Université Abdelhamid Ibn Badis-Mostaganem		
Faculté Des Sciences Exactes et de l'Informatique		Département de Mathématiques Informatique
Filière : Mathématiques Date : 28 janvier 2023	Concours D'accés à la Formation de Troisième cycle (Doctorat LMD)	Spécialité : EDP et Applications Durée : 2h

Epreuve de : Distributions et EDP **Sujet 3**

Exercice 1 :(6 Points) On considère l'équation aux dérivées partielles suivante d'inconnue $u : \mathbb{R} \times [0, +\infty[\to \mathbb{R}$

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 = 0 ..... (D)$$

1. Montrer qu'en posant $v = e^u$ i.e $v(x,t) = \exp(u(x,t))$, l'équation (D) se ramène à,

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} ..... (H)$$

2. De quel type est l'équation (H)?
3. Déterminer, par la méthode de séparation des variables, les solutions bornées de l'équation (H).
4. En déduire une classe de solutions de (D).

Exercice 2 :(04 points)
En coordonnées polaires (r, θ) l'équation de Laplace est donnée par

$$r^2 \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + r \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0,$$

et sa solution, pour une région circulaire, est définie par

$$u(r, \theta) = A_0 + \alpha_0 \ln r + \sum_{n \geqslant 1} \left[\left(A_n r^n + \alpha_n r^{-n}\right) \cos(n\theta) + \left(B_n r^n + \beta_n r^{-n}\right) \sin(n\theta) \right]$$

Déterminer l'expression de u pour le disque unité du plan telle que

$$u(1, \theta) = 1 - \cos(2\theta), \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi.$$

Exercice 3 :(10 points)
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$.

I. 1. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ \forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \sum_{k=0}^{k=n} \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(0) + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt.$$

2. Déduire qu'il existe une fonction $\psi \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ que l'on précisera, telle que

$$\psi(0) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(0) \quad \text{et} \quad \sup_{x \in [0,1]} |\psi(x)| \leq K \sup_{x \in [0,1]} \left|f^{(n+1)}(x)\right|.$$

II. Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ et $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ on pose

$$\langle T_{\lambda,k}, \varphi\rangle = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(\lambda x)}{x^k}\left(\varphi(x) - \sum_{i=0}^{i=k-1} \varphi^{(i)}(0)\frac{x^i}{i!}\right) dx.$$

1. Montrer que $T_{\lambda,k}$ est une distribution d'ordre inférieur ou égal à k.
2. Soit ρ une fonction de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ telle que $\rho(0) = 1$ et $\rho'(0) = 0$.

   a. Montrer que :

$$\left\langle T_{1,1}, \frac{\varphi(x) - \varphi(0)\rho(x)}{x}\varphi\right\rangle = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x)}{x}\left(\frac{\varphi(x) - \varphi(0)\rho(x)}{x} - \varphi'(0)\right) dx.$$

   b. Déduire que :

$$\left\langle T_{1,1}, \frac{\varphi(x) - \varphi(0)\rho(x)}{x}\varphi\right\rangle = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\left(\frac{\varphi(x) - \varphi(0) - x\varphi'(0)}{x^2}\right) dx + J,$$

   où J est une intégrale que l'on déterminera.

   c. Montrer que $J = C_1\varphi(0)$.

3. Trouver toutes les solutions dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ de l'équation $x.T = T_{1,1}$.

Faculté Des Sciences Exactes et de l'Informatique		Département de Mathématiques Informatique
Filière : Mathématiques Date : 28 janvier 2023	Concours D'accés à la Formation de Troisième cycle (Doctorat LMD)	Spécialité : EDP et Applications Durée : 1h30mn

Epreuve de : Analyse mathématiques **Sujet 3**

Exercice 1 : (10 points)

On rapelle la proprieté fondamentale suivante :

Si un espace métrique complet est une réunion dénomrable de fermés alors, au moins l'un de ces fermés est d'intérieur non vide (c'est à dire contient au moins une boule ouverte).

Soit $\mathcal{P}$ le plan usuel muni de la métrique euclidienne :

$$d(x,y) = \sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}$$

1. Montrer que pour tous réels a, b, c, la fonction

$$\begin{array}{rccc} f_{a,b,c}: & \mathcal{P} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & f_{a,b,c}(x,y) = ax+by+c \end{array}$$

est continue.

2. Montrer que dans $\mathcal{P}$, toute droite est un fermé.
3. En déduire que $\mathcal{P}$ ne peut pas s'écrire comme réunion dénomrable de droites.

Exercice 2 : (10 points)

Soit E l'ensemble des suites complexes $x=(x_n)_n$ telles que la série $\sum_{n\geq 0} n!\,|x_n|$ soit convergente.

On pose

$$\|x\| = \sum_{n\geq 0} n!\,|x_n|.$$

a) Montrer que $(E, \|.\|)$ est un espace vectoriel normé.

b) Soit la fonction $f : \ell^1 \longrightarrow E$ définie par $f(x_n) = \left(\frac{x_n}{n!}\right)_n$

Montrer que f est bien définie, linéaire, bijective et caluler sa norme.

c) La fonction f est-elle continue ?

d) En déduire que E est un espace de Banach.