الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
République Algérienne Démocratique et Populaire
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Domaine : Sciences de la Matière
Filière : Physique
Spécialité : Physique des Matériaux

جامعة بجاية
Tasdawit n Bgayet
Université de Béjaïa

Faculté : Sciences Exactes
Département : Physique
Année : 2022/2023

Concours national d'accès à la formation doctorale (3ème Cycle LMD)

Dimanche 05 Février 2023

Epreuve 2: Propriétés physiques des matériaux

Coefficient : 03. Durée: 02h00 (15h00-17h00)

Exercice n°1 *(08 points)*

On considère un gaz *d'électrons libres* non relativistes, obéissant à la statistique de Fermi-Dirac et au principe d'exclusion, dont découle le paramagnétisme de Pauli. On se place au zéro absolu (T=0°K)

I. Si le gaz est enfermée dans une boite cubique de coté 'L', alors l'énergie d'un électron est donnée par:

$$\varepsilon_\sigma(\vec{k}) = \varepsilon(\vec{k}) = \frac{\hbar^2}{2m}\left(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2\right) \qquad \text{avec } k_i = n_i\frac{2\pi}{L}; (i = x, y, z) \quad \text{où } n_i \text{ est un entier}$$

La variable $\sigma = \{+, -\}$ représente les deux projections du spin de l'électron $\{\uparrow, \downarrow\}$. Notez qu'en l'absence d'un champ magnétique externe, $\varepsilon_\sigma(\vec{k})$ est indépendante de σ (chaque niveau peut accommoder deux électrons de spins différents).

I.1. Trouver l'expression de la densité d'états (loi de distribution en fonction de ε) par unité de volume définie par $\rho(\varepsilon) = 2 \times \frac{dN(\varepsilon)}{d\varepsilon}$. Ici, $dN(\varepsilon)$ représente le nombre d'états dont l'énergie est comprise entre ε et $\varepsilon + d\varepsilon$ et le vecteur d'onde compris entre $\vec{k}$ et $\vec{k} + d\vec{k}$.

I.2. À l'aide la statistique de Fermi-Dirac, déduire les expressions de la densité d'électrons $(n = \frac{N}{V})$ ainsi que de l'énergie moyenne par électron $\left(\langle\varepsilon\rangle = \frac{E_{\text{totale}}}{N}\right)$ en fonction de l'énergie de Fermi ε_F.

II. En appliquant un champ magnétique externe uniforme $\vec{H} = H\vec{e}_z$, un terme supplémentaire (terme de Zeeman $\propto H$) se rajoute à l'énergie $\varepsilon_\sigma(\vec{k})$ définie en haut.

II.1. Donner les expressions de $\varepsilon_+(\vec{k}, H)$ et $\varepsilon_-(\vec{k}, H)$ pour un spin parallèle et antiparallèle au champ $\vec{H}$, respectivement. (On rappelle que le spin et son moment magnétique associé sont antiparallèles).

II.2. Trouver l'aimantation $M(\varepsilon_F)$ (moment magnétique par unité de volume), et déduire la susceptibilité paramagnétique de Pauli $\chi_P(\varepsilon_F)$, du gaz d'électrons (on suppose $\mu_B H \ll \varepsilon_F$).

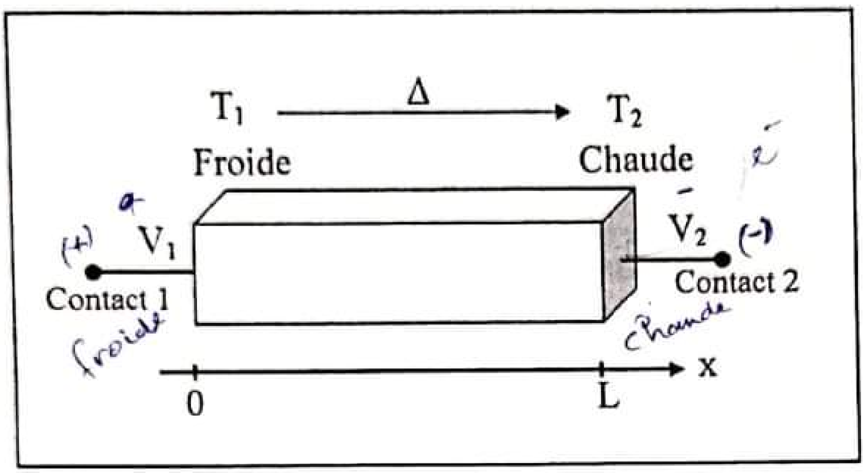
Exercice n°2 *(06 points)*

Sur la courbe de traction d'un matériau polycristallin, on a relevé une limite conventionnelle d'élasticité $R_{e0,2}$ égale à $280\ MPa$. Sous cette contrainte, la déformation totale ε_{tot} de l'éprouvette de traction est égale à 0,337%. On note par E le module d'Young de ce matériau et par R_e sa limite d'élasticité.

1. Représenter la courbe de traction du matériau considéré en indiquant les données suivantes : E, R_e, $R_{e0,2}$ et ε_{tot}.
2. Déterminer la valeur du module d'Young E de ce matériau (en GPa).
3. Si ce matériau est mis sous une contrainte de $350\ MPa$, quelle est la valeur de l'énergie élastique $W_{él}$ emmagasinée par unité de volume de matériau (en kJ/m^3) ?

Exercice n°3 *(06 points)*

Entre les extrémités 1 et 2 d'un semi-conducteur de type p, une différence de température $\Delta T = T_2 - T_1 > 0$ est appliquée. Dans ce cas, si les extrémités 1 et 2 sont court-circuitées, on mesure une densité de courant j_{cc} dans le sens négatif de x à travers le fil de connexion à l'extérieur de l'échantillon (comme illustré par la figure ci-dessous). Ce courant est dû au déplacement des porteurs majoritaires de l'extrémité chaude vers l'extrémité froide. Lorsque le circuit est ouvert, on mesure aussi une tension $V_{co} = V_1 - V_2 > 0$.



1) Expliquer les raisons de ce comportement (connu sous le nom de l'effet Seebeck).
Que deviennent les valeurs de j_{cc} et V_{co} si le semi-conducteur est de type n ?

2) L'effet Seebeck peut être décrit par l'équation suivante :

$j = \sigma(E - S\frac{dT}{dx})$ où σ est la conductivité de l'échantillon, E est le champ électrique et S est le coefficient de Seebeck.

- **a)** Intégrer l'équation ci-dessus entre les extrémités du semi-conducteur en supposant un champ électrique uniforme pour obtenir la caractéristique $j - V$ de ce composant.
- **b)** Comment peut-on déterminer la valeur de S dans les conditions de circuit ouvert ?

3) Le matériau du semi-conducteur utilisé est du silicium de type p de longueur $L = 200\mu m$. Sa conductivité électrique est $\sigma = 0{,}2\Omega^{-1}.cm^{-1}$ et le coefficient de Seebeck est $S = 400\mu V/K$.

- **a)** Calculer les valeurs de j_{cc} et V_{co} pour un gradient de température égal à $\Delta T = 50K$.
- **b)** Calculer la puissance électrique maximale que cette thermopile peut délivrer en supposant une surface unité.

~ Bon Courage ~

Université A.MIRA de Béjaïa
Concours d'accès au doctorat LMD en Physique
Epreuve 1

Année Universitaire 2022/2023
05 Février 2023
Durée: 01 H 30 mn

Epreuve de Mécanique Quantique

Exercice I : (6 points)
Les opérateurs de position et d'implusion, en représentation position, sont donnés à une dimension par les formules respectives

$$\widehat{X} = x \quad , \quad \widehat{P} = \frac{\hbar}{i}\frac{d}{dx}$$

1. En appliquant le commutateur des deux opérateurs précédents sur une fonction test quelconque $g(x)$, montrer que **(2 points)** :
$$[\widehat{X}, \widehat{P}] = i\hbar$$
2. Montrer que pour tout entier positif non nul n **(2 points)** :
$$[\widehat{X}^n, \widehat{P}] = i\hbar n \widehat{X}^{n-1}$$
3. Montrer que **(2 points)** :
$$[f(\widehat{X}), \widehat{P}] = i\hbar f'(\widehat{X})$$
où $f(x)$ est une fonction quelconque qui admet un développement en série de Taylor en termes de x.

Exercice II : (7 points)
Dans un repère euclidien orthonormé $(Oxyz)$, un point quelconque peut être soit repéré par ses coordonnées cartésiennes (x, y, z) ou bien par ses coordonnées sphériques (r, θ, ϕ).
La partie angulaire de la fonction d'onde d'une particule soumise à un potentiel de symétrie sphérique $V(r)$ est donnée par

$$\psi = \underbrace{\frac{1}{4\sqrt{\pi}}\left(\frac{2z^2 - x^2 - y^2}{r^2}\right)}_{a} + A\underbrace{\sqrt{\frac{3}{\pi}}\frac{xz}{r^2}}_{b}$$

où A est une constante réelle positive.

1. En utilisant les coordonnées sphériques (r, θ, ϕ), écrire cette fonction d'onde en termes d'harmoniques sphériques $Y_l^m(\theta, \phi)$. **(2 points)**
2. Déterminer la constante A en normalisant ψ. **(2 points)**
3. Quelle est la valeur moyenne du carré du moment cinétique orbital $\hat{L}^2$ sur cet état. **(1 point)**
4. L'observable $\hat{L}_z$ est mesurée, quelles sont les résultats possibles de la mesure ? Quelles sont les probabilités respectives ? **(2 points)**

On donne
- l'identité d'Euler
$$e^{\pm i\alpha} = \cos\alpha \pm i \sin\alpha$$
- Les harmoniques sphériques
$$Y_2^0(\theta, \phi) = \left(\tfrac{5}{16\pi}\right)^{1/2}(3\cos^2\theta - 1) \ , \ Y_2^{\pm 1}(\theta, \phi) = \mp\left(\tfrac{15}{8\pi}\right)^{1/2}\sin\theta\cos\theta e^{\pm i\phi}$$
$$Y_2^{\pm 2}(\theta, \phi) = \left(\tfrac{15}{32\pi}\right)^{1/2}\sin^2\theta e^{\pm 2i\phi}$$

d- Déterminer le spectre (λ) puis déduire le rayon spectrale ρ(GS).

e- D'après les résultats précèdent, est-ce que la méthode de GS converge? justifier brièvement.

Partie 02 (Mécanique quantique):

Considérons un électron confiné dans une boite de potentiel à une dimension de largeur $a = 2\ nm$ et définie par :

$$\begin{cases} V(x) = 0 \quad pour\ x \in [0, \quad a] \\ V(x) = +\infty \qquad ailleur \end{cases}$$

1. En écrivant l'équation de Schrödinger indépendante du temps, trouver la fonction d'onde $\varphi_n(x)$ et l'énergie E_n de l'électron dans la boite de potentiel.

2. Que peut-on dire de l'énergie de l'électron.

3. Tracez un schéma de l'état stationnaire $\varphi_3(x)$ puis de la densité de probabilité $|\varphi_3(x)|^2$.

4. Quelles sont les positions les plus probables pour trouver l'électron dans cet état ?

5. Si l'électron passe du niveau $n = 4$ au niveau $n = 2$, quelle est la longueur d'onde du photon émis lors de cette transition?

6. Quel est le nombre d'état stationnaires ayant une énergie inférieure à $E = 100\ eV$?

7. Trouver alors l'expression de la densité d'état $D(E) = dn(E)/dE$, définie comme étant le nombre d'états compris entre une énergie E et $E + dE$ par unité d'énergie dE.

<u>**Constantes :**</u> $\hbar = 1{,}054752 . 10^{-34}\ J.s$; $m_e = 9{,}109 . 10^{-31} Kg$

Université A.MIRA de Béjaïa
Concours d'accès au doctorat LMD en Physique
Epreuve 1

Année Universitaire 2022/2023
05 Février 2023
Durée: 01 H 30 mn

Exercice III : **(7 points)**

A une dimension, on considère une particule de masse m et d'énergie potentielle :

$$V(x) = \begin{cases} \infty & x < 0 \quad \text{(région I)} \\ 0 & 0 \leq x \leq a \quad \text{(région II)} \\ V_0 & x > a \quad \text{(région III)} \end{cases}$$

Le système étant stationnaire, on s'intéresse à l'étude des états liés de la particule pour lesquels l'énergie E vérifie la condition $E < V_0$.

1. Ecrire les conditions aux limites de la fonction d'onde de la particule. **(1 point)**
2. Ecrire l'équation de Schrödinger stationnaire dans les régions II et III. Calculer la forme explicite de la fonction d'onde dans les deux régions précédentes. **(2 points)**
3. En utilisant les conditions de continuité de la fonction d'onde et de sa dérivée en $x = a$, trouver une équation algébrique dont les solutions sont les énergies possibles de la particule. **(2 points)**
4. Sans aucun calcul supplémentaire, esquissez graphiquement la forme de la fonction d'onde de l'état fondamental. **(2 points)**

Bon Courage