الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
***
جامعة قاصدي مرباح ورقلة
كلية الرياضيات وعلوم المادة

مركز مسابقة الدخول للتكوين في الطور الثالث دكتوراه 2023/2022

مسابقة التكوين في الطور الثالث دكتوراه
ليوم السبت 28 جانفي 2023

Filière :	Mathématique	الشعبة:
Spécialité :	Analyse	التخصص:
Épreuve 1 :	*Analyse fonctionnelle et théorie des distributions*	الامتحان الأول:
Variante 1		الموضوع الأول
Coefficient : Un (01)		المعامل: واحد (01)
Horaire : à 13 : 00		التوقيت: على الواحدة زوالا
Durée : 01 h 30		المدة: ساعة ونصف(1سا و30د)

Exercice 1 (8 pts).
Soit $(X, \|.\|)$ un espace réflexif, et soit Z un ensemble non vide, convexe et fermé de X.

1. Montrer que, pour tout élément $x \in X$, il existe $y \in Z$ tel que
$$\|x - Y\| = \inf_{z \in Z} \|x - z\|.$$
2. Montrer que y est unique si $(X, \|.\|)$ est strictement convexe.

Un espace $(E, \|.\|_E)$ est dit strictement convexe si : $\forall u, v \in E$, avec $u \neq v$, $\|u\| = \|v\| = 1$ et $\forall t \in]0,1[$, on a : $\|tu + (1-t)v\| < 1$.

Exercice 2 (12 pts).

Partie I

Soit $\varphi : (x_1, x_2) \mapsto \varphi(x_1, x_2)$ une fonction de la classe de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$

1. Montrer que
$$\|\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_2}\|_2 = \|y_1 y_2 \widehat{\varphi}\|_2,$$
où la transformée de Fourier $\widehat{\varphi}$ de φ est définit par :
$$\widehat{\varphi}(y) = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-ix.y} \varphi(x) dx.$$
2. Obtenir une estimation du même type pour $\|\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2}\|_2$.

3. En déduire que

$$2\|\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1\partial x_2}\|_2 \le \|\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2^2}\|_2.$$

Partie II

Soit L l'opérateur de Sturm-Liouville suivant :

$$Lu = -\frac{d^2u}{dx^2}+q^2u,$$

où $q>0$ est une constante.

1. Trouver une solution particulière $E \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ (l'espace des distributions tempérées) de l'équation différentielle suivante :
$$LE = \delta_0.$$
2. Pour $f \in L^2(\mathbb{R})$, trouver toutes les solutions $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ de l'équation différentielle suivante :
$$Lu = f.$$

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
***
جامعة قاصدي مرباح ورقلة
كلية الرياضيات وعلوم المادة

مركز مسابقة الدخول للتكوين في الطورالثالث دكتوراه 2023/2022

مسابقة التكوين في الطور الثالث دكتوراه

ليوم السبت 28 جانفي 2023

Filière :	**Mathématique**	الشعبة:
Spécialité :	**Analyse**	التخصص:
Épreuve 2 :	***Espaces de Sobolev et méthode des éléments finis***	الامتحان الثاني:
Variante 1		الموضوع الأول
Coefficient: Trois (03)		المعامل: ثلاثة (03)
Horaire: à 15 : 00		التوقيت: على الثالثة زوالا
Durée: 02 h 00		المدة: ساعتان (2سا)

Exercice 1 (10 pts).

Trouver la bonne réponse et justifier votre choix. Pour chaque question il ya une seule réponse vraie.

Q1. Pour quelles valeurs de p la fonction $u :]-1,1[\longrightarrow \mathbb{R}$, définie par $u(x) = |x|$, est dans $W^{1,p}(]-1,1[)$?
(a) seulement pour $p = 1$.
(b) seulement pour $p = 1$ et $p = 2$.
(c) pour tout $p \in [1, \infty[$.
(d) pour tout $p \in [1, \infty]$. ✓
(e) aucun des cas précédents.

$|x_1 + x_2 + x_3 + \cdots|$

Q2. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $B = \left\{ x \in \mathbb{R}^n ; |x| < \frac{1}{2} \right\}$. Considérons la fonction $u_\alpha(x) = |\ln |x||^\alpha$ $(\alpha \in \mathbb{R})$. Quel est l'ensemble $A_n = \{\alpha \in \mathbb{R}$ dépendants de n : $u_\alpha \in W^{1,\infty}(B)\}$?
(a) $A_1 = \{0\}$, $A_2 =]-\infty, \frac{1}{2}[$, $A_n = \mathbb{R}$ si $n \geq 3$.
(b) $A_1 = \mathbb{R}$, $A_2 =]-\infty, \frac{1}{2}[$, $A_n = \{0\}$ si $n \geq 3$.
(c) $A_n =]-\infty, \frac{n}{2}[$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
(d) $A_n =]-\infty, 0]$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
(e) $A_n = \{0\}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

$f^{(m)} \in L^2$

Q3. Soit B la boule unité de $\mathbb{R}^4$ et $f \in H^m(B)$. Soit u la solution faible du problème :

$$\begin{cases} u \in H_0^1(B) \\ -\Delta u = f \text{ dans } B. \end{cases}$$

Quelle est la valeur minimale de $m \in \mathbb{N}$ qui garantit que u soit une solution classique dans $C^2(\overline{B})$?
(a) $m = 1$

Δu $\quad H_0^1 \hookrightarrow C^0(\overline{B})$. $\quad H^m(B) \hookrightarrow C^{m-2}(\overline{B})$

Δu

(b) $m = 2$
(c) $m = 3$
(d) $m = 4$
(e) aucun des cas précédents.

Exercice 2 (10 pts).
On considère le problème aux limites suivant :

$$\begin{cases} -\rho\omega^2 u - cu'' - e\phi'' = 0 & \text{dans } (0, L) \\ -eu'' + \varepsilon\phi'' = 0 & \text{dans } (0, L) \\ \phi(0) = 0 \\ \phi(L) = -2 \\ (cu' + e\phi')(0) = 0, \\ (cu' + e\phi')(L) = 0, \end{cases} \tag{1}$$

$]0, L[$

$cu'(0) + e\phi'(0) = 0$

$cu'(L) + e\phi'(L) = 0$

où

$$L > 0, \quad \rho > 0, \quad c > 0, \quad 0 < \varepsilon < 1, \quad e \in \mathbb{R}, \quad \text{et} \quad \omega \in \mathbb{C}$$

1. Trouver un relèvement[1] $\tilde{\phi} \in H_0^1(0, L)$ de ϕ. $\phi(0) = 0$; $\phi(L) = -2$
2. Reformuler le problème (1) sous la forme variationnelle :

$$\begin{cases} \text{Trouver } (u, \tilde{\phi}) \in H^1(0, L) \times H_0^1(0, L) \\ \quad a(u, v) + b(v, \tilde{\phi}) = F(v) \quad \forall v \in H^1(0, L) \\ \quad b(u, \psi) - d(\tilde{\phi}, \psi) = 0 \quad \forall \psi \in H_0^1(0, L) \end{cases} \tag{2}$$

avec des formes bilinéaires a, b et d et une forme linéaire F que l'on précisera.

3. i) Que signifie l'existence des solutions non triviales du problème (2) avec $F = 0$?
   ii) Pour :

$$F = 0, \quad \text{et} \quad \omega = \left\{ \frac{2\pi}{L} \sqrt{\frac{\tilde{c}}{\rho}}\, n \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \right\} \quad \text{où} \quad \tilde{c} := c + \frac{e^2}{\varepsilon}.$$

   Trouver des solutions non triviales du problème (2).

4. Pour la suite, on suppose que $\omega = \sqrt{2}\, i$. Montrer que le problème (2) pour ce choix est bien posé.
5. Soient V_h et M_h deux espaces de dimension finie satisfont : $V_h \subset H^1(0, L)$ et $M_h \subset H_0^1(0, L)$. On considère le problème discret (du problème après relèvement) :

$$\begin{cases} \text{Trouver } (u_h, \tilde{\phi}_h) \in V_h \times M_h \\ \quad a(u_h, v_h) + b(v_h, \tilde{\phi}_h) = F(v_h) \quad \forall v_h \in V_h \\ \quad b(u_h, \psi_h) - d(\tilde{\phi}_h, \psi_h) = 0 \quad \forall \psi_h \in M_h \end{cases} \tag{3}$$

   Montrer que le problème discret (3) est bien posé et donner une estimation d'erreur entre $(u_h, \tilde{\phi}_h)$ et $(u, \tilde{\phi})$ par rapport à la norme $\|(\cdot, \cdot)\|_{H^1(0,L) \times H_0^1(0,L)}$.

---

1. i.e, $\tilde{\phi}(x) = \phi(x) - \alpha x - \beta$, avec $\tilde{\phi}(0) = \tilde{\phi}(L) = 0$

$\|u - u_h\| \leq c \inf \|u - v_h\|$