الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

Ministère de l'Enseignement Supérieur et
de la Recherche Scientifique
École Normale Supérieure Cheikh Mohamed
El Bachir El Ibrahimi Kouba – Alger
Département de Mathématiques

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
المدرسة العليا للأساتذة الشيخ محمد
البشير الإبراهيمي –القبة – الجزائر
قسم الرياضيات

Concours d'accés à la formation doctorale de l'année universitaire 2022 – 2023
Filière Mathématiques – Épreuve commune (Coefficient: 01)

Durée: 01h 30 | **Sujet 01** | Jeudi 09 Février 2023

Exercice 1 (Analyse):(07pts)

1. Soit $r \in]-1,1[$. On pose pour $x \in \mathbb{R}$: $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{r^n \cos(nx)}{n}$.
   Montrer que f est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$.

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. On pose pour $r \in]-1,1[$: $g(r) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{r^n \cos(nx)}{n}$.
   (a) Montrer que g est de classe C^1 sur $]-1,1[$.
   (b) Montrer que $g'(r) = \dfrac{\cos x - r}{1 - 2r\cos x + r^2}$ et calculer $g(r)$ pour $r \in]-1,1[$.

3. En déduire:
$$I = \int_{-\pi}^{\pi} \ln\left(1 - 2r\cos x + r^2\right) dx = -2\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\int_{-\pi}^{\pi} \frac{r^n \cos(nx)}{n} dx\right);$$
   ainsi que la valeur de l'intégrale I.

Exercice 2 (Analyse):(03pts)

1. Montrer que les intégrales généralisées suivantes sont convergentes
$$I = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^4+1} \quad \text{et} \quad J = \int_0^{+\infty} \frac{t^2 dt}{t^4+1}.$$
2. Montrer que $I = J$, puis calculer la valeur de $2I$.
3. En déduire la valeur de l'intégrale $K = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(t^4+1)^2}$.

Exercice 3 (Algèbre):(10pts)

Soit n un entier naturel, un polynôme de Tchebychev est le polynôme noté T_n tel que
$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \ T_n(cos\theta) = \cos(n\theta).$$

1. Existence et unicité:
   (a) Montrer l'existence et l'unicité des polynômes de Tchebychev dans $\mathbb{R}[X]$.
   (b) Écrire $T_{n+1}(x)$ en fonction de $T_n(x)$, $T_{n-1}(x)$ et de x.
   (c) Donner T_0, T_1 , T_2 et T_3.

2. Donner le degré de T_n, le coefficient dominant et les racines de T_n.

3. On définit le produit scalaire sur $\mathbb{R}_m[X]$, $m \geq 0$ par
$$< P, Q >= \int_{-1}^{1} P(x)Q(x)\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx, \quad P, Q \in \mathbb{R}_m[X].$$
   (a) Donner suivant les valeurs de m', n le produit scalaire $< T_n, T_{m'} >$.
   (b) En déduire que la famille des polynomes de Tchebychev de degré inférieur ou égale à m forme une base de $\mathbb{R}_m[X]$.

مسابقة الإلتحاق بالتكوين في الدكتوراه بعنوان السنة الجامعية 2022 – 2023
شعبة الرياضيات – الإمتحان المشترك (المعامل 01)

المدة: ساعة ونصف | الموضوع الأوّل | الخميس 09 فيفري 2023

التمرين الأول (07pts)

1. ليكن $r \in]-1,1[$. نضع من أجل كل $x \in \mathbb{R}$: $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{r^n \cos(nx)}{n}$.
بيّن أن f معرف ومستمر على $\mathbb{R}$.

2. ليكن $x \in \mathbb{R}$. نضع من أجل كل $r \in]-1,1[$, $g(r) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{r^n \cos(nx)}{n}$

(ا) بين أن g من الصنف C^1 على $]-1,1[$.

(ب) بين أن $g'(r) = \dfrac{\cos x - r}{1 - 2r\cos x + r^2}$ وأحسب $g(r)$ من أجل كل $r \in]-1,1[$.

3. إستنتج أنّ

$$I = \int_{-\pi}^{\pi} \ln\left(1 - 2r\cos x + r^2\right) dx = -2\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\int_{-\pi}^{\pi} \frac{r^n \cos(nx)}{n} dx\right);$$

وأحسب قيمة التكامل I.

التمرين الثاني (03pts)

1. بين أن التكاملين الموسعين التاليين متقاربان: $J = \int_0^{+\infty} \frac{t^2 dt}{t^4+1}$ $I = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^4+1}$

2. بين أن $I = J$ ثم أحسب قيمة $2I$

3. إستنتج قيمة التكامل $K = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(t^4+1)^2}$

التمرين الثالث (10pts)

ليكن n عدد طبيعي، نسمي كثير حدود تشيبيشاف كثير الحدود التالي

$$\forall \theta \in \mathbb{R},\ T_n(cos\theta) = \cos(n\theta).$$

1. الوجود والوحدانية:

(ا) بين وجود ووحدانية كثير حدود تشيبيشاف في $\mathbb{R}[X]$

(ب) أكتب $T_{n+1}(x)$ بدلالة $T_n(x)$ ، $T_{n-1}(x)$ و x.

(ج) أحسب T_0 ، T_1 ، T_2 و T_3. .

2. أوجد درجة كثير الحدود T_n ثم عين معامله المهيمن وكذا جذوره.

3. نعرف على $\mathbb{R}_m[X]$ $\quad m \geq 0$ الجداء السلمي بـ

$$< P, Q >= \int_{-1}^{1} P(x)Q(x)\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx, \quad P, Q \in \mathbb{R}_m[X]$$

(ا) أوجد حسب قيم n و n' الجداء السلمي $< T_n, T_{n'} >$

(ب) استنتج أن عائلة كثيرات حدود تشيبيشاف ذات الدرجة أقل أو تساوي m تشكل أساسا للفضاء الشعاعي $\mathbb{R}_m[X]$.

مسابقة الإلتحاق بالتكوين في الدكتوراه بعنوان السنة الجامعية 2022 – 2023 (موضوع 02)

التمرين الأول [7 ن] I) ليكن $(X, \mathcal{A}, \mu)$ فضاء مقاسا و f تابعا معرفا من X نحو $\mathbb{R}$ ويحقق $f \in \mathcal{L}^{p_1}(X, \mu) \cap \mathcal{L}^{p_2}(X, \mu)$ حيث p_1 و p_2 عددين حقيقيين مع $1 < p_1 < p_2 < \infty$.

1) بيّن، من أجل كل $p \in [p_1, p_2]$، أن $\forall x \in X, \ |f(x)|^p \leq |f(x)|^{p_1} + |f(x)|^{p_2}$.
(يمكن اعتبار حالتين، حالة $1 \leq |f(x)|$ وحالة $1 > |f(x)|$). استنتج أن $\forall p \in [p_1, p_2], \ f \in \mathcal{L}^p(X, \mu)$.

2) لنعتبر التابع $\varphi : [p_1, p_2] \to \mathbb{R}_+$ المعرف من أجل كل $p \in [p_1, p_2]$ بـ $\varphi(p) = \int_X |f(x)|^p d\mu$.
مستعملا مبرهنة التقارب بالهيمنة للوبيغ، بيّن أن φ مستمر على $]p_1, p_2[$.

II) ليكن η قياس موجب على $(\mathbb{R}, \ B(\mathbb{R}))$ ويحقق $\eta(]0, +\infty[) > 0$، حيث $B(\mathbb{R})$ هي العشيرة البوريلية المولدة بالطوبولوجيا الاعتيادية. بيّن وجود عددين حقيقيين $0 < a < b$ بحيث أن $\eta([a, b]) > 0$.

التمرين الثاني [5 ن]

I) لتكن $(f_n)_n$ متتالية توابع معرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f_n(x) = \dfrac{nx}{1 + nx^2}$. بين أن المتتالية (f_n) متقاربة في الفضاء $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ نحو توزيع والذي يطلب تعيينه.

II) لنعتبر الشكل الخطي $T : C_0^\infty(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ المعطى بـ :

$$T : \varphi \mapsto \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{k}} \left(\varphi\left(\frac{1}{k}\right) - \varphi\left(-\frac{1}{k}\right) \right).$$

1) بين أن T توزيع من الرتبة 1.

2) بين أن حامل T هو $S = \{0\} \cup \left\{ \dfrac{1}{k}, k \in \mathbb{Z}^* \right\}$.

إرشاد: بالنسبة لـ (I)و (II) من أجل $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ وبواسطة طريق نشر تايلور، يمكن كتابة التابع φ على الشكل $\varphi(x) = \varphi(0) + x\psi(x)$ مع $\psi \in C^\infty(\mathbb{R})$ معطى بـ: $\psi(x) = \int_0^1 \varphi'(tx)dt$.

التمرين الثالث [8 ن] I) نعتبر المعادلة التفاضلية (E) التالية:

$$y'(t) = (1 - y(t))^2, \ \forall t \geq 0 \quad (E)$$

1) بيّن أنّ كل حل للمعادلة (E) هو تابع متزايد.

2) أوجد الحلول الثابتة للمعادلة (E).

3) ليكن y حل للمعادلة (E) بحيث $y(0) = 0$.

أ) بيّن أنّ $\forall t > 0, \ 0 < y(t) < 1$. إرشاد: نقبل أن المنحنيين البيانيين لحلين مختلفين لا يتقاطعان ويمكن الإستعانة بالرسم.

ب) بيّن أنّ $\lim\limits_{t \to +\infty} y(t) = l$ موجودة. نقبل أنّ $\lim\limits_{t \to +\infty} y'(t) = 0$، أحسب l.

4) أحسب حل المعادلة (E) مع إعطاء المجال الأعظمي في كل حالة ممايلي:

$$y(0) = 0, \ y(0) = 1, \ y(0) = 2.$$

II) ليكن a، b عددين حقيقيين موجبين تماما وليكن $f : [-a, a] \times [-b, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ تابعا مستمرا يحقق $f(t, x) < 0$ إذا كان $tx > 0$ و $f(t, x) > 0$ إذا كان $tx < 0$. بيّن أنّ التابع المعدوم هو الحل الوحيد للمسألة التالية:

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

حيث y تابع حقيقي.

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

Ministère de l'Enseignement Supérieur et
de la Recherche Scientifique
École Normale Supérieure Cheikh Mohamed
El Bachir El Ibrahimi Kouba – Alger
Département de Mathématiques

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
المدرسة العليا للأساتذة

Concours d'accés à la formation doctorale de l'année universitaire 2022 – 2023
Filière Mathématiques – Épreuve de spécialité: Analyse fonctionnelle et équations différentielles

Durée: 02h

Sujet 02 (Coefficient: 03)

Jeudi 09 Février 2023

Exercice 1 [07pts] (I). Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et f une fonction définie de X dans $\mathbb{R}$ et vérifiant $f \in \mathcal{L}^{p_1}(X, \mu) \cap \mathcal{L}^{p_2}(X, \mu)$ avec p_1 et p_2 deux réels tels que $1 < p_1 < p_2 < \infty$.

a) Montrer que pour tout $p \in [p_1, p_2]$, $|f(x)|^p \leq |f(x)|^{p_1} + |f(x)|^{p_2}$, $\forall x \in X$ (On pourra considérer deux cas : $|f(x)| \leq 1$ et $|f(x)| > 1$). Déduire que $\forall p \in [p_1, p_2]$, $f \in \mathcal{L}^p(X, \mu)$

b) On considére la fonction $\varphi : [p_1, p_2] \to \mathbb{R}_+$ définie pour tout $p \in [p_1, p_2]$ par $\varphi(p) = \int_X |f(x)|^p d\mu$. En utilisant le théorème de la convergence dominée de Lebesgue, montrer que φ est continue sur $]p_1, p_2[$.

(II). Soit η une mesure positive sur $(\mathbb{R}, B(\mathbb{R}))$ qui vérifie $\eta(]0, +\infty[) > 0$, $B(\mathbb{R})$ étant la tribu borélienne engendrée par la topologie usuelle. Montrer qu'il existe deux réels strictement positifs $a < b$ tels que $\eta([a, b]) > 0$.

Exercice 2 [05pts] (I). Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = \frac{nx}{1+nx^2}$. Montrer que (f_n) converge dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ vers une distribution, que l'on déterminera.

(II). Considérons la forme linéaire $T : \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ donnée par:

$$T : \varphi \mapsto \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{k}} \left(\varphi\left(\frac{1}{k}\right) - \varphi\left(-\frac{1}{k}\right) \right).$$

1. Montrer que T est une distribution d'ordre 1.

2. Montrer que le support de T est $S = \{0\} \cup \left\{ \frac{1}{k}, k \in \mathbb{Z}^* \right\}$.

Indication pour l'exercice: Rappelons que pour $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$, par la formule de Taylor, on peut écrire $\varphi(x) = \varphi(0) + x\psi(x)$, avec $\psi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ donnée par $\psi(x) = \int_0^1 \varphi'(tx)dt$.

Exercice 3[08pts] (I). On considère l'équation différentielle (E) suivante

$$(E) \qquad y'(t) = (1 - y(t))^2, \qquad \text{pour tout } t \geq 0.$$

1. Montrer que toute solution de l'équation (E) est une fonction croissante.

2. Chercher les solutions constantes de l'équation (E).

3. Considérons la solution y telle que $y(0) = 0$. Montrer que l'on a $0 < y(t) < 1$ pour tout $t > 0$. (**Indication:** On admettra que les graphes de deux solutions distinctes ne se coupent pas et on pourra s'aider d'un dessin.)

4. Considérons la solution y telle que $y(0) = 0$. Montrer que $\lim_{t \to +\infty} y(t) := \ell$ existe. Puis, en admettant que $\lim_{t \to +\infty} y'(t) = 0$, déterminer ℓ.

5. Calculer la solution lorsque $y(0) = 0$, lorsque $y(0) = 1$ et lorsque $y(0) = 2$. Dans chacun de ces cas établir l'intervalle maximal d'existence.

(II). Soit a et b deux réels strictement positifs, et $f : [-a, a] \times [-b, b] \to \mathbb{R}$ continue et vérifiant $f(t, x) < 0$ si $tx > 0$, $f(t, x) > 0$ si $tx < 0$.
Montrer que la fonction nulle est l'unique solution de l'équation $y' = f(t, y)$, où y est à valeurs dans $\mathbb{R}$ et telle que $y(0) = 0$.