الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

Université Ferhat Abbas, Sétif 1
Faculté des Sciences

جامعة فرحات عباس، سطيف 1
كلية العلوم

Concours national d'accès au Doctorat au titre de l'année 2022-2023

Filière : Mathématiques

Toutes les spécialités (Epreuve commune)

Epreuve de : Algèbre Linéaire

Exercice 01 ***(6pts)*** Soient E un espace vectoriel et u, v, f, g quatre endomorphismes de E qui deux à deux commutent, et vérifient $u \circ f + v \circ g = id_E$.

1. Montrer que: $\mathrm{Ker} f \cap \mathrm{Ker} g = \{0\}$ et $E = \mathrm{Im} f + \mathrm{Im} g$.
2. Montrer que: $\mathrm{Ker}(f \circ g) = \mathrm{Ker} f \oplus \mathrm{Ker} g$ et $\mathrm{Im}(f \circ g) = \mathrm{Im} f \cap \mathrm{Im} g$.
3. On suppose de plus que $f \circ g = 0$.
   Montrer que: $E = \mathrm{Ker} f \oplus \mathrm{Ker} g = \mathrm{Im} f \oplus \mathrm{Im} g$, $\mathrm{Ker} f = \mathrm{Im} g$, $\mathrm{Ker} g = \mathrm{Im} f$.

Exercice 02 ***(7pts)***

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tel que $|a| \neq |b|$. On considère la matrice carrée de taille $2n$ suivante :

$$A = \begin{pmatrix} a & b & a & b & \cdots\cdots \\ b & a & b & a & \cdots\cdots \\ a & b & a & b & \cdots\cdots \\ b & a & b & a & \cdots\cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

SAHLA MAHLA
المصدر الأول للطالب الجزائري

1. Calculer le rang de A. En déduire que si $n > 1$, alors 0 est une valeur propre de A et déterminer la dimension du sous-espace propre associé.
2. Déterminer deux vecteurs propres associés à deux autres valeurs propres. En déduire que A est diagonalisable.

Exercice 03 ***(7pts)***

Notons $\mathbb{R}[X]_d$ l'espace vectoriel des applications polynômiales de degré inférieur ou égal à d.
Dans ce qui suit les coordonnées seront relative à la base canonique B_d de $\mathbb{R}[X]_d$.

1. Soit f l'application de $\mathbb{R}[X]_4$ dans $\mathbb{R}[X]_3$ qui à une application polynômiale P associe sa dérivée P'.
   a. Prouver que l'application f est linéaire.
   b. Donner la matrice de f dans les bases B_4 et B_3.
2. Soit g l'application linéaire de $\mathbb{R}[X]_3$ dans $\mathbb{R}[X]_4$ définie par: $g(P) = XP$
   Donner la matrice de g dans les bases B_3 et B_4.
3. Donner la matrice de $g \circ f$ dans la base B_4.
4. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Discuter suivant la valeur de λ la dimension du noyau de l'application linéaire $g \circ f - \lambda\, id_{\mathbb{R}[X]_4}$.

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

Université Ferhat Abbas, Sétif 1
Faculté des Sciences

جامعة فرحات عباس، سطيف 1
كلية العلوم

Concours national d'accès au Doctorat au titre de l'année 2022-2023
Filière : Mathématiques
Spécialité : Optimisation et contrôle

Epreuve de : Optimisation

Exercice 1 (4 pts) :

Le problème des moindres carrées linéaire consiste à minimiser la fonction $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \|Ax - b\|^2$.
Où $\|.\|$ désigne la norme euclidienne canonique sur $\mathbb{R}^n$, A une matrice réelle de taille (m, n) et $b \in \mathbb{R}^m$.

1. Donner les expressions du gradient et de la matrice hessienne de f.
2. En considérant la décomposition du vecteur b suivant F et $F^{\perp}$ où $F = Im(A) = \{Ax, x \in \mathbb{R}^n\}$, montrer que f admet au moins un point critique.
3. Montrer que f est convexe et déduire que f admet au moins un minimum.

Exercice 2 (6 pts) :

Soit le programme quadratique suivant :

$$(P)\begin{cases} \min f(x) = 9x_1^2 + 6x_2^2 - 4x_1x_2 - 60x_1 - 20x_2 \\ x_1 + 2x_2 \leq 5 \\ x_1 + 4x_2 \leq 8 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \end{cases}, \qquad x = (x_1, x_2)^t \in \mathbb{R}^2.$$

1. Montrer que le problème (P) admet une solution unique x^*.
2. Etudier la qualification des contraintes.
3. Trouver le dual de (P).
4. En utilisant la méthode de Dantzig, déterminer la solution x^* du problème (P) et donner la valeur minimale.

Exercice 3 (10 pts) :

Soit $\mathbb{R}^n$ muni de son produit scalaire usuel $\langle .,. \rangle$ et de la norme euclidienne $\|.\|$ associée.
On considère l'ensemble $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n, \|x\| < 1\}$ et la fonction :

$$f_a: \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto f_a(x) = -ln(1 - \|x\|^2) + \langle a, x \rangle, \quad a \in \mathbb{R}^n$$

1. Montrer que f_a est strictement convexe sur Ω.
2. Soit le problème d'optimisation :

$$(P_a)\begin{cases} min f_a(x) \\ x \in C_a \end{cases},$$

où $C_a = \left\{x \in \mathbb{R}^n, \|x\| \leq \frac{1}{2} \quad et \quad \langle a, x \rangle \leq 0\right\}$.

i. Résoudre (P_a), pour $a = 0$

ii. Résoudre (P_a), pour $a \neq 0$

SAHLA MAHLA
المصدر الأول للطالب الجزائري