الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة محمد البشير الابراهيمي – برج بوعريريج
كلية العلوم والتكنولوجيا

مسابقة الالتحاق بالتكوين في الطور الثالث (دكتوراه ل م د)

التاريخ: 28 جانفي 2023 المدة: ساعة ونصف (1سا و30د)

Spécialité :	Rayonnement et matière + Physique des matériaux	تخصص:
Épreuve 1 :	Mécanique quantique I et II	الامتحان الأول:

Variante : 2 الموضوع:

Remarque : L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.

Exercice 1 : (7pts) Considérons une particule dont la fonction d'onde $\psi(\vec{r})$ est :

$$\psi(\vec{r}) = C\,\frac{x}{r}\cdot\frac{e^{-r/2}}{r}, \qquad (r^2 = x^2+y^2+z^2,\ C = Cte > 0)$$

On donne les harmoniques sphériques (fonctions propres orthonormées des opérateurs moment cinétique L^2 et L_z) $Y_{l,m} \equiv |l,m\rangle$ pour $(l,m) = (1,\pm1)$ sous la forme hybride suivante :

$$Y_{1,1} = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2\pi}}\,\frac{(x+iy)}{r}, \qquad Y_{1,-1} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2\pi}}\,\frac{(x-iy)}{r}$$

Posons $\psi_\pm(\vec{r}) = \dfrac{e^{-r/2}}{r}\cdot Y_{1,\pm1}(\theta,\varphi)$

1- Montrer que la constante de normalisation C vaut $C = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}$.
2- Vérifier (en représentation $|r\rangle$) que $\psi_\pm$ sont orthonormées : $\langle\psi_+|\psi_-\rangle = 0$ et $\langle\psi_\pm|\psi_\pm\rangle = 1$.
3- En exprimant $\frac{x}{r}$ en fonction de $Y_{1,1}$ et $Y_{1,-1}$ calculer $\psi(\vec{r})$ en fonction de ψ_- et ψ_+.
4- Montrer que ψ_+ et ψ_- sont des états propres de L^2 et L_z et donner leurs valeurs propres.
5- Calculer $L^2\psi$ en fonction de ψ. Justifier le résultat obtenu.
6- Déterminer les probabilités qu'une mesure de L_z donne les valeurs $\hbar, -\hbar$.
7- Calculer la probabilité de trouver la particule à l'intérieur d'une sphère de rayon $R = \ln 3$.

Données : $x = r\sin\theta\cos\varphi$, $dv = r^2\sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi$, $\cos^2\varphi = \frac{1}{2}(\cos 2\varphi + 1)$

Exercice 2 : (6pts) Pour un atome d'hydrogène se trouvant dans un état propre (n,l), la densité de probabilité radiale est donnée par :

$$\rho_{nl}(r) = r^2 R^2_{nl}(r)$$

R_{nl} étant la fonction radiale de l'atome d'hydrogène. On supposera par la suite l'atome dans l'état propre excité ($n = 3, l = 1$) et on prendra le rayon de Bohr $a_0 = 1$ et la constante de Rydberg $\mathcal{R} = -\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0}$. La fonction radiale R_{31} est alors donnée par : $R_{31}(r) = \frac{2^{3/2}}{3^{9/2}}(6-r)re^{-r/3}$

1) En utilisant la règle de Kramer calculer :
   a) La valeur moyenne de l'énergie potentielle $V(r) = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r}$ en fonction de $\mathcal{R}$.
   b) La valeur moyenne de la distance r entre l'électron et le proton.
   c) La valeur moyenne de r^2 et l'incertitude Δr.
2) Montrer que la valeur moyenne de l'énergie cinétique vérifie la relation : $2\langle T\rangle = -\langle V\rangle$.
3) Calculer la distance r_m pour laquelle la densité radiale $\rho_{31}(r)$ est maximale.

Données : Règle de Kramer $\dfrac{k+1}{n^2}\langle r^k\rangle = (2k+1)\langle r^{k-1}\rangle - \dfrac{k}{4}[(2l+1)^2 - k^2]\langle r^{k-2}\rangle$, ($k$ entier), $\dfrac{2^{10}}{exp(6)} > 1$

Exercice 3 : (7pts) Considérons le principe de correspondance qui permet le passage des grandeurs classiques (impulsion et énergie) vers les grandeurs quantiques :

$$\vec{p} \to -i\hbar\vec{\nabla}, \qquad E \to i\hbar\frac{\partial}{\partial t}$$

1/ Appliquer ce principe à l'équation d'Einstein

$$E^2 = p^2c^2 + m^2c^4 \qquad (1)$$

qui exprime l'énergie d'une particule classique libre de masse au repos m (c étant la vitesse de la lumière, pour la suite on travaillera avec la convention $\hbar = c = 1$) pour montrer qu'on obtient l'équation d'onde suivante

$$\left(\Box + m^2\right)\psi\left(\vec{r}, t\right) = 0 \qquad (2)$$

où l'opérateur d'Alembertien $\Box$ est égal à : $\Box = \dfrac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta$

2/ Trouver l'équation d'onde vérifiée par ψ^*.

3/ Montrer que l'équation de continuité associée à l'équation d'onde (2) s'écrit : $\dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}\vec{j} = 0$ où : $\vec{j} = \dfrac{-i}{2m}\left(\psi^*\vec{\nabla}\psi - \psi\vec{\nabla}\psi^*\right)$ et ρ est une quantité scalaire à déterminer.

4/ Peut-on interpreter ρ comme une densité de probabilité de présence de la particule ? Justifier votre réponse.

Bon courag

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة محمد البشير الإبراهيمي – برج بوعريريج
كلية العلوم والتكنولوجيا

مسابقة الالتحاق بالتكوين في الطور الثالث (دكتوراه ل م د)

التاريخ: 28 جانفي 2023 المدة: ساعتان (2سا)

Spécialité :	Physique des matériaux	التخصص:
Épreuve 2 :	Semiconducteurs	الامتحان الثاني:

Variante : 3 الموضوع:

Exercice 1 : (7 pts)

1) Quelle est la concentration en électrons dans un cristal semiconducteur dopé avec des impuretés de phosphore (5 é de valence) de telle sorte qu'il y ait un atome d'impureté pour 10^6 atomes de semiconducteur à température T = 300 K. La densité des atomes de ce semi-conducteur est de $5.10^{28}\ m^{-3}$.

2) Quel est le rapport des concentrations en électrons et en trous n/p?

3) Déterminer la position de niveau de Fermi intrinsèque par rapport à E_C ; $E_C - E_{Fi}$?

4) Sachant que le niveau de Fermi intrinsèque E_{Fi} est situé au-dessous du centre de la bande interdite $(E_{midgap} = (E_C + E_V)/2)$ de 0.0128 eV, déterminer :

a) le rapport de la masse effective des trous et des électrons m_p^*/m_n^*, puis déduire N_V à T=300 K?

b) le type de ce semiconducteur (Si,GaAs, Ge….) ?

5) Si on réalise des contacts aux extrémités de ce cristal (section S= 0.5 mm^2 , longueur = 5 mm) et on applique une tension de 10 V entre les contacts. Calculer la résistance R du semiconducteur à T= 0 K, T=300 K et T = 800 K puis déduire le courant I qui le traverse à chaque température.

6) Tracer approximativement les bandes d'énergie $(E_C, E_V, E_F, E_{Fi}, E_d)$ de ce semiconducteur à T= 0 K, T = 300 K et T=800 K.

Données: $N_c = 2.8\,10^{19}\ cm^{-3}$, $\mu_n = 1350\ cm^2.V^{-1}.s^{-1}$, $\mu_p = 480\ cm^2.V^{-1}.s^{-1}$, kT(300 K) = 25.9 meV, q =1,602.10^{-19} C, $n_i(300K) = 6.94\,10^9 cm^{-3}$, $n_i(800K) = 10^{15} cm^{-3}$. On suppose que μ_n, μ_p, Eg sont indépendants de la température.

Exercice 2 : (6 pts)

Un échantillon de silicium intrinsèque est dopé de manière non uniforme avec des atomes d'impuretés donneurs N_D (x) de sorte que $N_D(x) = N_0 e^{-ax}$ et $N_D(x) >> n_i$ à température ambiante $(kT = 25.9 meV)$.

N_0 et a sont des constants positifs.

1) Donner les dimensions de N_0 et a ?

2) Etablir l'expression qui donne $E_F - E_{Fi}$

a. en fonction de n.

b. en fonction de x.

3) Tracer approximativement les bandes d'énergie (E_C, E_V, E_F, E_{Fi}) de ce semiconducteur à l'équilibre thermique.

4) Sachant que le potentiel électrique qui reine dans le semiconducteur est: $V = \dfrac{E_F - E_{Fi}}{q}$, montrer que le champ électrique induit dans le semiconducteur en équilibre thermique est donné par

$$E(x) = -\left(\frac{kT}{q}\right)\frac{1}{n(x)}\frac{dn(x)}{dx}$$

5) Trouver une expression pour le champ E (x) à l'équilibre sur la plage pour laquelle Nd >> n_i . (b) Evaluer E (x) quand a = 1 μm^{-1}.

6) Quelle est la valeur du courant électronique J_n à l'équilibre thermique?

7) Déterminer la relation d'Einstein $\dfrac{D_n}{\mu_n} = \dfrac{kT}{q}$.

Exercice 3: (7 pts)

L'inverse carré de la capacité d'une jonction abrupte p^+n en fonction de la tension inverse V_R est donné par la relation expérimentale suivante: $\dfrac{1}{C^2} = 8{,}254.10^{20} + 1{,}132.10^{21}|V_R|$ (F^{-2})

1) Que signifié le symbole + dans l'écriture p^+n?
2) Dans quelle région, la zone de charge d'espace s'élargit. Justifier?
3) Rappeler l'expression de la capacité C de la jonction en fonction de la largeur de la zone de la charge d'espace W.
4) Sachant que $W = \left\{\dfrac{2\varepsilon_s(V_d + V_R)}{e}\left(\dfrac{N_a + N_d}{N_a N_d}\right)\right\}^{1/2}$, montrer que l'expression de l'inverse carré de la capacité peut être simplifier sous la forme $\dfrac{1}{C^2} \approx A + B|V_R|$.
5) Déterminer la concentration des donneurs N_D dans le coté n?
6) Déterminer la tension de diffusion V_d (ou V_{bi})?
7) Déduire la concentration des accepteurs N_a dans le coté p?
8) Tracer en détails les bandes d'énergies de la jonction dans les trois cas suivantes:

a) $\dfrac{1}{C^2} = 8{,}254.10^{20}$ (F^{-2})

b) $\dfrac{1}{C^2} = 0$ (F^{-2})

On donne : La section de la jonction: S= 6.10^{-3} cm^2, e = 1.6 10^{-19} C, $\varepsilon_r = 11.8\varepsilon_0$, $\varepsilon_0 = 8.8510^{-12}$ F/m, kT=26 meV, $n_i = 10^{10}$ cm^{-3}.

Bon courage