Samedi 04 Février 2023

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université frères Mentouri Constantine 1
Faculté des Sciences Exactes - Département de Mathématiques

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة الإخوة منتوري قسنطينة 1
كلية العلوم الدقيقة - قسم الرياضيات

Concours d'accès à la Formation de Doctorat $3^{ème}$ Cycle pour l'année universitaire 2022/2023

Filière : Mathématiques

Épreuve commune : Analyse et Topologie

Durée : 01 heure 30

Exercice 1. (10 pts)

1. Démontrer les inégalitées suivantes :

$$0 \leq -1 - x + \exp(x) \leq 2x^2, \; x \in [0,1].$$

2. Soit $\sum_{n\geq 1} f_n(x)$ une série de fonctions, telle que

$$f_n(x) = -1 + \exp(a^{-nx}), \; n \geq 1, \; a \in]1, +\infty[\text{ et } x \in \mathbb{R}.$$

2. 1. Trouver l'ensemble de réels D pour lesquels la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n(x)$ soit convergente.

2. 2. Soit δ un nombre réel strictement positif. Justifier la convergence uniforme de la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n(x)$ sur l'intervalle $[\delta, +\infty[$.

2. 3. Soit $S(x) = \sum_{n\geq 1} f_n(x)$. Justifier la continuité de S sur D.

2. 4. Donner un équivalent pour $S(x)$, quand $x \to +\infty$.

2. 5. Calculer de deux méthodes différentes $\lim_{x\to+\infty} S(x)$.

Exercice 2. (10 pts)

On désigne par $E = \mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels, et par F le sous-espace de E constitué des polynômes nuls en 0. T est l'application linéaire définie de E dans E par :

$$P \longmapsto T(P) \;/\; T(P)(x) = xP'(x).$$

1. Montrer que T n'est pas continue quelque soit la norme N choisie sur E.

2. Montrer que T est une bijection de F dans F.

3. Montrer que T^{-1} est continue sur (F, N_1), N_1 est la norme donnée pour tout $P \in E$ par :

$$N_1(P) = \sum_{k=0}^{n} |a_k|, \text{où } P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k.$$

4. Calculer $\|T^{-1}\|$ dans $L((F,N_1),(F,N_1))$ l'espace des applications linéaires continues de F dans F.

5. On note N_2 la norme définie sur E par :

$$N_2(P) = \sup_{x\in[0;1]} |P(x)|, \; \forall P \in E.$$

6 Montrer que pour tout $P \in E$ on a $N_2(P) \leq N_1(P)$; et qu' il n'existe pas de constante $C > 0$ telle que $N_1(P) \leq CN_2(P)$.

7. Soit A_α, $\alpha \in \mathbb{R}$, l'application linéaire définie de E dans $\mathbb{R}$ par

$$A_\alpha : P \longmapsto A_\alpha(P) = P(\alpha).$$

Montrer que A_α est continue sur (E, N_2), si et seulement si, $\alpha \in [0,1]$.

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université frères Mentouri Constantine 1
Faculté des Sciences Exactes - Département de Mathématiques

Samedi 04 Février 2023

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة الإخوة منتوري قسنطينة 1
كلية العلوم الدقيقة - قسم الرياضيات

Concours d'accès à la Formation de Doctorat 3ème Cycle pour l'année universitaire 2022/2023

Filière : Mathématiques

Spécialité : Mathématiques Appliquées

Épreuve : Équations différentielles ordinaires - Équations aux dérivées partielles.

Durée : 02 heures

PARTIE A : E.D.O.

Exercice 1. (5 pts)
Soit l'équation différentielle :

$$2tyy' + 2t + y^2 = 0 \qquad t \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

(1) Ecrire (1) sous la forme différentielle de degré 1 :

$$P(t,y)dt + Q(t,y)dy = 0, \tag{2}$$

où $P(t,y)$ et $Q(t,y)$ sont deux fonctions définies de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}$ à déterminer.
(2) Montrer que $P(t,y)$ et $Q(t,y)$ sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.
(3) Montrer que (2) est exacte, puis résoudre l'équation (1) avec la condition initiale : $y(1) = 0$.

Exercice 2. (5 pts)

1. Résoudre l'équation différentielle

$$xy' + 2y = \frac{x}{1+x^2} \quad \text{sur } \mathbb{R}_+^* \text{ et sur } \mathbb{R}_-^*. \tag{1}$$

2. Montrer que (1) possède une unique solution f de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.
3. Calculer $\int_0^1 f(x)\,dx$.

PARTIE B : E.D.P.

Exercice 3. (6 pts)

Soit donnée l'EDP du second ordre :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2y\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + y\frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

(1) Quel est le type de cette EDP ?
(2) Déterminer la forme canonique de cette EDP.
(3) Trouver la forme générale des solutions $u(x, y)$ de cette EDP.

Exercice 4. (4 pts)

Soit f une fonction de classe C^1 définie de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ et vérifiant

$$f(x+t\ ,\ y+t) = f(x\ ,\ y)\ ,\ \forall (x\ ,\ y\ ,\ t) \in \mathbb{R}^3.$$

1- Montrer que f vérifie l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x\ ,\ y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x\ ,\ y) = 0\ ,\ \forall (x\ ,\ y) \in \mathbb{R}^2.$$

2- Pour le changement de variables suivant $u = x + y$, $v = x - y$ on pose $F(u\ ,v) = f(x\ ,\ y)$

a) Montrer que $\dfrac{\partial F}{\partial u}(u\ ,\ v) = 0$.

b) Déduire que $f(x\ ,\ y) = g(x\ -\ y)$, où g est une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.