتحدبد نوعها، ويسمى هذا الاختبار باختبار الجذر الأحادي، ويتمثل في اختبار الجذر الأحادي في النماذج الثالثة السابقة حسب نوعية السلسلة:

$$y_t = \phi y_{t-1} + \varepsilon_t \quad (1)$$

$$y_t = \phi y_{t-1} + \beta + \varepsilon_t \quad (2)$$

$$y_t = \phi y_{t-1} + a + bt + \varepsilon_t \quad (3)$$

أو بشكل أخر النماذج التالية:

$$\Delta y_t = (\phi - 1) y_{t-1} + \varepsilon_t \quad (4)$$

$$\Delta y_t = (\phi - 1) y_{t-1} + \beta + \varepsilon_t \quad (5)$$

$$\Delta y_t = (\phi - 1) y_{t-1} + a + bt + \varepsilon_t \quad (6)$$

ويتمثل الاختبار في اختبار فرضية العدم:

$$H_0 : \phi - 1 = 0$$

إذا تم قبول هذه الفرضية فان السلسلة غير مستقرة مهما كان النموذج.

أما قبول فرضية البديلة :

$$H_1 : \phi - 1 < 0$$

يؤدي إلى استنتاج أن السلسلة مستقرة

تتم مراحل الاختبار بتقدير النموذج (6) ثم نختبر معنوية المعالم a، و b عن طريق اختبار ستودنت لـ Dickey -Fuller بينما الجذر الأحادي ϕ يتم اختباره عن طريق اختبار احادي الطرف من اليسار عن طريق جدول خاص لـ Dickey Fuller. اذا تم رفض الكلي أو الجزئي للنموذج (6) مع $\phi - 1 = 0$، نمر الى المنموذج (5) مع $\phi - 1 = 0$، ثم الى النموذج (4) مع $\phi - 1 = 0$.

مثال5-8 : نأخذ السلسلة Y_t أعلاه ، ونقوم بتقدير النموذج (6) نحصل على :

$$\Delta y_t = \underset{(-10,445)}{-1,065 y_{t-1}} + \underset{(10.5655)}{8,1406} + \underset{(10.353)}{0,3152t}$$

القيم بين قوسين تمثل نسبة ستنودنت

اختبار الجذر الأحادي :

$$H_0 : \phi - 1 = 0$$
$$H_1 : \phi - 1 < 0$$

القيمة المجدولة لـ Dickey-Fuller عند مستوى معنوية 5% هي 3,45 القيمة المحسوبة بالقيمة المطلقة 10,455 تفوق القيمة المجدولة اذا نقبل H_1 اذا نرفض الجذر الأحادي.

اختبار معنوية معامل الزمن :

$$H_0 : b = 0$$
$$H_1 : b \neq 0$$

القيمة المجدولة لـديكي فولر DF عند مستوى معنوية 5% هو 2 ,79 القيمة المحسوبة بالقيمة المطلقة 10,353 تفوق القيمة المجدولة اذا نقبل H_1

اختبار معنوية الثابت :

$$H_0 : c = 0$$
$$H_1 : c \neq 0$$

القيمة المجدولة لـديكي فولر DF عند مستوى معنوية 5% هو 3,11 القيمة المحسوبة بالقيمة المطلقة 10,5655 تفوق القيمة المجدولة اذا نقبل H_1

من خلال هذه النتيجة فان السلسة هي من نوع TS ، لأننا قمنا برفض الجذر الأحادي وقبول معامل الزمن.

اذا يتم تقدير النموذج التالي : $\hat{y}_t = \hat{c} + \hat{b}t$ نحصل على :

$$\hat{y}_t = 7,363792 + 0,295779t$$

السلسلة المستقرة YD نحصل عليها عن طريق الفرق التالي:

$$YD = Y - (7{,}363792 + 0{,}295779t)$$

باعادة تطبيق اختبار Dickey-Fuller على السلسلة YD نحصل على النموذج 6 :

$$\Delta YD_t = \underset{(-10{,}387)}{-1{,}065 YD_{t-1}} + \underset{(0{,}033677)}{0{,}0065} - \underset{(-0{,}024365)}{0{,}0000827t}$$

اختبار الجذر الأحادي :

$$H_0 : \phi - 1 = 0$$
$$H_1 : \phi - 1 < 0$$

القيمة المجدولة لـ Dickey-Fuller عند مستوى معنوية 5% هي 3,45 ؛القيمة المحسوبة بالقيمة المطلقة 10,387 تفوق القيمة المجدولة اذا نقبل H_1 اذا نرفض الجذر الأحادي.

اختبار معنوية معامل الزمن :

$$H_0 : b = 0$$
$$H_1 : b \neq 0$$

القيمة المجدولة لديكي فولر DF عند مستوى معنوية 5% هو 2,79؛ القيمة المحسوبة بالقيمة المطلقة 0,0243 أقل من القيمة المجدولة اذا نقبل H_0

اختبار معنوية الثابت :

$$H_0 : c = 0$$
$$H_1 : c \neq 0$$

القيمة المجدولة لديكي فولر DF عند مستوى معنوية 5% هو 3,11 ؛ القيمة المحسوبة بالقيمة المطلقة 0,033677 أقل من القيمة المجدولة اذا نقبل H_0

ومنه نستنتج أن السلسلة YD_t مستقرة مادام لايوجد جذر أحادي و لا يوجد تأثير الزمن.

مثال6-8 :نأخذ السلسلة X_t أعلاه:

1-نقوم بتقدير النموذج (6) نحصل على :

$$\Delta X_t = \underset{(-1{,}7669)}{-0{,}07 X_{t-1}} + \underset{(0.2173)}{0{,}501} + \underset{(1.70)}{0{,}043t}$$

القيم بين قوسين تمثل نسبة ستنودنت

اختبار الجذر الأحادي :

$$H_0 : \phi - 1 = 0$$
$$H_1 : \phi - 1 < 0$$

القيمة المجدولة لـ Dickey-Fuller عند مستوى معنوية 5% هي 3,45 القيمة المحسوبة بالقيمة المطلقة 1,7669 أقل من القيمة المجدولة اذا نقبل H_0 اذا نقبل الجذر الأحادي.

<u>اختبار معنوية معامل الزمن :</u>

$$H_0 : b = 0$$
$$H_1 : b \neq 0$$

القيمة المجدولة لـديكي فولر DF عند مستوى معنوية 5% هو2 ,79 2 ؛ القيمة المحسوبة بالقيمة المطلقة 1,7 أقل من القيمة المجدولة اذا نقبل H_0 لايوجد تأثير الزمن.

<u>اختبار معنوية الثابت :</u>

$$H_0 : c = 0$$
$$H_1 : c \neq 0$$

القيمة المجدولة لـديكي فولر DF عند مستوى معنوية 5% هو 3,11 ؛القيمة المحسوبة بالقيمة المطلقة 0,2173 أقل من القيمة المجدولة اذا نقبل H_0

اذا نمر الى تقدير النموذج 5 للسلسلة X_t

2- <u>تقدير النموذج 5:</u>

$$\Delta X_t = \underset{(-0,5551)}{-0,003129 X_{t-1}} + \underset{(3.440)}{0,671267}$$

القيم بين قوسين تمثل نسبة ستنودنت

<u>اختبار الجذر الأحادي :</u>

$$H_0 : \phi - 1 = 0$$

$$H_1 : \phi - 1 < 0$$

القيمة المجدولة لـ Dickey-Fuller عند مستوى معنوية 5% هي 2,89 القيمة المحسوبة بالقيمة المطلقة 0,5551 أقل من القيمة المجدولة اذا نقبل H_0 اذا نقبل الجذر الأحادي.

<u>اختبار معنوية الثابت :</u>

$$H_0 : c = 0$$

$$H_1 : c \neq 0$$

القيمة القيمة المجدولة لـديكي فولر DF عند مستوى معنوية 5% هو 2,54 القيمة المحسوبة بالقيمة المطلقة 3,440 أكبر من القيمة المجدولة اذا نقبل H_1

اذا X_t هو تطور DS ذات انحراف .يتم استقرار السلسلة عن طريق الفرق الأول كمايلي :

$$XD_t = X_t - X_{t-1}$$

باعادة تطبيق اختبار Dickey-Fuller على السلسلة XD_t نحصل على النموذج 6 :

$$\Delta XD_t = \underset{(-9,805)}{-1,0073 XD_{t-1}} + \underset{(2,8676)}{0,63645} - \underset{(-0,2925)}{0,00109t}$$

اختبار الجذر الأحادي :

$$H_0 : \phi - 1 = 0$$
$$H_1 : \phi - 1 < 0$$

القيمة المجدولة لـ Dockey-Fuller عند مستوى معنوية 5% هي 3,45 القيمة المحسوبة بالقيمة المطلقة 9,805 تفوق القيمة المجدولة اذا نقبل H_1 اذا نرفض الجذر الأحادي.

اختبار معنوية معامل الزمن :

$$H_0 : b = 0$$
$$H_1 : b \neq 0$$

القيمة المجدولة لـديكي فولر DF عند مستوى معنوية 5% هو 2,79 القيمة المحسوبة بالقيمة المطلقة 0,2925 أقل من القيمة المجدولة اذا نقبل H_0

اختبار معنوية الثابت :

$$H_0 : c = 0$$
$$H_1 : c \neq 0$$

القيمة المجدولة لـديكي فولر DF عند مستوى معنوية 5% هو 3,11 القيمة المحسوبة بالقيمة المطلقة 2,8676 أقل من القيمة المجدولة اذا نقبل H_0

ومنه نستنتج أن السلسلة XD_t مستقرة مادام لايوجد جذر أحادي و لا يوجد تأثير الزمن.

مثال 8-7: لو نعيد تقدير النموذج على السلاسل المستقرة نحصل على مايلي :

$$\begin{array}{lll} YD_t = & -0.06857 + & 0.1183\, XD_t \\ s.e = & (0.10799) & (0.09187) \\ t = & (-0.6349) & (1.28777) \end{array}$$

$$R^2 = 0.0168 \quad , DW = 2.06 \quad , F = 1.658$$

اذا العلاقة بعد استقرار السلاسل أصبحت غير موجودة هذا مايؤكد الانحدار الزائف

4-8-اختبار دكي- فولر الموسع Augmented Dickey-Fuller .

كنا نعتبر أن الأخطاء ε مستقلة أي غير مرتبطة فيما بينها ولكن هذا غالبا غير محقق لذلك استعمل ديكي فولر اختبار يأخذ بعين الاعتبار هذه الخاصية وهو يعتمد على المعادلات التالية :

$$\Delta y_t = \phi_1 y_{t-1} - \sum_{j=2}^{p} \phi_j \Delta y_{t-j+1} + \varepsilon_t \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

$$\Delta y_t = \phi_1 y_{t-1} - \sum_{j=2}^{p} \phi_j \Delta y_{t-j+1} + c + \varepsilon_t \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (8)$$

$$\Delta y_t = \phi_1 y_{t-1} - \sum_{j=2}^{p} \phi_j \Delta y_{t-j+1} + c + bt + \varepsilon_t \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (9)$$

مع : $\varepsilon_t \to N\left(0, \delta_\varepsilon^2\right)$

لدينا الفرضية المراد اختبارها: $H_1 : |\phi_1| < 0$

نقوم بحساب τ و نقارنها مع τ المجدولة في جداول (ADF) ففي حالة ما إذا كانت τ المحسوبة أقل من τ المجدولة فإننا نقبل فرضية العدم أي أن السلسلة الزمنية y_t غير مستقر، و العكس صحيح، فإذا كانت τ المحسوبة أكبر من τ المجدولة فإننا نقبل الفرضية البديلة أي H_1، و منه فإن السلسلة الزمنية y_t مستقرة، بقي لنا أن نشير إلى أن تحديد درجة التأخير P يعتمد على معياري: Akaike و Schwarz.

مؤشر Schwarz : $CS = Ln\left(\frac{e'e}{n}\right) + \frac{k}{n} Ln(n)$

ومؤشر المعلومات لـ Akaike : $Aic = Ln\left(\frac{e'e}{n}\right) + \frac{2k}{n}$

فيما يخص هذه مؤشرات تسمح من اختيار النموذج الذي له أقل قيمة لهذه الأخيرة .

مثال 8-8:نأخذ المتغيرة Y_t و نطبق عليها اختبار ديكي فيلور الموسع

1- **تقدير النموذج 9** : من أجل اختيار النموذج الملائم نقوم بحساب نماذج ذات قيم مختلفة P ، و نختار النموذج ذات أقل مؤشر لـ Akaike و Schwartz نحصل على الجدول التالي:

p	Akaike	Schwartz
0	2,756	2,835
1	2,721	2,826
2	2,665	2,798
3	**2,618**	**2,778**
4	2,627	2,815
5	2,652	2,869
6	2,666	2,911
7	2,697	2,971
8	2,692	2,995

هذه القيم مستخرج من برنامج EVIEWS

اذا التأخر الذي يؤخذ هو 3 النموذج هو :

$$\Delta Y_t = \underset{(-6,244430)}{-1,612254 Y_{t-1}} + \underset{(2,3878834)}{0,486232\Delta(Y(-1))} + \underset{(1,432544)}{0,486232\Delta(Y(-2))} - \underset{(-0,384618)}{0,040427\Delta(Y(-3))} + \underset{(6,618980)}{11,89213} + \underset{(6,254803)}{0,477965t}$$

القيم بين قوسين تمثل نسبة ستنودنت

<u>اختبار الجذر الأحادي :</u>

$$H_0 : \phi - 1 = 0$$
$$H_1 : \phi - 1 < 0$$

القيمة المجدولة لـ Dickey-Fuller عند مستوى معنوية 5% هي 3,45 القيمة المحسوبة بالقيمة المطلقة 6,24430تفوق القيمة المجدولة اذا نقبل H_1 اذا نرفض الجذر الأحادي.

<u>اختبار معنوية معامل الزمن :</u>

$$H_0 : b = 0$$
$$H_1 : b \neq 0$$

القيمة المجدولة لـ Dickey-Fuller عند مستوى معنوية 5% هي 2,79 القيمة المحسوبة بالقيمة المطلقة 6,254803 تفوق القيمة المجدولة اذا نقبل H_1

<u>اختبار معنوية الثابت :</u>

$$H_0 : c = 0$$
$$H_1 : c \neq 0$$

القيمة المجدولة لـ Dickey-Fuller عند مستوى معنوية 5% هي3,11 القيمة المحسوبة بالقيمة المطلقة 6,618980 تفوق القيمة المجدولة اذا نقبل H_1

من خلال هذه النتيجة فان السلسلة هي من نوع TS ، لأننا قمنا برفض الجذر الأحادي وقبول معامل الزمن.

اذا يتم تقدير النموذج التالي : $\hat{y}_t = \hat{c} + \hat{b}t$ نحصل على :

$$\hat{y}_t = 7,363792 + 0,295779t$$

السلسلة المستقرة YD نحصل عليها عن طريق الفرق .

مثال 8-9 :نأخذ المتغيرة X_t و نطبق عليها اختبار ديكي فيلور الموسع

2- **تقدير النموذج 9** : من أجل اختيار النموذج الملائم نقوم بحساب نماذج ذات قيم مختلفة P ، مختلفة و نختار النموذج ذات أقل مؤشر لـ Akaike و Schwartz نحصل على الجدول التالي:

P	Akaike	Schwarz
0	**2,911**	**2,989**
1	2,940	3,046
2	2,945	3,077
3	2,954	3,114
4	2,951	3,139
5	2,981	3,197
6	3,007	3,252
7	2,989	3,262
8	3,015	3,319

اذا التأخر الذي يؤخذ هو 0 النموذج هو نفسه نموذج ديكي فيلور البسيط الذي تحصلنا عليه .

8-5- اختبار فيليبس – بيرون:

يتم استخدام هذا الاختبارفي حالة وجود ارتباط بين الأخطاء العشوائية أو عدم تجانس تباينات الأخطاء $E(\varepsilon_t \varepsilon_t') \neq \delta_\varepsilon^2$ في نموذج ديكي فولر.

يتمثل هذا الإختبار في تقدير نموذج ديكي فولر واتباع نفس الخطوات ولكن بتصحيح الإحصائية المستعملة للإختبار ديكي فولر، حيث يتم تطبيق الإحصائية التالية:

$$pp = z(t_{\phi-1}) = \sqrt{\frac{C_0}{a}}\ t_{\phi-1} - \frac{1}{2}(a - C_0)\frac{Tv}{\sqrt{as^2}}$$

حيث أن:

$C_j = \frac{1}{n}\sum_{s=j+1}^{n} e_t e_{t-s}, j = 0, \ldots . p$، $\phi - 1$ تباين : v^2، $S^2 = \frac{\sum e_t^2}{n-K}$

$a = C_0 + 2\sum_{j=1}^{L}\left(1 - \frac{j}{L+1}\right)C_j$ ، $C_0 = [(n-k)/n]S^2$

قيمة $L \approx (n)^{(1/4}$

اختبار الاحصائية يتم مقارنتها بقيمة المتواجدة في جدول ديكي فيولور و في حالة الأخطاء متجانسة فإن اختبار *pp*هو اختبار ديكي فيلور البسيط.

مثال 8-10 : بالنسبة للسلسلة Y_t قيم احصائة *PP* معطاة

للنموذج 3 : L=3

اختبار الجذر الأحادي :

$$H_0 : \phi - 1 = 0$$
$$H_1 : \phi - 1 < 0$$

القيمة المجدولة لـ Dickey-Fuller عند مستوى معنوية 5% هي 3,45 القيمة المحسوبة بالقيمة المطلقة PP=10.92098 تفوق القيمة المجدولة اذا نقبل H_1 اذا نرفض الجذر الأحادي.

مثال 8-11: بالنسبة للسلسلة X_t قيم احصائة *PP* معطاة كميلي :

للنموذج 3 : L=3

اختبار الجذر الأحادي :

$$H_0 : \phi - 1 = 0$$
$$H_1 : \phi - 1 < 0$$

القيمة المجدولة لـ Dickey-Fuller عند مستوى معنوية 5% هي 3,45 القيمة المحسوبة بالقيمة المطلقة PP=1.969549أقل من القيمة المجدولة اذا نقبل H_0 اذا نقبل الجذر الأحادي.

الملحق 1 : جدول التوزيع الطبيعي (لاحتمال أقل من قيمة x)

X		0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0	0,5000000	0,5039894	0,5079783	0,5119665	0,5159534	0,5199388	0,5239222	0,5279032	0,5318814	0,5358564
0,1	0,5398278	0,5437953	0,5477584	0,5517168	0,5556700	0,5596177	0,5635595	0,5674949	0,5714237	0,5753454
0,2	0,5792597	0,5831662	0,5870644	0,5909541	0,5948349	0,5987063	0,6025681	0,6064199	0,6102612	0,6140919
0,3	0,6179114	0,6217195	0,6255158	0,6293000	0,6330717	0,6368307	0,6405764	0,6443088	0,6480273	0,6517317
0,4	0,6554217	0,6590970	0,6627573	0,6664022	0,6700314	0,6736448	0,6772419	0,6808225	0,6843863	0,6879331
0,5	0,6914625	0,6949743	0,6984682	0,7019440	0,7054015	0,7088403	0,7122603	0,7156612	0,7190427	0,7224047
0,6	0,7257469	0,7290691	0,7323711	0,7356527	0,7389137	0,7421539	0,7453731	0,7485711	0,7517478	0,7549029
0,7	0,7580363	0,7611479	0,7642375	0,7673049	0,7703500	0,7733726	0,7763727	0,7793501	0,7823046	0,7852361
0,8	0,7881446	0,7910299	0,7938919	0,7967306	0,7995458	0,8023375	0,8051055	0,8078498	0,8105703	0,8132671
0,9	0,8159399	0,8185887	0,8212136	0,8238145	0,8263912	0,8289439	0,8314724	0,8339768	0,8364569	0,8389129
1	0,8413447	0,8437524	0,8461358	0,8484950	0,8508300	0,8531409	0,8554277	0,8576903	0,8599289	0,8621434
1,1	0,8643339	0,8665005	0,8686431	0,8707619	0,8728568	0,8749281	0,8769756	0,8789995	0,8809999	0,8829768
1,2	0,8849303	0,8868606	0,8887676	0,8906514	0,8925123	0,8943502	0,8961653	0,8979577	0,8997274	0,9014747
1,3	0,9031995	0,9049021	0,9065825	0,9082409	0,9098773	0,9114920	0,9130850	0,9146565	0,9162067	0,9177356
1,4	0,9192433	0,9207302	0,9221962	0,9236415	0,9250663	0,9264707	0,9278550	0,9292191	0,9305634	0,9318879
1,5	0,9331928	0,9344783	0,9357445	0,9369916	0,9382198	0,9394292	0,9406201	0,9417924	0,9429466	0,9440826
1,6	0,9452007	0,9463011	0,9473839	0,9484493	0,9494974	0,9505285	0,9515428	0,9525403	0,9535213	0,9544860
1,7	0,9554345	0,9563671	0,9572838	0,9581849	0,9590705	0,9599408	0,9607961	0,9616364	0,9624620	0,9632730
1,8	0,9640697	0,9648521	0,9656205	0,9663750	0,9671159	0,9678432	0,9685572	0,9692581	0,9699460	0,9706210
1,9	0,9712834	0,9719334	0,9725711	0,9731966	0,9738102	0,9744119	0,9750021	0,9755808	0,9761482	0,9767045
2	0,9772499	0,9777844	0,9783083	0,9788217	0,9793248	0,9798178	0,9803007	0,9807738	0,9812372	0,9816911
2,1	0,9821356	0,9825708	0,9829970	0,9834142	0,9838226	0,9842224	0,9846137	0,9849966	0,9853713	0,9857379
2,2	0,9860966	0,9864474	0,9867906	0,9871263	0,9874545	0,9877755	0,9880894	0,9883962	0,9886962	0,9889893
2,3	0,9892759	0,9895559	0,9898296	0,9900969	0,9903581	0,9906133	0,9908625	0,9911060	0,9913437	0,9915758
2,4	0,9918025	0,9920237	0,9922397	0,9924506	0,9926564	0,9928572	0,9930531	0,9932443	0,9934309	0,9936128
2,5	0,9937903	0,9939634	0,9941323	0,9942969	0,9944574	0,9946139	0,9947664	0,9949151	0,9950600	0,9952012
2,6	0,9953388	0,9954729	0,9956035	0,9957308	0,9958547	0,9959754	0,9960930	0,9962074	0,9963189	0,9964274
2,7	0,9965330	0,9966358	0,9967359	0,9968333	0,9969280	0,9970202	0,9971099	0,9971972	0,9972821	0,9973646
2,8	0,9974449	0,9975229	0,9975988	0,9976726	0,9977443	0,9978140	0,9978818	0,9979476	0,9980116	0,9980738
2,9	0,9981342	0,9981929	0,9982498	0,9983052	0,9983589	0,9984111	0,9984618	0,9985110	0,9985588	0,9986051
3	0,9986501	0,9986938	0,9987361	0,9987772	0,9988171	0,9988558	0,9988933	0,9989297	0,9989650	0,9989992

دجول القيم العظمى
لـ x

X	3	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,8	4	4,5
F(X)	0,998650	0,999032	0,999313	0,999517	0,999663	0,999767	0,999841	0,999928	0,999968	0,999997

ملحق 2: جدول توزيع ستودنت T (P = α)

P V	0,9000	0,8000	0,7000	0,6000	0,5000	0,4000	0,3000	0,2000	0,1000	0,0500	0,0200	0,0100	0,0010
1	0,1584	0,3249	0,5095	0,7265	1,0000	1,3764	1,9626	3,0777	6,3138	12,7062	31,8205	63,6567	636,6192
2	0,1421	0,2887	0,4447	0,6172	0,8165	1,0607	1,3862	1,8856	2,9200	4,3027	6,9646	9,9248	31,5991
3	0,1366	0,2767	0,4242	0,5844	0,7649	0,9785	1,2498	1,6377	2,3534	3,1824	4,5407	5,8409	12,9240
4	0,1338	0,2707	0,4142	0,5686	0,7407	0,9410	1,1896	1,5332	2,1318	2,7764	3,7469	4,6041	8,6103
5	0,1322	0,2672	0,4082	0,5594	0,7267	0,9195	1,1558	1,4759	2,0150	2,5706	3,3649	4,0321	6,8688
6	0,1311	0,2648	0,4043	0,5534	0,7176	0,9057	1,1342	1,4398	1,9432	2,4469	3,1427	3,7074	5,9588
7	0,1303	0,2632	0,4015	0,5491	0,7111	0,8960	1,1192	1,4149	1,8946	2,3646	2,9980	3,4995	5,4079
8	0,1297	0,2619	0,3995	0,5459	0,7064	0,8889	1,1081	1,3968	1,8595	2,3060	2,8965	3,3554	5,0413
9	0,1293	0,2610	0,3979	0,5435	0,7027	0,8834	1,0997	1,3830	1,8331	2,2622	2,8214	3,2498	4,7809
10	0,1289	0,2602	0,3966	0,5415	0,6998	0,8791	1,0931	1,3722	1,8125	2,2281	2,7638	3,1693	4,5869
11	0,1286	0,2596	0,3956	0,5399	0,6974	0,8755	1,0877	1,3634	1,7959	2,2010	2,7181	3,1058	4,4370
12	0,1283	0,2590	0,3947	0,5386	0,6955	0,8726	1,0832	1,3562	1,7823	2,1788	2,6810	3,0545	4,3178
13	0,1281	0,2586	0,3940	0,5375	0,6938	0,8702	1,0795	1,3502	1,7709	2,1604	2,6503	3,0123	4,2208
14	0,1280	0,2582	0,3933	0,5366	0,6924	0,8681	1,0763	1,3450	1,7613	2,1448	2,6245	2,9768	4,1405
15	0,1278	0,2579	0,3928	0,5357	0,6912	0,8662	1,0735	1,3406	1,7531	2,1314	2,6025	2,9467	4,0728
16	0,1277	0,2576	0,3923	0,5350	0,6901	0,8647	1,0711	1,3368	1,7459	2,1199	2,5835	2,9208	4,0150
17	0,1276	0,2573	0,3919	0,5344	0,6892	0,8633	1,0690	1,3334	1,7396	2,1098	2,5669	2,8982	3,9651
18	0,1274	0,2571	0,3915	0,5338	0,6884	0,8620	1,0672	1,3304	1,7341	2,1009	2,5524	2,8784	3,9216
19	0,1274	0,2569	0,3912	0,5333	0,6876	0,8610	1,0655	1,3277	1,7291	2,0930	2,5395	2,8609	3,8834
20	0,1273	0,2567	0,3909	0,5329	0,6870	0,8600	1,0640	1,3253	1,7247	2,0860	2,5280	2,8453	3,8495
21	0,1272	0,2566	0,3906	0,5325	0,6864	0,8591	1,0627	1,3232	1,7207	2,0796	2,5176	2,8314	3,8193
22	0,1271	0,2564	0,3904	0,5321	0,6858	0,8583	1,0614	1,3212	1,7171	2,0739	2,5083	2,8188	3,7921
23	0,1271	0,2563	0,3902	0,5317	0,6853	0,8575	1,0603	1,3195	1,7139	2,0687	2,4999	2,8073	3,7676
24	0,1270	0,2562	0,3900	0,5314	0,6848	0,8569	1,0593	1,3178	1,7109	2,0639	2,4922	2,7969	3,7454
25	0,1269	0,2561	0,3898	0,5312	0,6844	0,8562	1,0584	1,3163	1,7081	2,0595	2,4851	2,7874	3,7251
26	0,1269	0,2560	0,3896	0,5309	0,6840	0,8557	1,0575	1,3150	1,7056	2,0555	2,4786	2,7787	3,7066
27	0,1268	0,2559	0,3894	0,5306	0,6837	0,8551	1,0567	1,3137	1,7033	2,0518	2,4727	2,7707	3,6896
28	0,1268	0,2558	0,3893	0,5304	0,6834	0,8546	1,0560	1,3125	1,7011	2,0484	2,4671	2,7633	3,6739
29	0,1268	0,2557	0,3892	0,5302	0,6830	0,8542	1,0553	1,3114	1,6991	2,0452	2,4620	2,7564	3,6594
30	0,1267	0,2556	0,3890	0,5300	0,6828	0,8538	1,0547	1,3104	1,6973	2,0423	2,4573	2,7500	3,6460
40	0,1265	0,2550	0,3881	0,5286	0,6807	0,8507	1,0500	1,3031	1,6839	2,0211	2,4233	2,7045	3,5510
80	0,1261	0,2542	0,3867	0,5265	0,6776	0,8461	1,0432	1,2922	1,6641	1,9901	2,3739	2,6387	3,4163
120	0,1259	0,2539	0,3862	0,5258	0,6765	0,8446	1,0409	1,2886	1,6577	1,9799	2,3578	2,6174	3,3735
∞	0,1257	0,2533	0,3853	0,5244	0,6745	0,8416	1,0364	1,2816	1,6449	1,9600	2,3263	2,5758	3,2905

ملحق 3 : جدول توزيع كاي تربيع

v \ P	0,99	0,975	0,95	0,9	0,1	0,05	0,025	0,01	0,001
1	0,0002	0,0010	0,0039	0,0158	2,7055	3,8415	5,0239	6,6349	10,8276
2	0,0201	0,0506	0,1026	0,2107	4,6052	5,9915	7,3778	9,2103	13,8155
3	0,1148	0,2158	0,3518	0,5844	6,2514	7,8147	9,3484	11,3449	16,2662
4	0,2971	0,4844	0,7107	1,0636	7,7794	9,4877	11,1433	13,2767	18,4668
5	0,5543	0,8312	1,1455	1,6103	9,2364	11,0705	12,8325	15,0863	20,5150
6	0,8721	1,2373	1,6354	2,2041	10,6446	12,5916	14,4494	16,8119	22,4577
7	1,2390	1,6899	2,1673	2,8331	12,0170	14,0671	16,0128	18,4753	24,3219
8	1,6465	2,1797	2,7326	3,4895	13,3616	15,5073	17,5345	20,0902	26,1245
9	2,0879	2,7004	3,3251	4,1682	14,6837	16,9190	19,0228	21,6660	27,8772
10	2,5582	3,2470	3,9403	4,8652	15,9872	18,3070	20,4832	23,2093	29,5883
11	3,0535	3,8157	4,5748	5,5778	17,2750	19,6751	21,9200	24,7250	31,2641
12	3,5706	4,4038	5,2260	6,3038	18,5493	21,0261	23,3367	26,2170	32,9095
13	4,1069	5,0088	5,8919	7,0415	19,8119	22,3620	24,7356	27,6882	34,5282
14	4,6604	5,6287	6,5706	7,7895	21,0641	23,6848	26,1189	29,1412	36,1233
15	5,2293	6,2621	7,2609	8,5468	22,3071	24,9958	27,4884	30,5779	37,6973
16	5,8122	6,9077	7,9616	9,3122	23,5418	26,2962	28,8454	31,9999	39,2524
17	6,4078	7,5642	8,6718	10,0852	24,7690	27,5871	30,1910	33,4087	40,7902
18	7,0149	8,2307	9,3905	10,8649	25,9894	28,8693	31,5264	34,8053	42,3124
19	7,6327	8,9065	10,1170	11,6509	27,2036	30,1435	32,8523	36,1909	43,8202
20	8,2604	9,5908	10,8508	12,4426	28,4120	31,4104	34,1696	37,5662	45,3147
21	8,8972	10,2829	11,5913	13,2396	29,6151	32,6706	35,4789	38,9322	46,7970
22	9,5425	10,9823	12,3380	14,0415	30,8133	33,9244	36,7807	40,2894	48,2679
23	10,1957	11,6886	13,0905	14,8480	32,0069	35,1725	38,0756	41,6384	49,7282
24	10,8564	12,4012	13,8484	15,6587	33,1962	36,4150	39,3641	42,9798	51,1786
25	11,5240	13,1197	14,6114	16,4734	34,3816	37,6525	40,6465	44,3141	52,6197
26	12,1981	13,8439	15,3792	17,2919	35,5632	38,8851	41,9232	45,6417	54,0520
27	12,8785	14,5734	16,1514	18,1139	36,7412	40,1133	43,1945	46,9629	55,4760
28	13,5647	15,3079	16,9279	18,9392	37,9159	41,3371	44,4608	48,2782	56,8923
29	14,2565	16,0471	17,7084	19,7677	39,0875	42,5570	45,7223	49,5879	58,3012
30	14,9535	16,7908	18,4927	20,5992	40,2560	43,7730	46,9792	50,8922	59,7031

لما v>30 يمكن أن نعتبر الكمية التالية : $\sqrt{2\chi^2}-\sqrt{2v-1}$ تتبع التوزيع الطبيعي

ملحق 4 : جدول توزيع فيشر F(قيم F ذات احتمال α)

	V1= 1		V1= 2		V1= 3		V1= 4		V1= 5	
P v2	0,05	0,01	0,05	0,01	0,05	0,01	0,05	0,01	0,05	0,01
1	161,45	4052,18	199,50	4999,50	215,71	5403,35	224,58	5624,58	230,16	5763,65
2	18,51	98,50	19,00	99,00	19,16	99,17	19,25	99,25	19,30	99,30
3	10,13	34,12	9,55	30,82	9,28	29,46	9,12	28,71	9,01	28,24
4	7,71	21,20	6,94	18,00	6,59	16,69	6,39	15,98	6,26	15,52
5	6,61	16,26	5,79	13,27	5,41	12,06	5,19	11,39	5,05	10,97
6	5,99	13,75	5,14	10,92	4,76	9,78	4,53	9,15	4,39	8,75
7	5,59	12,25	4,74	9,55	4,35	8,45	4,12	7,85	3,97	7,46
8	5,32	11,26	4,46	8,65	4,07	7,59	3,84	7,01	3,69	6,63
9	5,12	10,56	4,26	8,02	3,86	6,99	3,63	6,42	3,48	6,06
10	4,96	10,04	4,10	7,56	3,71	6,55	3,48	5,99	3,33	5,64
11	4,84	9,65	3,98	7,21	3,59	6,22	3,36	5,67	3,20	5,32
12	4,75	9,33	3,89	6,93	3,49	5,95	3,26	5,41	3,11	5,06
13	4,67	9,07	3,81	6,70	3,41	5,74	3,18	5,21	3,03	4,86
14	4,60	8,86	3,74	6,51	3,34	5,56	3,11	5,04	2,96	4,69
15	4,54	8,68	3,68	6,36	3,29	5,42	3,06	4,89	2,90	4,56
16	4,49	8,53	3,63	6,23	3,24	5,29	3,01	4,77	2,85	4,44
17	4,45	8,40	3,59	6,11	3,20	5,18	2,96	4,67	2,81	4,34
18	4,41	8,29	3,55	6,01	3,16	5,09	2,93	4,58	2,77	4,25
19	4,38	8,18	3,52	5,93	3,13	5,01	2,90	4,50	2,74	4,17
20	4,35	8,10	3,49	5,85	3,10	4,94	2,87	4,43	2,71	4,10
21	4,32	8,02	3,47	5,78	3,07	4,87	2,84	4,37	2,68	4,04
22	4,30	7,95	3,44	5,72	3,05	4,82	2,82	4,31	2,66	3,99
23	4,28	7,88	3,42	5,66	3,03	4,76	2,80	4,26	2,64	3,94
24	4,26	7,82	3,40	5,61	3,01	4,72	2,78	4,22	2,62	3,90
25	4,24	7,77	3,39	5,57	2,99	4,68	2,76	4,18	2,60	3,85
26	4,23	7,72	3,37	5,53	2,98	4,64	2,74	4,14	2,59	3,82
27	4,21	7,68	3,35	5,49	2,96	4,60	2,73	4,11	2,57	3,78
28	4,20	7,64	3,34	5,45	2,95	4,57	2,71	4,07	2,56	3,75
29	4,18	7,60	3,33	5,42	2,93	4,54	2,70	4,04	2,55	3,73
30	4,17	7,56	3,32	5,39	2,92	4,51	2,69	4,02	2,53	3,70
40	4,08	7,31	3,23	5,18	2,84	4,31	2,61	3,83	2,45	3,51
80	3,96	6,96	3,11	4,88	2,72	4,04	2,49	3,56	2,33	3,26
120	3,92	6,85	3,07	4,79	2,68	3,95	2,45	3,48	2,29	3,17
∞	3,84	6,63	3,00	4,61	2,60	3,78	2,37	3,32	2,21	3,02

تابع لجدول توزيع فيشر F(قيم F ذات احتمال α)

P / v2	V1= 6		V1= 8		V1= 12		V1= 24		V1= ∞	
	0,05	0,01	0,05	0,01	0,05	0,01	0,05	0,01	0,05	0,01
1	233,99	5858,99	238,88	5981,07	243,91	6106,32	249,05	6234,63	254,31	6365,86
2	19,33	99,33	19,37	99,37	19,41	99,42	19,45	99,46	19,50	99,50
3	8,94	27,91	8,85	27,49	8,74	27,05	8,64	26,60	8,53	26,13
4	6,16	15,21	6,04	14,80	5,91	14,37	5,77	13,93	5,63	13,46
5	4,95	10,67	4,82	10,29	4,68	9,89	4,53	9,47	4,36	9,02
6	4,28	8,47	4,15	8,10	4,00	7,72	3,84	7,31	3,67	6,88
7	3,87	7,19	3,73	6,84	3,57	6,47	3,41	6,07	3,23	5,65
8	3,58	6,37	3,44	6,03	3,28	5,67	3,12	5,28	2,93	4,86
9	3,37	5,80	3,23	5,47	3,07	5,11	2,90	4,73	2,71	4,31
10	3,22	5,39	3,07	5,06	2,91	4,71	2,74	4,33	2,54	3,91
11	3,09	5,07	2,95	4,74	2,79	4,40	2,61	4,02	2,40	3,60
12	3,00	4,82	2,85	4,50	2,69	4,16	2,51	3,78	2,30	3,36
13	2,92	4,62	2,77	4,30	2,60	3,96	2,42	3,59	2,21	3,17
14	2,85	4,46	2,70	4,14	2,53	3,80	2,35	3,43	2,13	3,00
15	2,79	4,32	2,64	4,00	2,48	3,67	2,29	3,29	2,07	2,87
16	2,74	4,20	2,59	3,89	2,42	3,55	2,24	3,18	2,01	2,75
17	2,70	4,10	2,55	3,79	2,38	3,46	2,19	3,08	1,96	2,65
18	2,66	4,01	2,51	3,71	2,34	3,37	2,15	3,00	1,92	2,57
19	2,63	3,94	2,48	3,63	2,31	3,30	2,11	2,92	1,88	2,49
20	2,60	3,87	2,45	3,56	2,28	3,23	2,08	2,86	1,84	2,42
21	2,57	3,81	2,42	3,51	2,25	3,17	2,05	2,80	1,81	2,36
22	2,55	3,76	2,40	3,45	2,23	3,12	2,03	2,75	1,78	2,31
23	2,53	3,71	2,37	3,41	2,20	3,07	2,01	2,70	1,76	2,26
24	2,51	3,67	2,36	3,36	2,18	3,03	1,98	2,66	1,73	2,21
25	2,49	3,63	2,34	3,32	2,16	2,99	1,96	2,62	1,71	2,17
26	2,47	3,59	2,32	3,29	2,15	2,96	1,95	2,58	1,69	2,13
27	2,46	3,56	2,31	3,26	2,13	2,93	1,93	2,55	1,67	2,10
28	2,45	3,53	2,29	3,23	2,12	2,90	1,91	2,52	1,65	2,06
29	2,43	3,50	2,28	3,20	2,10	2,87	1,90	2,49	1,64	2,03
30	2,42	3,47	2,27	3,17	2,09	2,84	1,89	2,47	1,62	2,01
40	2,34	3,29	2,18	2,99	2,00	2,66	1,79	2,29	1,51	1,80
80	2,21	3,04	2,06	2,74	1,88	2,42	1,65	2,03	1,32	1,49
120	2,18	2,96	2,02	2,66	1,83	2,34	1,61	1,95	1,25	1,38
∞	2,10	2,80	1,94	2,51	1,75	2,18	1,52	1,79	1,01	1,01

ملحق 5: جدول دربين وتسون (بمستوى α=%5)

n	k= 1		k= 2		k= 3		k= 4		k= 5	
	d1	d2	d1	d2	d1	d2	d1	d2	d1	d2
15	1,08	1,36	0,95	1,54	0,82	1,75	0,69	1,97	0,56	2,21
16	1,10	1,37	0,98	1,54	0,86	1,73	0,74	1,93	0,62	2,15
17	1,13	1,38	1,02	1,54	0,90	1,71	0,78	1,90	0,67	2,10
18	1,16	1,39	1,05	1,53	0,93	1,69	0,82	1,87	0,71	2,06
19	1,18	1,40	1,08	1,53	0,97	1,68	0,86	1,85	0,75	2,02
20	1,20	1,41	1,10	1,54	1,00	1,68	0,90	1,83	0,79	1,99
21	1,22	1,42	1,13	1,54	1,03	1,67	0,93	1,81	0,83	1,96
22	1,24	1,43	1,15	1,54	1,05	1,66	0,96	1,80	0,86	1,94
23	1,26	1,44	1,17	1,54	1,08	1,66	0,99	1,79	0,90	1,92
24	1,27	1,45	1,19	1,55	1,10	1,66	1,01	1,78	0,93	1,90
25	1,29	1,45	1,21	1,55	1,12	1,65	1,04	1,77	0,95	1,89
26	1,30	1,46	1,22	1,55	1,14	1,65	1,06	1,76	0,98	1,88
27	1,32	1,47	1,24	1,56	1,16	1,65	1,08	1,76	1,01	1,86
28	1,33	1,48	1,26	1,56	1,18	1,65	1,10	1,75	1,03	1,85
29	1,34	1,48	1,27	1,56	1,20	1,65	1,12	1,74	1,05	1,84
30	1,35	1,49	1,28	1,57	1,21	1,65	1,14	1,74	1,07	1,83
31	1,36	1,50	1,30	1,57	1,23	1,65	1,16	1,74	1,09	1,83
32	1,37	1,50	1,31	1,57	1,24	1,65	1,18	1,73	1,11	1,82
33	1,38	1,51	1,32	1,58	1,26	1,65	1,19	1,73	1,13	1,81
34	1,39	1,51	1,33	1,58	1,27	1,65	1,21	1,73	1,15	1,81
35	1,40	1,52	1,34	1,58	1,28	1,65	1,22	1,73	1,16	1,80
36	1,41	1,52	1,35	1,59	1,29	1,65	1,24	1,73	1,18	1,80
37	1,42	1,53	1,36	1,59	1,31	1,66	1,25	1,72	1,19	1,80
38	1,43	1,54	1,37	1,59	1,32	1,66	1,26	1,72	1,21	1,79
39	1,43	1,54	1,38	1,60	1,33	1,66	1,27	1,72	1,22	1,79
40	1,44	1,54	1,39	1,60	1,34	1,66	1,29	1,72	1,23	1,79
45	1,48	1,57	1,43	1,62	1,38	1,67	1,34	1,72	1,29	1,78
50	1,50	1,59	1,46	1,63	1,42	1,67	1,38	1,72	1,34	1,77
55	1,53	1,60	1,49	1,64	1,45	1,68	1,41	1,72	1,38	1,77
60	1,55	1,62	1,51	1,65	1,48	1,69	1,44	1,73	1,41	1,77
65	1,57	1,63	1,54	1,66	1,50	1,70	1,47	1,73	1,44	1,77
70	1,58	1,64	1,55	1,67	1,52	1,70	1,49	1,74	1,46	1,77
75	1,60	1,65	1,57	1,68	1,54	1,71	1,51	1,74	1,49	1,77
80	1,61	1,66	1,59	1,69	1,56	1,72	1,53	1,74	1,51	1,77
85	1,62	1,67	1,60	1,70	1,57	1,72	1,55	1,75	1,52	1,77
90	1,63	1,68	1,61	1,70	1,59	1,73	1,57	1,75	1,54	1,78
95	1,64	1,69	1,62	1,71	1,60	1,73	1,58	1,75	1,56	1,78
100	1,65	1,69	1,63	1,72	1,61	1,74	1,59	1,76	1,57	1,78

K : عدد المتغيرات الخارجية(الثابت غير مأخوذ بعين الاعتبار)، n: حجم العينة

ملحق رقم 6 : جدول ديكي فيلر Dickey-Fuller

النموذج (1) : بدون اتجاه عام و بدون ثابت

النموذج (2): بدون اتجاه عام مع وجود الثابت

النموذج (3): باتجاه عام و الثابت

جدول توزيع t_{ϕ_1}

الاحتمالات									
n	**0,01**	**0,025**	**0,05**	**0,1**	**0,9**	**0,95**	**0,975**	**0,99**	
25	-2,66	-2,26	-1,95	-1,60	0,92	1,33	1,70	2,16	النموذج(1)
50	-2,62	-2,25	-1,95	-1,61	0,91	1,31	1,66	2,08	
100	-2,60	-2,40	-1,95	-1,61	0,90	1,29	1,64	2,03	
250	-2,58	-2,23	-1,95	-1,62	0,89	1,28	1,63	2,01	
500	-2,58	-2,23	-1,95	-1,62	0,89	1,28	1,62	2,00	
	-2,58	-2,23	-1,95	-1,62	0,89	1,28	1,62	2,00	
25	-3,75	-3,33	-3,00	-2,63	-0,37	0,00	0,34	0,72	النموذج(2)
50	-3,58	-3,22	-2,93	-2,6	-0,40	-0,03	0,29	0,66	
100	-3,51	-3,17	-2,89	-2,58	-0,42	-0,05	0,26	0,63	
250	-3,46	-3,14	-2,88	-2,57	-0,42	-0,06	0,24	0,62	
500	-3,44	-3,13	-2,87	-2,57	-0,43	-0,07	0,24	0,61	
	-3,43	-3,12	-2,86	-2,57	-0,44	-0,07	0,23	0,60	
25	-4,38	-3,95	-3,60	-3,24	-1,14	-0,80	-0,50	-0,15	النموذج(3)
50	-4,15	-3,80	-3,50	-3,18	-1,19	-0,87	-0,58	-0,24	
100	-4,04	-3,73	-3,45	-3,15	-1,22	-0,90	-0,62	-0,28	
250	-3,99	-3,69	-3,43	-3,13	-1,23	-0,92	-0,64	-0,31	
500	-3,98	-3,68	-3,42	-3,13	-1,24	-0,93	-0,65	-0,32	
	-3,96	-3,66	-3,41	-3,12	-1,25	-0,94	-0,66	-0,33	

جدول توزيع $t_{\hat{c}}$ ، $t_{\hat{b}}$

	النموذج (2)			النموذج (3)					
	الثابت C			الثابت C			معامل الزمن b		
n	1%	5%	10%	1%	5%	10%	1%	5%	10%
100	3,22	2,54	2,17	3,78	3,11	2,73	3,53	2,79	2,38
250	3,19	2,53	2,16	3,74	3,09	2,73	3,49	2,79	2,38
500	3,18	2,52	2,16	3,72	3,08	2,72	3,48	2,78	2,38
	3,18	2,52	2,16	3,71	3,08	2,72	3,46	2,78	2,38

قائمة المراجع :

1- قائمة المراجع باللغة العربية :

- دومينك سالفاتور، الاحصاء و الاقتصاد القياسي، ترجمة سعدية حافظ منتصر،ط 2، ديوان المطبوعات الجامعية، 1993 .
- فروخي جمال، نظرية الاقتصاد القياسي، ديوان المطبوعات الجامعية، 1993 .

2- قائمة المراجع باللغة الأجنبية

- Ansion G.,Econometrie pour l'entreprise,Eyrolles,1988.

- Bourbonnais R., Econométrie :manuel et exercices corrigés,Dunod,3éme éd.,2000.

- Bourbonnais R., Exercices pédagogiques d'économétrie: avec corrigés et rappels synthétiques de cours , Economica,2008.

-Cadroret I.,Benjamin C.,Martin F.,Herrard N.,Tanguy S., Econométrie appliquée, 2 éd, de Boeck,2009.

-Casin P.,Econométrie, Edition Technip,Paris,2009.

- Dorman B., Introduction à l'économétrie,Motchrestien, 1999.

- Green W.H.,Econometric Analysis,Prentice Hall,4th ed.,2000.

- Guijarati D.G., Essential of Econometrics,3th ed., McGraw-Hill,New York,2006.

- Guijarati D.G., Basic Econometrics,4th ed., McGraw-Hill,New York,2003.

- Guyon X., Statistique et économétrie : Du modèle linéaire au modèles non-linéaires, ellipses,2001.

- Héricourt J., Reynaud J., Economométrie TD, Duond,2007.

- Johnston J., Dinardo J., Méthodes Econométriques, 4éd, Economica, 1999.

- Mouchot C., Exercices pédagogiques de statistique et économétrie, 2 éd,Economica,1989.

- Philips P.C.B, Wickens M.R.,Exercices in Econometrics,Volume1,Philip Allan Publishers Limted,1978.

- Ramanath R.,Introductory Econometrics with applications,2 ed,Harcourt Brace Javanovich,1992.
- Thomas R.L., Introductory Econometrics with applications,2 ed,Logman,1993