الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur
et de la Recherche Scientifique
Université de Batna 2
Faculté des Mathématiques et de l'informatique
Département de Mathématiques

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة باتنة 2
كلية الرياضيات والإعلام الآلي
قسم الرياضيات

CONCOURS D'ACCES AU DOCTORAT 3$^{\text{EME}}$ CYCLE EN MATHEMATIQUES

OPTION : THEORIE DES OPERATEURS

EPREUVE : Analyse (Sujet 01)

02 Février 2023 / Durée : 01h30

Directives pédagogiques :
Documentation et smartphone ne sont pas autorisées – Calculatrice non autorisée – Il est strictement interdit d'écrire avec des stylos en couleurs à l'exception du noir et bleu – Il est fortement interdit de remplir la rubrique numéro d'anonymat.

Exercice No. 1.

Soit

$$E = \{f \in C^1([a,b],\mathbb{R}) : f' \in L^2([a,b],\mathbb{R}), f(a) = 0\}$$

1. En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz sur $\int_a^t f'(t)dt$, montrer que pour tout $t \in [a,b]$, on a

$$\left(f(t)\right)^2 \leq (t-a)\int_a^t |f'(s)|^2\, ds$$

2. En déduire que

$$\int_a^b (f(t))^2 dt \leq \frac{(b-a)^2}{2}\int_a^b |f'(t)|^2\, dt$$

Exercice No. 2..

Soit $C([0,1])$ l'espace des fonctions continues sur $[0,1]$ à valeurs réelles, muni de la norme

$$\|f\|_\infty = \sup_{0\leq x\leq 1} |f(x)|$$

Soit l'application

$$G : C([0,1]) \to C([0,1])$$

définie par

$$(Gf)(x) = e^x + \frac{1}{2}\int_0^{x^2} f(t)dt$$

a. Montrer que G est une application contractante sur $C([0,1])$. *b*. Utiliser (*a*) pour montrer qu'il existe une et une seule fonction dérivable sur $[0,1]$ telle que

$$\begin{cases} \frac{d}{dx}f(x) = e^x + xf(x^2) \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

Exercice No. 3

X étant un espace vectoriel normé, E un sous ensemble non vide de X, on définit la distance d'un point $x \in X$ à E par : $d(x, E) = \inf_{y \in E} \|x - y\|$.

a. Montrer que $d(x, E) = 0 \Leftrightarrow x \in \overline{E}$ et que pour $x, y \in X$, on ait $|d(x, E) - d(y, E)| \leq \|x - y\|$. b. On suppose E compact, $F \subset X$ fermé, et que $E \cap F = \Phi$. Montrer qu'il existe $\delta > 0$ tq $\forall x \in E, \forall y \in F$, on ait $\|x - y\| \geq \delta$

République Algérienne Démocratique ...

...istère de l'Enseignement Supérieur
...e la Recherche Scientifique
...versité de Batna 2
...lté des Mathématiques et de l'informatique
...artement de Mathématiques

... 2
كليـــــة الرياضيات والإعلام الآلي
قسم الرياضيات

CONCOURS D'ACCES AU DOCTORAT 3EME CYCLE EN MATHEMATIQUES

OPTION : THEORIE DES OPERATEURS

EPREUVE : Opérateurs Linéaires (Sujet 03)

02 Février 2023 / Durée : 02h00

...es pédagogiques :
...tation et smartphone ne sont pas autorisées – Calculatrice non autorisée – Il est strictement interdit d'écrire avec ...s en couleurs à l'exception du noir et bleu – Il est fortement interdit de remplir la rubrique numéro d'anonymat.

Exercice 1. *Soient H un espace de Hilbert complexe, $T \in B(H)$ à image fermée. On dit que T est n-EP, s'il existe un entier $n \in \mathbb{N}^*$, tel que $T^nT^+ = T^+T^n$.*

(1) *Donner un exemple d'un opérateur 2-EP, autre que 0 et I.*

(2) *On suppose que T n-EP et $S \in B(H)$. Montrer les propriétés suivantes :*
   (i) *Pour tout scalaire $\lambda \in \mathbb{C}$, λT est n-EP.*
   (ii) *T^* est n-EP.*
   (iii) *Si S est unitairement équivalent à T, alors S est n-EP.*
   (iv) *$R(T^n) = R(T^{n+1})$ et $N(T^n) = N(T^{n+1})$.*

Notation : Pour $T \in B(H)$, on note par $T^+ \in B(H)$, l'inverse de Moore-Penrose de T, vérifiant $TT^+T = T$, $T^+TT^+ = T^+$, $(TT^+)^* = TT^+$, $(T^+T)^* = T^+T$.

Exercice 2. *Soient H un espace de Hilbert complexe et $T \in B(H)$. On suppose que :*

(i) *Il existe $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ un système orthonormé de H ($n \in N^*$) et $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}^*$, tels que $T\varphi_i = \lambda_i\varphi_i$, pour $i = 1, \dots, n$,*

(ii) *T s'annule sur $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}^\perp$.*

(1) *Montrer que $Tx = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \langle x, \varphi_i\rangle \varphi_i$, pour tout $x \in H$.*

(2) *Donner l'expression de T^*x en fonction des λ_i et φ_i, pour tout $x \in H$.*

(3) *Montrer que T est normal de rang n.*

Exercice 3. *Soit H un espace de Hilbert complexe, et $T \in B(H)$. On definit l'ensemble*

$$W(T) = \left\{ \frac{\langle Tx, y\rangle}{\|x\|\|y\|} ; 0 < \|x\| \leq 1, 0 < \|y\| \leq 1 \right\}$$

(1) *Montrer que $\sup W(T) = \|T\|$.*

(2) *On pose $\omega(T) = \sup\{\langle Tx, x\rangle ; \|x\| = 1\}$. Pour tout $x, y \in H$ de norme 1, montrer que $|\langle Tx, y\rangle + \langle Ty, x\rangle| \leq \omega(T)(\|x\|^2 + \|y\|^2)$.*

(3) *Déduire que $\frac{1}{2}\|T\| \leq \omega(T) \leq \|T\|$ On remarque que $\langle Tx, y\rangle + \langle Ty, x\rangle = \frac{1}{2}(\langle T(x+y), (x+y)\rangle - \langle T(x-y), (x-y)\rangle)$*

(4) *Montrer que $\omega(T^2) \leq (\omega(T))^2$*

(5) *Si on suppose que T est normal, montrer que $\omega(T) = \|T\|$*