...istère de l'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université de Relizane
Faculté des Sciences et de la Technologie
Filière:..................Mathématiques
Spécialité:...............................EDP........

Concours d'accès à la formation de troisième cycle (Doctorat LMD)
date: 04/02/2023
durée: 2h00
coefficient: 03

Epreuve de spécialité:.............EDP..

Sujet : 2

Exercice 1. *Soit Ω un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^N$ $(N \geq 1)$. Soit $f \in L^2(\Omega)$.*

1. *Si $u \in H_0^1(\Omega)$, montrer que pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, on a*

$$\langle \Delta u, \varphi \rangle_{\mathcal{D}'(\Omega),\mathcal{D}(\Omega)} = \int_\Omega u(x)\Delta\varphi(x)\,dx = -\int_\Omega \nabla u(x)\nabla\varphi(x)\,dx.$$

2. *Montrer que les trois problèmes suivants sont équivalents.*
   (P_1) *: Trouver $u \in H_0^1(\Omega)$ telle que*

$$-\Delta u = f \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega).$$

   (P_2) *: Trouver $u \in H_0^1(\Omega)$ telle que*

$$\int_\Omega \nabla u(x)\nabla v(x)\,dx = \int_\Omega f(x)v(x)\,dx, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

   (P_3) *: Trouver $u \in H_0^1(\Omega)$ qui minimise dans $H_0^1(\Omega)$ la fonctionnelle*

$$J(v) = \frac{1}{2}\|\nabla v\|^2_{L^2(\Omega)} - \int_\Omega f(x)v(x)\,dx.$$

Exercice 2. *On s'intéresse à la recherche, par une méthode variationnelle, de la fonction u vérifiant*

$$-\frac{d^2u}{dx^2}(x) = f(x), \quad x \in]0,1[, \quad f \text{ donné dans } L^2(]0,1[), \quad u(0) = u(1) = 0.$$

1. *On cherche $u \in H_0^1(]0,1[)$ solution du problème différentiel ci-dessus. Montrer que u est solution du problème variationnel :*

$$\text{Trouver } u \in H_0^1(]0,1[) \text{ tel que : } a(u,v) = L(v), \quad \forall v \in H_0^1(]0,1[)$$

On explicitera, pour tout $(u,v) \in H_0^1(]0,1[) \times H_0^1(]0,1[)$, $a(u,v)$ et $L(v)$.

2. **Montrer que** $a(.,.)$ *est une forme bilinéaire continue, symétrique, et* **coercive sur** $H_0^1(]0,1[)$, *et que* L *est une forme linéaire continue sur* $H_0^1(]0,1[)$.

Exercice 3. *On considere le problème*

$$\begin{cases} -M(\|u\|^2_{L^2(\Omega)})\Delta u &= f(x) \ dans \ , \\ u &= 0 \ sur \ \partial\Omega, \end{cases} \tag{1}$$

ou $f \in L^2(\Omega)$ *avec* $M : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ *une fonction continure t.q*

$$M(\sigma) \geq m_0 > 0 \quad \forall \sigma \in \mathbb{R}^+.$$

Soit $\overline{B}_R = \{v \in W_0^{1,2}(\Omega) : \|v\|_{L^2(\Omega)} \leq R\}$. *Soit* $T : \overline{B}_R \to W_0^{1,2}(\Omega)$ *définit par* $T(v) = u$ *où* u *est la solution unique de problème*

$$\begin{cases} -\Delta u = \dfrac{f(x)}{M(\|v\|^2_{L^2(\Omega)})} \ dans \ \Omega, \\ u = 0 \ sur \ \partial\Omega, \end{cases} \tag{2}$$

1-Montrer que le problème (2) admet une solution unique u *dans* $W_0^{1,2}(\Omega)$.

2-Trouver R *tel que* $T(\overline{B}_R) \subset \overline{B}_R$ *et montrer que* T *continue et compact.*

3-Utiliser le Théorème de Schauder pour déduire que l'opérateur T *admet un point fixe.*

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université de Relizane
Faculté des Sciences et de la Technologie
Filière : Mathématiques
Spécialité : Équations aux dérivées partielles

جامعة غليزان

Concours d'accès à la formation de troisième cycle (Doctorat LMD)
date : 04/02/2023
durée : : 1h30
coefficient : 01

Épreuve commune :Équations différentielles Sujet C

Exercice 1. *[04 points] Soit le problème de Cauchy suivant :*

$$\begin{cases} y'''(x) - y'(x) = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \\ y''(0) = 2 \end{cases} \tag{1}$$

Résoudre ce problème d'au moins deux manières différentes.

[08 points]

Exercice 2. *On s'intéresse au système différentiel*

$$\begin{cases} x' = x + \sin(3x - y), \\ y' = e^x - 1. \end{cases} \tag{2}$$

1) Justifier que pour toute condition initiale $(x(0), y(0)) = (x_0, y_0)$, le problème admet une unique solution maximale, notée $(\psi,]T_*, T^*[)$ avec $\psi = (\psi_1, \psi_2)$.
2) Montrer que pour tout $t \in [0, T^*[$

$$|\psi_1(t) - \psi_1(0)| \leq \int_0^t (|\psi_1(s)| + 1)ds,$$

puis que pour tout $t \in [0, T^*[$,

$$|\psi_1(t)| + 1 \leq |x_0| + 1 + \int_0^t (|\psi_1(s)| + 1)ds.$$

3) En déduire que pour tout $t \in [0, T^*[$,

$$|\psi_1(t)| \leq (|x_0| + 1)e^t.$$

4) On suppose par l'absurde que $T^* < +\infty$: montrer que ψ_1 et ψ_2 sont alors bornées sur $[0, T^*[$. Conclure.

Exercice 3. *[08 points] Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue bornée. On considère l'équation différentielle scalaire du second ordre*

$$\frac{d^2x}{dt^2} - x = f(t). \qquad (I)$$

1) Montrer que cette équation admet au plus une solution bornée sur $\mathbb{R}$.
2) Écrire l'équation sous forme d'un système $U' = AU + F(t)$ où $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ une fonction continue,

calculer e^{tA} et en déduire que toute solution de l'équation (I) s'écrit sous la forme

$$x(t) = ae^t + be^{-t} + \int_0^t sh(t-\tau) f(\tau) d\tau, \ \forall t \in \mathbb{R}.$$

3) On fixe $L > 0$. Trouver a_L et b_L pour que $x(L) = x(-L) = 0$. Montrer que les coefficients a_L et b_L ont des limites quand $L \longrightarrow \infty$. En déduire que l'unique solution bornée cherchée s'écrit

$$x(t) = -\frac{1}{2}\left(\int_{-\infty}^{t} e^{s-t} f(s) ds + \int_t^{+\infty} e^{t-s} f(s) ds\right).$$