الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université de Batna 1
Faculté des Sciences de la matière
Département de Physique

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعــــة باتنــــة 1
كليـــــة علـــوم المـادة
قسم الفيزياء

28/01/2023

Concours d'accès à la formation de troisième cycle
En vue de l'obtention du diplôme de doctorat en Physique
Épreuve Commune de Méthodes Numériques et Programmation
Sujet N°: 2

Exercice 1(7.5) :

Soit la fonction $f(x)$ définie par le tableau suivant :

i	0	1	2	3	N=4
x_i	0	$\pi/8$	$\pi/4$	$3\pi/8$	$\pi/2$
$f(x_i)$	0	0.382683	0.707107	0.923880	1

1. Calculer l'intégrale $I=\int_0^{\pi/2} f(x)\,dx$, en utilisant la méthode des trapèzes généralisée.
2. Refaire les calculs en utilisant cette fois la méthode de Simpson généralisée.
3. Sachant que $f(x)=\sin x$, comparer alors les résultats obtenus avec la valeurs exacte.
4. Trouver le nombre d'intervalles n nécessaires pour obtenir une erreur de 10^{-6} en utilisant la méthode de Simpson généralisée.

Exercice 2 (7.5 *pts*)

1. Montrer que l'équation suivante possède au moins une solution dans l'intervalle $\left[\frac{1}{2},1\right]$:

   $\cos(x)=\sin(x)$
2. Résoudre cette équation en utilisant la méthode de bissection dans l'intervalle donné en utilisant 3 itérations.
3. Résoudre la même équation par la méthode de Newton pour 3 itérations.
4. Quelle est le nombre d'itération qu'il faut utiliser pour avoir une erreur inférieur à $\epsilon=0.001$ pour chacune des deux méthodes citées précédemment.
5. Conclure

Ministère de l'Enseignement Supérieur
et de la Recherche Scientifique
Université de Batna 1
Faculté des Sciences de la matière
Département de Physique

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعـــــــة باتنـــــــة 1
كليـــــــــة علـــــوم المـادة
قسم الفيزياء

SAHLA MAHLA
المصدر الاول للطالب الجزائري

Exercice 3 (*5. pts*)

Soit l'équation différentielle suivante définie sur l'intervalle [1,2] :

$$\frac{dy}{dx} = -y^2 + xy + 2$$

$$y(1) = 1.0$$

Calculer par la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 la solution de cette équation pour h=0.2

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et
de la Recherche Scientifique
Université de Batna 1
Faculté des Sciences de la Matière
Département de Physique

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة باتنة 1
كلية علوم المادة
قسم الفيزياء

28/01/2023

Concours d'accès à la formation de troisième cycle
En vue de l'obtention du diplôme de doctorat en
Physique Théorique
Epreuve de spécialité de : Mécanique Quantique Relativiste II
Sujet N° 1

Exercice 1 (5 points)

Le Lagrangien libre de Dirac pour un fermion de masse m est donné par

$$\mathcal{L} = \overline{\psi}(x)\,[i\,\gamma_\mu\,\partial^\mu - m]\,\psi(x)\,.$$

1. Ecrire l'équation d'Euler-Lagrange pour le champ $\overline{\psi}$ et déduire l'équation de Dirac.
2. Dériver l'expression de la densité de courant j^μ qui vérifie l'équation de continuité. On donne que $(\gamma^\mu)^\dagger = \gamma^0\gamma^\mu\gamma^0$ et $(\gamma^0)^2 = 1$.
3. Etant donné que le Lagrangien est un scalaire de Lorentz, déduire comment $\overline{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)$ et $\overline{\psi}(x)\psi(x)$ se transforment sous une transformation générale de Lorentz $x^\mu \to x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu\, x^\nu$.
4. La transformation de Lorentz du spineur $\psi(x)$ s'écrit comme $\psi(x) \to \psi'(x') = S(\Lambda)\,\psi(x)$. Trouver comment $\overline{\psi}$ se transforme et montrer ensuite que

$$S^{-1} = \gamma^0\, S^\dagger\, \gamma^0\,, \qquad \text{et} \qquad \Lambda^\mu{}_\nu\,\gamma^\nu = S^{-1}\,\gamma^\mu\, S\,.$$

Exercice 2 (7 points)

SAHLA MAHLA
المصدر الأول للطالب الجزائري

L'Hamiltonien de Klein-Gordon pour une particule libre est donné par:

$$H = \frac{1}{2}\dot{\varphi} + \frac{1}{2}(\nabla\varphi)^2 + \frac{1}{2}m^2\varphi^2$$

où

$$\varphi(x) = \int \frac{\mathrm{d}^3 k}{(2\pi)^3\, 2\,\omega_k}\left[a(\vec{\mathbf{k}})\, e^{i\,k\cdot x} + a^\dagger(\vec{\mathbf{k}})\, e^{-i\,k\cdot x}\right]$$

$$[a(\vec{\mathbf{k}}), a^\dagger(\vec{\mathbf{p}})] = (2\pi)^3\, 2\,\omega_k\, \delta^3(\vec{\mathbf{k}} - \vec{\mathbf{p}})$$

1. Déterminer le moment congugé $\Pi(x)$.
2. Montrer que :

$$[\varphi(\vec{\mathbf{x}}, t), \Pi(\vec{\mathbf{y}}, t)] = i\delta^3(\vec{\mathbf{x}} - \vec{\mathbf{y}})$$

3. Exprimer l'Hamiltonien en fonction des opérateurs $a(\vec{\mathbf{k}})$ et $a^\dagger(\vec{\mathbf{k}})$.
4. Montrer que l'opérateur d'impulsion est donné par :

$$P = \int \frac{\mathrm{d}^3 k}{(2\pi)^3\, 2\,\omega_k}\, \frac{k}{2}\left[a^\dagger(\vec{\mathbf{k}})a(\vec{\mathbf{k}}) + a(\vec{\mathbf{k}})a^\dagger(\vec{\mathbf{k}})\right]$$

5. Montrer que pour raison de symétrie, l'impulsion du vide est nulle et en déduire que :

$$P = \int \frac{\mathrm{d}^3 k}{(2\pi)^3\, 2\omega_k}\, k a^\dagger(\vec{\mathbf{k}})a(\vec{\mathbf{k}})$$

Exercice 3 (8 points)

On consière le processus suivant:

$$e^- + \mu^- \longrightarrow e^- + \mu^-$$

1. En utilisant les règles de Feynman de la QED, tracer le(s) diagramme(s) de Feynman correspondant à l'ordre le plus bas en constante de couplage. Combien y'en a-t-il?
2. Ecrire l'amplitude (ou les amplitudes) de transition correspondante(s).
3. Nous allons considérer le cas où les leptons (electons ou muons) incidents ne sont pas polarisés, c-à-d leurs états de spin sont inconnus et où l'on ne mesure pas le spin des leptons sortants. Ecrire le module carré de l'amplitude de transition de la question précédente en fonction de traces de matrices γ de Dirac.
4. En utilisant les propriétés des traces de matrices γ, calculer explicitement ces traces.
5. En déduire le module carré de l'amplitude de transition moyennée sur les spins initiaux et sommée sur les spins finaux.
6. Réécrire l'expression obtenue dans la question précédente dans l'apporoximation ultra-relativiste où les masses des leptons sont négligeables.
7. Ecrire le resultat obtenu en fonction des variables de Mandelstam $s = (p_1 + p_2)^2$, $t = (p_1 - p_3)^2$ et $u = (p_1 - p_4)^2$.

SAHLA MAHLA
المصدر الاول للطالب الجزائري