الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي
جامعة محمد البشير الإبراهيمي - برج بوعريريج
نيابة مديرية الجامعة للتكوين العالي في الطور الثالث والتأهيل الجامعي والبحث العلمي والتكوين فيما بعد التدرج
كلية الرياضيات والإعلام الآلي

مسابقة الالتحاق بالتكوين في الطور الثالث (دكتوراه ل م د) شعبة : رياضيات

التاريخ: السبت 28 جانفي 2023

المدة : ساعة ونصف - 1 سا 30 د

Spécialité :	Algèbre et Mathématiques Discrètes, Systèmes Dynamiques et Applications, Mathématiques Appliquées	التخصص :
Epreuve 1 :	Analyse	الامتحان الأول:

Sujet N° 2

Exercice 1 (7 pts)

Développer en série de Fourier la fonction f de période 2π et définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \forall x \in [-\pi, 0[\\ 0 & \forall x \in [0, \pi[\end{cases}$$

Exercice 2 (6 pts)

Soit $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $0 < a < b$ et f une fonction continue de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ où l'intégrale généralisée $\int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t} dt$ converge.

1. Citer la première formule de la moyenne.
2. Monter que $\forall u > 0$: $\int_u^{+\infty} \frac{f(bx) - f(ax)}{x} dx = \int_{bu}^{au} \frac{f(t)}{t} dt.$
3. En déduire que $\int_0^{+\infty} \frac{f(bx) - f(ax)}{x} dx = f(0). \ln \frac{a}{b}.$
4. Calculer $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x} - e^{-2x}}{x} dx.$

Exercice 3 (7 pts)

Soit u un nombre réel, on considère la fonction $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - \frac{1}{1 + ux^2 + y^2}$.

1. Préciser le domaine de définition de la fonction f.
2. Montrer que $x^2 + xy + y^2 > 0$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.
3. En utilisant les conditions d'optimalité, déterminer toutes les valeurs de u pour lesquelles le point $(0, 0)$ est un minimum local strict.
4. Parmi ces valeurs, préciser celles qui font de $(0, 0)$ un minimum global strict.

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي
جامعة محمد البشير الإبراهيمي - برج بوعريريج

نيابة مديرية الجامعة للتكوين العالي في الطور الثالث والتأهيل الجامعي والبحث العلمي والتكوين فيما بعد التدرج

كلية الرياضيات والإعلام الآلي

مسابقة الالتحاق بالتكوين في الطور الثالث (دكتوراه ل م د) شعبة : رياضيات

التاريخ : السبت ٢٨ جانفي ٢٠٢٣ — المدة : ساعتان - ٢ سا

Spécialité :	Algèbre et Mathématiques Discrètes	التخصص :
Epreuve 2 :	Algèbre et Topologie	الإمتحان الثاني:

Sujet N° 2

Exercice 1

Soit (E, d) un espace métrique et A et B deux parties de E.

1. Montrer que $x \in \bar{A} \Leftrightarrow d(x, A) = 0$.
2. Montrer que l'application
$$\begin{array}{rccl} f: & E & \longrightarrow & (\mathbb{R}, |.|) \\ & x & \longmapsto & f(x) = d(x, A) \end{array}$$
   est Lipschitzienne.
3. Posons
$$U = \{x \in E : d(x, A) = d(x, B)\} \text{ et } V = \{x \in E : d(x, A) < d(x, B)\}.$$
   Montrer que U est fermé et que V est ouvert dans E.
4. Montrer que pour tous fermés disjoints A et B de E, il existe deux ouverts disjoints de E tels que A soit inclus dan l'un et B dans l'autre.

Exercice 2

On considère le groupe multiplicative donné par :

$$U(n) = \{\bar{k}, k \wedge n = 1 \ \ et \ \ k < n\}.$$

On se place dans le cas où $n = 17$.

1. Donner explicitement les éléments du groupe $U(17)$.
2. Quel est l'ordre de l'élément $\bar{3}$. En déduire que $U(17)$ est cyclique .
3. Déterminer les sous groupes de $U(17)$.
4. Déterminer les générateurs $U(17)$.
5. Déterminer les isomorphismes de groupes finis de $\mathbb{Z}_{17}$ vers $U(17)$.

Exercice 3

Soit $d \in \mathbb{Z} \setminus \{1\}$ tel que si $x \in \mathbb{Z}$ et $x^2 \mid d$ alors $x^2 = 1$. On considère $\mathbb{Z}[\sqrt{d}] = \{a + b\sqrt{d} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$.

1. Montrer que $(\mathbb{Z}[\sqrt{d}], +, \times)$ muni de l'addition et la multiplication des réels est un sou-anneau de $\mathbb{C}$
2. Soit $x = a + b\sqrt{d} \in \mathbb{Z}[\sqrt{d}]$. On pose $N(x) = N(a + b\sqrt{d}) = \mid a^2 - db^2 \mid$. Montrer qu' on a
   (i) $N(x) = 0$ si et seulement si $x = 0$.
   (ii) $\forall x, y \in \mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ on a $N(xy) = N(x)N(y)$.
3. En déduire que les éléments inversibles de $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ sont ceux s'écrivant $a + b\sqrt{d}$ avec $\mid a^2 - db^2 \mid = 1$.
4. **Application** :
   (i) $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$ est-il un corps? (justifier votre réponse).
   (ii) Si $d = -1$, alors l'anneau $\mathbb{Z}[\sqrt{-1}] = \{a + ib \mid a, b \in \mathbb{Z}$ et $i^2 = 1\}$ est dit l'anneau de Gauss.
   Déterminer les éléments inversibles de $\mathbb{Z}[\sqrt{-1}]$. En déduire que l'anneau de Gauss n'est pas un corps.