Département de Mathématiques
2022-2023

Concours d'Accès au Doctorat de Mathématiques : Sujet C

Épreuve de spécialité (durée :02 heures).

Exercice 1. (*07 pts*)
Déterminer les fonctions réelles f dérivables en 0 telles que :

$$f(x+y) = e^x f(y) + e^y f(x), \ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

Indication : Calculer $f(0)$, puis utiliser la définition de la dérivabilité.

Exercice 2. (*06 pts*)
Soit $\mathbb{F}_p$ le corps premier à p éléments, α une racine septième de l'unité et $K = \mathbb{F}_p(\alpha)$.

1. Expliquer pourquoi K est un corps fini.
2. Supposons que $p = 3$. Déterminer le cardinal du corps K.
3. Supposons que $p \neq 3$. Soit $f(x) = x^p - x + 3$, si β est une racine de f dans une extension de $\mathbb{F}_p$, montrer que f admet p racines distinctes dans le corps d'extension $\mathbb{F}_p(\beta)$.

SAHLAMAHLA
المصدر الاول للطالب الجزائري

Exercice 3. (*07 pts*)
Soit $\{e_1, e_2, ..., e_n, ...\}$ la base naturelle de l'espace $l_2(\mathbb{R})$:

$$l_2(\mathbb{R}) = \{(x_1, x_2, ..., x_n, ...) / \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 < +\infty\}.$$

On définit la suite d'opérateurs A_n par :

$$A_n e_k = \begin{cases} e_1 & ; k = n \\ 0 & ; k \neq n \end{cases}$$

1. Montrer que $\|A_n\| = 1$.
2. Montrer que (A_n) converge faiblement vers 0.

Université Oran 1
Faculté des Sciences Exactes et Appliquées
Département de Mathématiques
2022-2023

Concours d'Accès au Doctorat de Mathématiques: Sujet C

Épreuve générale (durée: 01h30m).

***Exercice* 1.** (07 pts) Soit l'anneau usuel $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, \cdot)$ où $n \in \mathbb{N}$.

(1) Rappeler pour quelles valeurs de l'entier naturel n, l'anneau $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, \cdot)$ est-il intègre?

(2) (a) Résoudre l'équation $\overline{x}^2 - \overline{4}\overline{x} + \overline{3} = \overline{0}$ dans $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$.

(b) Résoudre l'équation $\overline{x}^2 - \overline{4}\overline{x} + \overline{3} = \overline{0}$ dans $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$.

(c) Expliquer pourquoi dans le cas a), l'équation donnée a deux solutions, alors que dans le cas b), elle en admet plus que deux.

SAHLA MAHLA
المصدر الاول للطالب الجزائري

***Exercice* 2.** (06 pts) Soit $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ et soit f une application de U dans $\mathbb{R}^2$ définie par:

$$f(x,y) = (x^2 - y^2, 2xy)$$

(1) Montrer que f est de classe C^1 sur U et que sa différentielle est inversible en tout point de U.

(2) f est-elle un difféomorphisme de U sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$?

***Exercice* 3.** (07 pts) Soit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(1) La matrice A est-elle diagonalisable?

(2) La matrice A est-elle trigonalisable?

(3) Trigonaliser la matrice A en écrivant $A = PTP^{-1}$ où T est une matrice triangulaire et P est la matrice de passage.