الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

Université Ferhat Abbas, Sétif 1
Faculté des Sciences

جامعة فرحات عباس، سطيف 1
كلية العلوم

Concours national d'accès au Doctorat au titre de l'année 2022-2023

Filière : Mathématiques

Toutes les spécialités (Epreuve commune)

Epreuve de : Algèbre Linéaire

Exercice 01 ***(6pts)*** Soient E un espace vectoriel et u, v, f, g quatre endomorphismes de E qui deux à deux commutent, et vérifient $u \circ f + v \circ g = id_E$.

1. Montrer que: $\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Ker} g = \{0\}$ et $E = \operatorname{Im} f + \operatorname{Im} g$.
2. Montrer que: $\operatorname{Ker}(f \circ g) = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Ker} g$ et $\operatorname{Im}(f \circ g) = \operatorname{Im} f \cap \operatorname{Im} g$.
3. On suppose de plus que $f \circ g = 0$.
   Montrer que: $E = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Ker} g = \operatorname{Im} f \oplus \operatorname{Im} g$, $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Im} g$, $\operatorname{Ker} g = \operatorname{Im} f$.

Exercice 02 ***(7pts)***

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tel que $|a| \neq |b|$. On considère la matrice carrée de taille $2n$ suivante :

$$A = \begin{pmatrix} a & b & a & b & \ldots\ldots \\ b & a & b & a & \ldots\ldots \\ a & b & a & b & \ldots\ldots \\ b & a & b & a & \ldots\ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

SAHLA MAHLA
المصدر الاول للطالب الجزائري

1. Calculer le rang de A. En déduire que si $n > 1$, alors 0 est une valeur propre de A et déterminer la dimension du sous-espace propre associé.
2. Déterminer deux vecteurs propres associés à deux autres valeurs propres. En déduire que A est diagonalisable.

Exercice 03 ***(7pts)***

Notons $\mathbb{R}[X]_d$ l'espace vectoriel des applications polynômiales de degré inférieur ou égal à d.
Dans ce qui suit les coordonnées seront relative à la base canonique B_d de $\mathbb{R}[X]_d$.

1. Soit f l'application de $\mathbb{R}[X]_4$ dans $\mathbb{R}[X]_3$ qui à une application polynômiale P associe sa dérivée P'.
   a. Prouver que l'application f est linéaire.
   b. Donner la matrice de f dans les bases B_4 et B_3.
2. Soit g l'application linéaire de $\mathbb{R}[X]_3$ dans $\mathbb{R}[X]_4$ définie par: $g(P) = XP$
   Donner la matrice de g dans les bases B_3 et B_4.
3. Donner la matrice de $g \circ f$ dans la base B_4.
4. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Discuter suivant la valeur de λ la dimension du noyau de l'application linéaire $g \circ f - \lambda\, id_{\mathbb{R}[X]_4}$.

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

Université Ferhat Abbas, Sétif 1
Faculté des Sciences

جامعة فرحات عباس، سطيف 1
كلية العلوم

Concours national d'accès au Doctorat au titre de l'année 2022-2023

Filière : Mathématiques

Spécialité : Mathématiques appliquées

Epreuve de : Analyse fonctionnelle et problèmes aux limites

Exercice 1 (6 pts):

Soit $H = L^2[0,1]$ et $T : H \longrightarrow H$ définie par

$$Tf(x) = \int_0^x (x-t)f(t)dt$$

1) Montrer que $\|T\| < 1$ et que pour $n \geqslant 1$,

$$T^n f(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^{(2n-1)}}{(2n-1)!} f(t)dt,$$

où $T^n = T \circ T \circ ... \circ T$.

2) Résoudre l'équation intégrale, avec $g \in H$ donnée et $f \in H$ l'inconnue

$$f(x) = g(x) + \int_0^x (x-t)f(t)dt$$

Indication: $(I-T)^{-1} = \sum_{n\geqslant 0} T^n$ si $\|T\| < 1$.

Exercice 2 (6 pts):

Soit H un espace Hilbertien et A un opérateur linéaire continu tel que: $\|A\| \leqslant 1$.
On considère l'ensemble

$$E = \{x \in H : Ax = x\}.$$

1) Montrer que E est un sous-espace vectoriel fermé de H.

2) On note par A^* l'adjoint de A, montrer que $\|x\|^2 = < x, A^*x >$, $\forall x \in E$.

3) En déduire que:

i) $\|A^*x\| = \|x\|$, $\forall x \in E$.
ii) $A^*x = x$, $\forall x \in E$.
iii) $E = Ker(I - A^*)$.

SAHLA MAHLA
المصدر الأول للطالب الجزائري

4) Montrer que $[(I-A)(H)]^{\perp}=E$ (Indication:$(ImA)^{\perp}=KerA^{*}$).

Exercice 3 (8 pts):

Soit le problème suivant :

$$(P)\begin{cases}\cos(x)\,u''(x)-\sin(x)\,u'(x)-xu(x)=1, x\in I=\left]0;\frac{\pi}{6}\right[\\ u'(0)=-u(0)\,,u\left(\frac{\pi}{6}\right)=0.\end{cases}$$

1) Montrer qu'il existe $C_p>0$ tel que:

$$\|w\|_{L^2\left(\left]0;\frac{\pi}{6}\right[\right)}\leqslant C_p\left\|\frac{d}{dx}w\right\|_{L^2\left(\left]0;\frac{\pi}{6}\right[\right)},\forall w\in H^1\left(\left]0;\frac{\pi}{6}\right[\right)\text{ et }w\left(\frac{\pi}{6}\right)=0.$$

2) Écrire la formulation variationelle du (P), c'est à dire trouver un espace vectoriel H (ainsi le produit scalaire), une forme bilinéaire $a:H\times H\longrightarrow\mathbb{R}$ et une forme linéaire $L:H\longrightarrow\mathbb{R}$ de telle sorte que toute solution u de (P) satisfasse la formulation variationnelle suivante :

$$(P_V)\begin{cases}\text{Trouver } u\in H,\\ a(u;v)=L(v)\,,\forall v\in H.\end{cases}$$

3) Discuter le résultat d'existence et d'unicité de (P_V).

4) Déterminer les estimations pour la stabilité de la solution de (P_V).

SAHLA MAHLA
المصدر الاول للطالب الجزائري