Département de Physique
Concours d'accès à la formation 3ème cycle (Doctorat LMD)
" Physique des Matériaux "
Samedi 21 janvier 2023
Epreuve de Spécialité
(Durée 02h00)
2ème Variante

N.B : Les parties 1 et 2 doivent être traitées sur des feuilles séparées.

Partie 1 : Propriétés tensorielles des solides (PTS)

EXERCICE 1 (3.5 points)

La conductivité d'un cristal est donnée par le tenseur dont on connait les composantes suivantes, dans un repère orthonormé $(OX_1X_2X_3)$, (en 10^7 unités *MKSA* rationalisé) : $\sigma_{11} = 13$; $\sigma_{12} = 0.$; $\sigma_{13} = -3.46$; $\sigma_{22} = 11$; $\sigma_{23} = 0.$; $\sigma_{33} = 9.$

1 – Donner les caractéristiques de la quadrique représentative de la conductivité de ce cristal et Dessiner les sections de la quadrique en montrant les longueurs des demi-axes.

2 – Préciser l'orientation de la quadrique par rapport au repère $(OX_1X_2X_3)$.

3 – Quelle est la direction dans laquelle le cristal est le plus isolant

EXERCICE 2 (3.5 points)

On considère le tenseur de contrainte $[\sigma_{ij}]$ dans un repère x_1, x_2, x_3 :

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\times 10^6\ \mathrm{N \times m^{-2}})$$

On considère le changement de repère tel que : $x'_1Ox_1 = 0°$, $x'_2Ox_2 = 30°$, $x'_2Ox_3 = 60°$ et $x'_3Ox_3 = 30°$.

1. Calculer pour cette transformation de repère la matrice (a_{ij}) des cosinus directeurs.
2. Vérifier que la somme des carrés des éléments a_{ij} est égale à un pour chaque ligne e chaque colonne.
3. Déterminer les valeurs des éléments σ_{ij} du tenseur de contrainte dans le nouveau repère

EXERCICE 3 (3 points)

ar rapport à un repère (Ox_1, Ox_2, Ox_3), les relations tensorielles traduisant l'activi ptique g_{ij} sont données par :

$= g_{ij}n_j$ $(l,j = 1,2,3)$.

sont les composantes du vecteur unitaire polaire $\vec{n}$ de l'onde optique. S_i représentent mposantes du vecteur axial $\vec{S}$ appelé vecteur de gyration. g_{ij} sont les composantes du tens gyration symétrique $[g_{ij}]$.

1. Ecrire les trois relations tensorielles S_1, S_2, S_3.

2. On admet que, après l'opération de symétrie «axe d'ordre 2 // Ox_3», les deux vecteurs $\vec{n}$ et $\vec{S}$ se transforment selon la même loi. Réécrire les nouvelles relations tensorielles (sans calcul). En déduire le tenseur de gyration réduit par cette opération de symétrie.
3. On suppose maintenant que le plan x_1Ox_2 est un plan de symétrie du cristal, et que la réflexion par rapport à ce plan agit différemment sur les deux vecteurs. Trouver les relations Si transformées. Donner, dans ce cas, le tenseur de gyration réduit par cette opération de symétrie.

Université Frères Mentouri Constantine 1
Faculté des Sciences Exactes
Département de Physique
Concours d'Accès à la Formation 3ème Cycle (Doctorat LMD)
Information Quantique
Samedi 21 janvier 2023
Epreuve de Spécialité
(Durée 02h00)
1ère Variante

Exercice 1 : Mécanique Quantique Approfondie

Le noyau de l'atome de tritium est l'isotope ^3H de l'hydrogène, de charge $Z=1$. Ce noyau est radioactif et se transforme en hélium 3 par désintégration bêta :

$$^3H \rightarrow {}^3He + e^- + \bar{\nu}$$

où $\bar{\nu}$ est un antineutrino. L'énergie de l'électron émis est de l'ordre de 15 keV et le noyau ^3He est de charge $Z=2$. La désintégration est un processus instantané.
L'électron β de désintégration est émis à grande vitesse et quitte le système atomique très rapidement. Par conséquent, il se forme un atome d'hélium ionisé $^3He^+$.
Dans tout l'exercice, on considère les noyaux comme infiniment lourds par rapport à l'électron de masse m. On note $a_1 = \hbar^2/me^2$ le rayon de Bohr et $E_I = mc^2\alpha^2/2 = 13.6\,eV$ l'énergie d'ionisation de l'atome d'hydrogène où $\alpha = e^2/\hbar c$ est la constante de structure fine [$e^2 = q^2/(4\pi\varepsilon_0)$, où q est la charge de l'électron].
Dans l'état fondamental $|\psi_0\rangle$ de l'atome de tritium, la fonction d'onde de l'électron $(n=1, l=0, m=0)$ est la même que celle de l'atome d'hydrogène usuel :

$$\psi_0(\vec{r}) = \frac{1}{\sqrt{\pi a_1^3}} e^{-r/a_1} \qquad (1)$$

A l'instant t_0 de la désintégration du noyau et de la formation de l'ion $^3He^+$, nous supposons que la fonction d'onde de l'électron atomique est pratiquement la même que celle du tritium et qu'elle est toujours donnée par (1). On note $|n,l,m\rangle$ les états de l'atome d'hélium ionisé qui constitue un système hydrogénoïde : un électron dans le champ Coulombien d'un noyau de charge 2.

1) Ecrire l'Hamiltonien $\hat{H}_1$ de l'électron atomique avant désintégration et l'Hamiltonien $\hat{H}_2$ de cet électron après désintégration (quand l'énergie potentielle a subi une brusque variation).
2) Quels sont, en fonction de E_I, les niveaux d'énergie de l'atome $^3He^+$? Donner son rayon de Bohr a_2 et sa fonction d'onde $\phi_{100}(\vec{r})$ dans l'état fondamental.
3) Calculer la valeur moyenne $\langle E \rangle$ de l'énergie de l'électron après désintégration. On pourra faire usage de

$$\langle\psi_0|\frac{1}{r}|\psi_0\rangle=\frac{1}{a_1} \qquad \text{et} \qquad \hat{H}_2=\hat{H}_1-\frac{e^2}{r} \tag{2}$$

Donner la valeur de $\langle E\rangle$ en eV.

4) Exprimer en fonction de $|\psi_0\rangle$ et $|n,l,m\rangle$ l'amplitude de probabilité $c(n,l,m)$ et la probabilité $p(n,l,m)=|c(n,l,m)|^2$ de trouver l'électron dans l'état $|n,l,m\rangle$ de $^3He^+$ après désintégration.

Montrer que seules les probabilités $p_n=p(n,0,0)$ sont non nulles.

5) Calculer la probabilité p_1 de trouver l'électron dans l'état fondamental de $^3He^+$.

Quelle est la contribution correspondante à $\langle E\rangle$?

6) Un calcul numérique donne les valeurs suivantes :

$$p_2=\frac{1}{4} \qquad \sum_{n=3}^{\infty}p_n=0.02137 \qquad \sum_{n=3}^{\infty}\frac{p_n}{n^2}=0.00177$$

Calculer la probabilité $\sum_{n=1}^{\infty}p_n$ de trouver l'électron dans les états liés de $^3He^+$ et la contribution $\langle E_L\rangle$ correspondante à $\langle E\rangle$. Commenter les résultats.

Indication :

Les niveaux d'un ion hydrogénoïde de charge Z sont $E_n=-Z^2E_I/n^2$ et leurs orbites stationnaires sont $r_n=n^2a_1/Z$.

Pour montrer que $p_n=p(n,0,0)\neq 0$, utiliser la forme analytique de $c(n,l,m)$:

$c(n,l,m)=\int R_{nl}(r)Y_{lm}^*(\theta,\varphi)\psi_0(\vec{r})d^3r$, où $R_{nl}(r)$ sont les fonctions radiales de ^3He et $Y_{lm}^*(\theta,\varphi)$ sont les harmoniques sphériques satisfaisant la relation d'orthogonalité

$$\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}\sin\theta d\theta Y_{lm}^*(\theta,\varphi)Y_{l'm'}(\theta,\varphi)=\delta_{ll'}\delta_{mm'} .$$

Pour l'atome d'hydrogène, la fonction d'onde correspondant à un triplet donné (n,l,m) s'écrit : $\psi_{n,l,m}(\vec{r})=Y_{lm}(\theta,\varphi)e^{-r/(na_1)}(\frac{r}{a_1})^l P_{n'=n-l-1}^{2l+1}(\frac{r}{a_1})$, où $P_{n'}^{2l+1}(\frac{r}{a_1})$ est un polynôme de Laguerre de degré n' avec $P_0^1(\frac{r}{a_1})=1$.

On a l'intégrale $\int_0^{\infty}e^{-x}x^n dx=n!$.

Exercice 2 : Mécanique Quantique Relativiste

A partir de l'équation de Dirac

$$\left(i\gamma^\mu\partial_\mu-m\right)\psi=0$$

1) Démontrer que les composantes de la fonction d'onde ψ satisfont l'équation de Klein-Gordon,

$$\left(\partial^\mu\partial_\mu+m^2\right)\psi=0$$

2) Démontrer l'identité de Gordon suivante

$$\overline{u}(p')\gamma^{\mu}u(p)=\overline{u}(p')\left[\frac{p'^{\mu}+p^{\mu}}{2m}+\frac{i\sigma^{\mu\nu}q_{\nu}}{2m}\right]u(p)$$

où $u(p)$ et $\overline{u}(p')$ sont les quadri-spineurs de Dirac, avec $\sigma^{\mu\nu}=\frac{i}{2}\left[\gamma^{\mu},\gamma^{\nu}\right]$ et $q=p'-p$.

Exercice 3 : Physique Statistique

On considère un système de N particules identiques, indépendantes et discernables. Il y a quatre états individuels pour chaque particule, d'énergies $-\varepsilon$, 0 et $+\varepsilon$ (avec $\varepsilon>0$), avec les dégénérescences $g(-\varepsilon)=g(+\varepsilon)=1$ et $g(0)=2$. Le système est à température T fixée (par un réservoir de chaleur).

1) Déterminer la fonction de partition $Z(T,N)$ du système, dans l'approximation de Maxwell-Boltzmann.

2) Montrer que l'énergie du système peut se mettre sous la forme

$$E(T,N)=-N\varepsilon\tanh\left(\frac{\beta\varepsilon}{2}\right)$$

où $\beta=\frac{1}{kT}$ (k constante de Boltzmann).

3) Déterminer l'énergie libre $F(T,N)$ et en déduire l'entropie $S(T,N)$.

4) Déterminer la capacité calorifique $C(T,N)\equiv\left.\frac{\partial E}{\partial T}\right|_{N}$ et donner son expression approchée pour $T\to 0$ et $T\to\infty$ puis les limites de $C(T,N)$ pour $T\to 0$ et $T\to\infty$.

Exercice 4 : Information Quantique

Supposons qu'Alice et Bob partage initialement l'état de Bell $\left|\beta_{01}\right\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|01\rangle-|10\rangle\right)$ et qu'Alice veut téléporter l'état $|\psi\rangle=\alpha|0\rangle+\beta|1\rangle$ vers Bob.

1) Donner le circuit quantique de la téléportation.
2) Si la mesure d'Alice donne $|01\rangle$, quelle action doit être entreprise par Bob pour générer l'état $|\psi\rangle$.