الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
République Algérienne Démocratique et Populaire
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université de Ain Témouchent Belhadj Bouchaib
Faculté des Sciences et de la Technologie
Département de Mathématiques et Informatique
جامعة عين تموشنت بلحاج بوشعيب
كلية العلوم و التكنولوجيا
قسم الرياضيات و الإعلام الآلي

Concours d'accès à la formation de troisième cycle Doctorat, le 21/01/2023
Intitulé du Doctorat: Equations aux dérivées partielles.

Sujet: 2 *Examen: Analyse fonctionnelle et Applications.* **Durée:** 02h00

Exercice 1 *(6 points)*
On considére dans $\mathbb{R}^2$ *la fonction*

$$E(x,t) = \frac{H(t)}{\sqrt{4\pi t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right);$$

où H *est la fonction de Heaviside*

$$H(t) = \begin{cases} 1 & si\ t > 0, \\ 0 & si\ t \leq 0. \end{cases}$$

1. *Montrer que* E *définit une distribution sur* $\mathbb{R}^2$.
2. *Montrons que* $\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) E = \delta$ *(* δ *la distribution de Dirac).*

Exercice 2 *(6 points)*
Soit C *l'espace de Banach définie par:*

$$C = \{f : [0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R} : f \text{ est uniformement continue et bornée}\}$$

muni de la norme

$$\|f\|_C = \sup_{\alpha \in [0,+\infty[} |f(\alpha)|.$$

Définissons:

$$(T(t)f)(\alpha) = f(t+\alpha), \quad \forall t \geqslant 0 \quad \alpha \in [0,+\infty[$$

1. *Montrer que* $\{T(t)\}_{t>0} \in \mathcal{L}(C)$.
2. *Montrer que* $T : \mathbb{R}^+ \to \mathcal{L}(C)$ *est un* C_0*-semi-groupe.*
3. *Déterminer le générateur infinitésimal* A *de* $\{T(t)\}_{t>0}$.

Exercice 3 *(8 points)*
Soit A *un opérateur non borné, de domaine* $D(A)$, *dans un espace de Banach* E.

- *On dit que* A *est dissipatif si*

$$\forall u \in D(A), \quad \forall \lambda > 0, \quad \|u - \lambda A u\|_E \geq \|u\|_E.$$

- *On dit qu'un opérateur dissipatif* A *est m-dissipatif si:*

$$\forall f \in E, \quad \forall \lambda > 0, \quad \exists u \in D(A) \,/\, u - \lambda A u = f$$

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
République Algérienne Démocratique et Populaire
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université de Ain Témouchent Belhadj Bouchaib
Faculté des Sciences et de la Technologie
Département de Mathématiques et Informatique

جامعة عين تموشنت بلحاج بوشعيب
كلية العلوم و التكنولوجيا
قسم الرياضيات و الإعلام الآلي

Concours d'accès à la formation de troisième cycle Doctorat, le 21/01/2023
Intitulé du Doctorat: Equations aux dérivées partielles.

Sujet: 3 — ***Examen*** . *Mathématiques générales.* — **Durée:** 01h30

Exercice 1 *(5pts) Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$ l'espace vectoriel des polynômes á coefficients réels de degré inferieur ou égal á 3. On définit f l'application de E dans lui même par:*

$$f(P) = P + (1 - X)P'.$$

1. *Montrer que f est un endomorphisme de E.*
2. *Déterminer une base de $Im(f)$.*
3. *Déterminer une base de $Ker(f)$.*
4. *Montrer que $Im(f)$ et $Ker(f)$ sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E.*

$E \oplus F = E$

Exercice 2 *(5pts) Soient (X, d) et (Y, δ) des espaces métriques, K une partie compacte de X et $f : X \to Y$ une application. On suppose que f est continue en tout point de K.*

- *Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$, tel que pour tout $x \in K, y \in X$,*
$d(x, y) \leq \eta \Rightarrow \delta(f(x), f(y)) \leq \varepsilon$.

equicontinue

Exercice 3 *(5pts) Soit l'ensemble $X = \{a, b, c, d, e\}$ et ses deux parties : $A = \{a, c\}$ et $B = \{a, c, e\}$. Considérons la la topologie de X : $\mathcal{T} = \{\emptyset, X, \{a, b\}, \{c, d\}, \{e\}^c\}$*

1. *Quel est l'ensemble $\mathcal{F}$ des fermés pour cette topologie ?*
2. *Déterminer la topologie $\mathcal{T}_B$ induite par $\mathcal{T}$ sur la partie B.*
3. *Déterminer l'ensemble des fermés $\mathcal{F}_B$ correspondant.*
4. *Trouver : $int_X(A)$, $adh_X(A)$ et $Fr_X(A)$. (l'intérieur, l'adhérence et la frontière de A par rapport à l'espace topologique $(X, \mathcal{T})$.*
5. *Trouver : $int_B(A)$, $adh_B(A)$ et $Fr_B(A)$. (l'intérieur, l'adhérence et la frontière de A par rapport à l'espace topologique $(B, \mathcal{T}_B)$).*

Exercice 4 *(5pts) Considérons l'espace $V = l^2(\mathbb{C})$ des suites infinies $u = (a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots)$ de nombres complexes telles que: $\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|^2 < \infty$ On admet que c'est un espace de Hilbert muni du produit scalaire:*

$$\langle u, v \rangle = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \overline{b_i} \quad \text{où } u = (a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots) \text{ et } v = (b_1, b_2, \cdots, b_n, \cdots).$$

Soit donné l'opérateur linéaire : $T : V \longrightarrow V$ défini par
$T(a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots) = (0, a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots)$.
Réponde aux questions suivantes en justifiant vos réponses :