الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

Ministère de l'Enseignement Supérieur et
de la Recherche Scientifique
École Normale Supérieure Cheikh Mohamed
El Bachir El Ibrahimi Kouba – Alger
Département de Mathématiques

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
المدرسة العليا للأساتذة الشيخ محمد
البشير الإبراهيمي –القبة – الجزائر
قسم الرياضيات

Concours d'accés à la formation doctorale de l'année universitaire 2022 – 2023
Filière Mathématiques – Épreuve commune (Coefficient: 01)

Durée: 01h 30 **Sujet 01** Jeudi 09 Février 2023

Exercice 1 (Analyse):(07pts)

1. Soit $r \in]-1,1[$. On pose pour $x \in \mathbb{R}$: $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{r^n \cos(nx)}{n}$.
   Montrer que f est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$.
2. Soit $x \in \mathbb{R}$. On pose pour $r \in]-1,1[$: $g(r) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{r^n \cos(nx)}{n}$.
   (a) Montrer que g est de classe C^1 sur $]-1,1[$.
   (b) Montrer que $g'(r) = \dfrac{\cos x - r}{1 - 2r\cos x + r^2}$ et calculer $g(r)$ pour $r \in]-1,1[$.
3. En déduire:
$$I = \int_{-\pi}^{\pi} \ln\left(1 - 2r\cos x + r^2\right) dx = -2\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\int_{-\pi}^{\pi} \frac{r^n \cos(nx)}{n} dx\right);$$
   ainsi que la valeur de l'intégrale I.

Exercice 2 (Analyse):(03pts)

1. Montrer que les intégrales généralisées suivantes sont convergentes
$$I = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^4+1} \quad \text{et} \quad J = \int_0^{+\infty} \frac{t^2 dt}{t^4+1}.$$
2. Montrer que $I = J$, puis calculer la valeur de $2I$.
3. En déduire la valeur de l'intégrale $K = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(t^4+1)^2}$.

SAHLA MAHLA
المصدر الأول للملخصات الجزائري

Exercice 3 (Algèbre):(10pts) Soit n un entier naturel, un polynôme de Tchebychev est le polynôme noté T_n tel que
$$\forall \theta \in \mathbb{R},\ T_n(cos\theta) = \cos(n\theta).$$

1. Existence et unicité:
   (a) Montrer l'existence et l'unicité des polynômes de Tchebychev dans $\mathbb{R}[X]$.
   (b) Écrire $T_{n+1}(x)$ en fonction de $T_n(x)$, $T_{n-1}(x)$ et de x.
   (c) Donner T_0, T_1 , T_2 et T_3.
2. Donner le degré de T_n, le coefficient dominant et les racines de T_n.
3. On définit le produit scalaire sur $\mathbb{R}_m[X]$, $m \geq 0$ par
$$< P, Q >= \int_{-1}^{1} P(x)Q(x)\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx, \quad P, Q \in \mathbb{R}_m[X].$$
   (a) Donner suivant les valeurs de m', n le produit scalaire $< T_n, T_{m'} >$.
   (b) En déduire que la famille des polynomes de Tchebychev de degré inférieur ou égale à m forme une base de $\mathbb{R}_m[X]$.

مسابقة الإلتحاق بالتكوين في الدكتوراه بعنوان السنة الجامعية 2022 – 2023
شعبة الرياضيات – الإمتحان المشترك (المعامل 01)

المدة: ساعة ونصف | الموضوع الأوّل | الخميس 09 فيفري 2023

التمرين الأول (07pts)

1. ليكن $r \in]-1,1[$. نضع من أجل كل $x \in \mathbb{R}$: $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{r^n \cos(nx)}{n}$.
بيّن أن f معرف ومستمر على $\mathbb{R}$.

2. ليكن $x \in \mathbb{R}$. نضع من أجل كل $r \in]-1,1[$, $g(r) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{r^n \cos(nx)}{n}$

(ا) بين أن g من الصنف C^1 على $]-1,1[$.

(ب) بين أن $g'(r) = \dfrac{\cos x - r}{1 - 2r\cos x + r^2}$ وأحسب $g(r)$ من أجل كل $r \in]-1,1[$.

3. إستنتج أنّ

$$I = \int_{-\pi}^{\pi} \ln\left(1 - 2r\cos x + r^2\right) dx = -2\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\int_{-\pi}^{\pi} \frac{r^n \cos(nx)}{n} dx\right);$$

وأحسب قيمة التكامل I.

التمرين الثاني (03pts)

1. بين أن التكاملين الموسعين التاليين متقاربان. $J = \int_0^{+\infty} \frac{t^2 dt}{t^4+1}$ $\quad I = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^4+1}$

2. بين أن $I = J$ ثم أحسب قيمة $2I$

3. إستنتج قيمة التكامل $K = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(t^4+1)^2}$

SAHLA MAHLA
المصدر الاول للطالب الجزائري

التمرين الثالث (10pts)

ليكن n عدد طبيعي، نسمي كثير حدود تشيبيشاف كثير الحدود التالي

$$\forall \theta \in \mathbb{R},\ T_n(cos\theta) = \cos(n\theta).$$

1. الوجود والوحدانية:

(ا) بين وجود ووحدانية كثير حدود تشيبيشاف في $\mathbb{R}[X]$

(ب) أكتب $T_{n+1}(x)$ بدلالة $T_n(x)$ ، $T_{n-1}(x)$ و x.

(ج) أحسب T_0 ، T_1 ، T_2 و T_3.

2. أوجد درجة كثير الحدود T_n ثم عين معامله المهيمن وكذا جذوره.

3. نعرف على $\mathbb{R}_m[X]$ $\quad m \geq 0$ الجداء السلمي بـ

$$< P, Q >= \int_{-1}^{1} P(x)Q(x)\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx, \quad P, Q \in \mathbb{R}_m[X]$$

(ا) أوجد حسب قيم n و n' الجداء السلمي $< T_n, T_{n'} >$

(ب) استنتج أن عائلة كثيرات حدود تشيبيشاف ذات الدرجة أقل أو تساوي m تشكل أساسا للفضاء الشعاعي $\mathbb{R}_m[X]$.

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

Ministère de l'Enseignement Supérieur et
de la Recherche Scientifique
École Normale Supérieure Cheikh Mohamed
El Bachir El Ibrahimi Kouba – Alger
Département de Mathématiques

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
المدرسة العليا للأساتذة الشيخ محمد
البشير الإبراهيمي –القبة – الجزائر
قسم الرياضيات

Concours d'accés à la formation doctorale de l'année universitaire 2022 – 2023
Filière Mathématiques – Épreuve de spécialité: Mathématiques et applications (Coefficient: 03)

Durée: 2h | **Sujet 03** | Jeudi 09 Février 2023

Exercice 1: [$7pts$]

1) Soit $-1 < \alpha < 0$. Montrer que la dérivée au sens des distributions de la fonction $x \mapsto |x|^\alpha$ est donée par

$$\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \mapsto \alpha \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} \left(\varphi(x) - \varphi(-x)\right) dx.$$

Cette distribution est-elle une fonction de $L^1_{loc}(\mathbb{R})$?

2) Calculer la dérivée au sens des distributions de la fonction $x \mapsto \ln(|x|)$.

Exercice 2: [$7pts$]

Soit Ω un ouvert connexe borné de $\mathbb{R}^N$ à frontière régulière. Pour $(u,v) \in H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$, on pose

$$a(u,v) = \int_\Omega \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i} dx + \left(\int_\Omega u dx\right)\left(\int_\Omega v dx\right).$$

1) Montrer que $a(.,.)$ est elliptique.

2) En déduire que pour tout $f \in L^2(\Omega)$, il existe une solution unique $u \in H^1(\Omega)$ du problème
$$a(u,v) = \int_\Omega f(x)v(x)dx, \ \forall v \in H^1(\Omega).$$
De plus, montrer que $\displaystyle\int_\Omega u(x)dx = \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega f(x)dx$, dans le cas où $\displaystyle\int_\Omega f(x)dx = 0$, déterminer l'équation aux dérivées partielles vérifiée par u?

Exercice 3: [$3pts$]

On note l'espace des polynômes à une indeterminée par $\mathbb{R}[X]$. Si $P \in \mathbb{R}[X]$, on pose
$$N_1(f) = \int_0^1 |P(t)|dt, \quad N_2(f) = \int_2^3 |P(t)|dt.$$

1) Montrer que N_1 et N_2 définissent deux normes sur l'espace $\mathbb{R}[X]$.
2) N_1 et N_2 sont-elles équivalentes? justifier.

Exercice :4 [$3pts$]

Soit c un réel non nul. Trouver les solutions de classe $\mathcal{C}^2$ de l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}.$$

En utilisant le changement de variable de la forme $u = x + at, \quad v = x + bt$.

SAHLA MAHLA
المصدر الأول للطالب الجزائري
02/09/2023 17:39