الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التعليم العالي و البحث العلمي

جامعة محمد البشير الإبراهيمي - برج بوعريريج

نيابة مديرية الجامعة للتكوين العالي في الطور الثالث والتأهيل الجامعي والبحث العلمي والتكوين فيما بعد التدرج

كلية الرياضيات والإعلام الآلي

مسابقة الالتحاق بالتكوين في الطور الثالث (دكتوراه ل م د) شعبة : رياضيات

التاريخ: السبت 28 جانفي 2023

المدة : ساعة ونصف - 1 سا 30 د

Spécialité :	Algèbre et Mathématiques Discrètes, Systèmes Dynamiques et Applications, Mathématiques Appliquées	التخصص :
Epreuve 1 :	Analyse	الامتحان الأول:

Sujet N° 2

Exercice 1 (7 pts)

Développer en série de Fourier la fonction f de période 2π et définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \forall x \in [-\pi, 0[\\ 0 & \forall x \in [0, \pi[\end{cases}$$

Exercice 2 (6 pts)

Soit $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $0 < a < b$ et f une fonction continue de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ où l'intégrale généralisée $\int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t} dt$ converge.

1. Citer la première formule de la moyenne.
2. Monter que $\forall u > 0$: $\int_u^{+\infty} \frac{f(bx) - f(ax)}{x} dx = \int_{bu}^{au} \frac{f(t)}{t} dt.$
3. En déduire que $\int_0^{+\infty} \frac{f(bx) - f(ax)}{x} dx = f(0). \ln \frac{a}{b}.$
4. Calculer $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x} - e^{-2x}}{x} dx.$

Exercice 3 (7 pts)

Soit u un nombre réel, on considère la fonction $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - \frac{1}{1 + ux^2 + y^2}$.

1. Préciser le domaine de définition de la fonction f.
2. Montrer que $x^2 + xy + y^2 > 0$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.
3. En utilisant les conditions d'optimalité, déterminer toutes les valeurs de u pour lesquelles le point $(0, 0)$ est un minimum local strict.
4. Parmi ces valeurs, préciser celles qui font de $(0, 0)$ un minimum global strict.

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي
جامعة محمد البشير الإبراهيمي - برج بوعريريج

نيابة مديرية الجامعة للتكوين العالي في الطور الثالث والتأهيل الجامعي والبحث العلمي والتكوين فيما بعد التدرج
كلية الرياضيات والإعلام الآلي

مسابقة الالتحاق بالتكوين في الطور الثالث (دكتوراه ل م د) شعبة : رياضيات

التاريخ : السبت ٢٨ جانفي ٢٠٢٣ | المدة : ساعتان - ٢ سا

Spécialité :	Mathématiques Appliquées	التخصص :
Épreuve 2 :	Analyse Fonctionnelle et Calcul Stochastique	الإمتحان الثاني:

Sujet N°: 2

Exercice 1

Soit $E = C([0,\pi],\mathbb{R})$ munit de la norme $\|\cdot\|_\infty$. On définit
$$F = \{f \in C^1([0,1]) : \ f(0) = 0\},$$
muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$.

1. On considère l'opérateur de Volterra:
$$\begin{aligned} T : E &\longrightarrow F \\ f &\longrightarrow Tf \end{aligned} \quad \text{où} \quad \begin{aligned} Tf : [0,1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto Tf(x) = \int_0^x f(t)dt. \end{aligned}$$

   Montrer que T est une application linéaire continue de $(E, \|\cdot\|_\infty)$ vers $(F, \|\cdot\|_\infty)$. Calculer sa norme $\|T\|_{\mathcal{L}(E,F)}$.

2. On définit l'opérateur linéaire S par:
$$\begin{aligned} S : F &\longrightarrow E \\ g &\longmapsto Sg = g' \end{aligned}$$

   i) Montrer que S n'est pas borné.

   ii) Déduire que l'espace F n'est pas un espace de Banach.

   iii) Conclure que l'espace $C^1([0,1])$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$ n'est pas un espace de Banach.

Exercice 2

1. Soient X, Y deux espaces normés et $L : X \to Y$ un opérateur linéaire . Montrer l'équivalence suivante:
   (i) Le graphe $Gr(L)$ de L est fermé.
   (ii) Si $(x_n)_n$ est une suite de X telle que $x_n \to 0$ et $(Lx_n)_n$ converge vers y, alors $\lim_{n\to\infty} Lx_n = 0$.

2. Soit H un espace de Hilbert et $T : H \to H$ un opérateur linaire symétrique, c'est-à-dire
$$< Tx, y >=< x, Ty >, \quad \forall x, y \in H.$$

   Montrer que T est continu.

3. Soient X, Y et Z des espaces de Banach.
   Supposons que $S : X \to Y$ est linéaire, que $J : Y \to Z$ est linéaire, borné et injective, et que $JS = J \circ S : X \to Z$ est borné. Montrer que S est encore borné.

✍ Exercice 3

Soit $\{B_t\}_{t\geq 0}$ un mouvement Brownien standard construit sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, \mathcal{P})$.

1. Soit X une variable aléatoire normale centré, de variance σ^2. Montrer que:

$$E(e^X) = e^{\sigma^2/2}.$$

2. Soit $h : [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction indépendante de $\mathcal{B}_t$. Pour $t \in [0,T]$, on pose

$$Y_t = \int_0^t h(s) d\mathcal{B}_s$$

i) Calculer $E(Y_t))$ et $var(Y_t)$, on précisera les hypothéses faites sur la fonction h.

ii) Montrer que

$$M_t = \exp\left(Y_t - \frac{1}{2}\int_0^t h^2(s)ds\right)$$

est une martingale [Un processus $(M_t, t \geq 0)$ est une $\mathcal{F}_t$ martingale si: a) (M_t) est un processus $\mathcal{F}_t$ adapté, b) si pour tout $t \geq 0$, (M_t) est intégrable, c) pour tout $s \leq t$, $E(M_t|\mathcal{F}_s) = M_s$].

iii) Démontrer l'inégalit suivante: Pour tout $\alpha > 0$,

$$P\left\{\sup_{0\leq s\leq t} Y_s > \alpha\right\} \leq \exp\left\{-\frac{\alpha^2}{2g(t)}\right\}$$

où $g(t) = \int_0^t h^2(s)ds$.