République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université frères Mentouri Constantine 1
Faculté des Sciences Exactes - Département de Mathématiques

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة الإخوة منتوري قسنطينة 1
كلية العلوم الدقيقة - قسم الرياضيات

Concours d'accès à la Formation de Doctorat 3ème Cycle pour l'année universitaire 2022/2023

Filière : **Mathématiques**

Épreuve commune : Analyse et Topologie

Durée : 01 heure 30

Exercice 1. (10 pts)

1. Démontrer les inégalitées suivantes :

$$0 \leq -1 - x + \exp(x) \leq 2x^2, \ x \in [0,1].$$

2. Soit $\sum_{n\geq 1} f_n(x)$ une série de fonctions, telle que

$$f_n(x) = -1 + \exp(a^{-nx}), \ n \geq 1, \ a \in]1, +\infty[\text{ et } x \in \mathbb{R}.$$

2. 1. Trouver l'ensemble de réels D pour lesquels la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n(x)$ soit convergente.
2. 2. Soit δ un nombre réel strictement positif. Justifier la convergence uniforme de la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n(x)$ sur l'intervalle $[\delta, +\infty[$.
2. 3. Soit $S(x) = \sum_{n\geq 1} f_n(x)$. Justifier la continuité de S sur D.
2. 4. Donner un équivalent pour $S(x)$, quand $x \to +\infty$.
2. 5. Calculer de deux méthodes différentes $\lim_{x\to+\infty} S(x)$.

Exercice 2. (10 pts)

On désigne par $E = \mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels, et par F le sous-espace de E constitué des polynômes nuls en 0. T est l'application linéaire définie de E dans E par :

$$P \longmapsto T(P) \ / \ T(P)(x) = xP'(x).$$

1. Montrer que T n'est pas continue quelque soit la norme N choisie sur E.
2. Montrer que T est une bijection de F dans F.
3. Montrer que T^{-1} est continue sur $(F, \ N_1)$, N_1 est la norme donnée pour tout $P \in E$ par :

$$N_1(P) = \sum_{k=0}^{n} |a_k|, \text{où } P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k.$$

4. Calculer $\|T^{-1}\|$ dans $L((F, N_1), (F, N_1))$ l'espace des applications linéaires continues de F dans F.
5. On note N_2 la norme définie sur E par :

$$N_2(P) = \sup_{x\in[0;1]} |P(x)|, \ \forall P \in E.$$

6 Montrer que pour tout $P \in E$ on a $N_2(P) \leq N_1(P)$; et qu' il n'existe pas de constante $C > 0$ telle que $N_1(P) \leq CN_2(P)$.
7. Soit A_α, $\alpha \in \mathbb{R}$, l'application linéaire définie de E dans $\mathbb{R}$ par

$$A_\alpha : P \longmapsto A_\alpha(P) = P(\alpha).$$

Montrer que A_α est continue sur (E, N_2), si et seulement si, $\alpha \in [0,1]$.

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recheche Scientifique
Université des Sciences et de la Technologie d'Oran
Faculté des mathématiques et informatique
Département des mathématiques

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي
جامعة وهران للعلوم والتكنولوجيا
قسم الرياضيات

CONCOURS D'ACCES AUX FORMATIONS DOCTORALES AU TITRE DE L'ANNEE UNIVERSITAIRE 2022-2023

Sujet 2 d'épreuve : Générale (durée 1h30)

Exercice 1. (8pts)

soit q_a la forme quadratique définie par : $q_a : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$

$$q_a(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_1x_2 - 2ax_2x_3 + (1+a)\,x_2^2 + \left(1 + a + a^2\right) x_3^2.$$

1. **(3.5pts)** Déterminer la signature de q_a selon les valeurs de a.
2. **(1.5pts)** On prend $a = 1$. Ecrire S la forme bilinéaire symétrique associée à q_1.
3 **(1pt)** Montrer que S est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^3$.
4 **(2pts)** Trouver une base de $\mathbb{R}^3$ orthonormale pour S par le procédé de Gram-Schmidt.

Exercice 2. (12pts) Soient a et b deux réels strictement positifs

1. **(1.5 pts)** Montrer que la fonction $x \in]0,1] \mapsto x^{ax^b}$ est prolongeable en une fonction f continue sur $[0,1]$.
2. **(4.5 pts)** On considère la série de fonctions $\sum_n f_n$ définie par

$$f_n : x \in [0,1] \mapsto \begin{cases} \frac{1}{n!}\left(ax^b \ln(x)\right)^n & \text{si } x \in]0,1] \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

   a. Montrer que $\sup\limits_{x\in]0,1]} |x^b \ln(x)| = \sup\limits_{y\in]-\infty,0]} |ye^{by}|$ et calculer la valeur de ce supremum.

   b. Montrer que $\sum_n f_n$ converge uniformément sur $[0,1]$ et a pour somme la fonction f.

3. **(1.5 pts)** Montrer que $\displaystyle\int_0^1 x^{ax^b}\,dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \int_0^1 \left(ax^b \ln(x)\right)^n dx.$

4. **(2.5 pts)** Pour $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ et $n \in \mathbb{N}$, on note $I_{\alpha,n} = \displaystyle\int_0^1 x^\alpha (\ln(x))^n dx$.

   a. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $I_{\alpha,n} = -\dfrac{n}{\alpha+1} I_{\alpha,n-1}$.

   b. En déduire que $I_{\alpha,n} = (-1)^n \dfrac{n!}{(\alpha+1)^{n+1}}$.

5. **(2 pts)** Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k a^k}{(bk+1)^{k+1}}$. Montrer que $\displaystyle\int_0^1 x^{ax^b}\,dx = \lim_{n\to+\infty} S_n$.

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université frères Mentouri Constantine 1
Faculté des Sciences Exactes - Département de Mathématiques

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة الإخوة منتوري قسنطينة 1
كلية العلوم الدقيقة ـ قسم الرياضيات

Concours d'accès à la Formation de Doctorat 3ème Cycle pour l'année universitaire 2022/2023

Filière : **Mathématiques** — Spécialité : **Modélisation et Analyse Numérique**

Épreuve :
Éléments finis et différences finies - Stabilité et instabilité des systèmes dynamiques
Durée : 02 heures

Exercice 1. (6 Pts) Éléments Finis

Soit f une fonction donnée de $L^2(I)$ avec $I =]a, b[$ et, soit β un réel non nul. Soient $V = H^1(\bar{I})$ et $p(x)$ et $q(x)$ deux fonctions continues par morceaux définies sur I et vérifiant :

$$0 < p \leq p^* < +\infty,$$
$$0 < q \leq q^* < +\infty.$$

On s'intéresse au problème aux limites (P) suivant :

$$(\mathrm{P})\begin{cases} -\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{du(x)}{dx}\right) + q(x).u(x) & = f(x), \quad \text{pour tout } x \in I, \\ -p(a).\frac{du}{dx}(a) + \beta u(a) & = 0, \\ -p(b).\frac{du}{dx}(b) + \beta u(b) & = 0. \end{cases} \tag{1}$$

Les Questions :

Q1. Donner une **formulation variationnelle** du problème (P) que l'on note :

$$(\mathrm{PV})\begin{cases} \text{Trouver} \quad u \in H^1(\bar{I}) \ \text{tel que :} \\ a(u,v) = l(v), \quad \text{pour tout } v \in V, \end{cases} \tag{2}$$

en définissant la forme bilinéaire $a(.,.)$ et la forme linéaire $l(.)$.

Q2. Montrer que la **forme bilinéaire** $a(.,.)$ est **continue et coercive**. Est-ce que $a(.,.)$ est **symétrique** ?

Q3. Montrer que la **forme linéaire** $l(.)$ est **continue**.

Q4. Y-a-t-il **existence et unicité** des solutions faibles de (P) ? Justifier.

Exercice 2. (5 Pts) Différences Finies

On considère le problème aux limites (P) suivant :

$$(\mathrm{P})\begin{cases} -\Delta u(x,y) & = f(x,y), \quad 0 < x, y < 1, \\ u(x,0) & = g_1(x), \quad x \in]0,1[, \\ u(x,1) & = g_2(x), \quad x \in]0,1[, \\ u(0,y) & = g_3(y), \quad y \in]0,1[, \\ u(1,y) & = g_4(y), \quad y \in]0,1[, \end{cases} \tag{3}$$

Les pas h et k sont des constantes strictement positives.

Les Questions :

Q1. Écrire le schéma numérique associé au problème (P).

Q2. Faire un petit dessin du stencil du schéma numérique obtenu dans la question Q1.

Q3. Écrire le problème approché sous la forme d'un système linéaire $AU := F$ en précisant A, U et le vecteur du second membre F .

Exercice 3. (9 Pts) Systèmes dynamiques

I. On considère le système

$$\begin{cases} x' = x - yx - ax^2, \\ y' = -y + yx - by^2, \end{cases} \qquad (S)$$

où $0 < a < 1$ et $b > 0$ sont des paramètres réels.

1. Déterminer les points d'équilibres du système (S).
2. Linéariser le système (S) et étudier la nature des équilibres du système linéarisé pour $a = \frac{3}{2}$.
3. Que peut-on conclure pour les équilibres du système non linéaire ?

II. Soit le système

$$\begin{cases} x' &= -2y + yz, \\ y' &= x - xz, \\ z' &= xy. \end{cases}$$

En utilisant une fonction de Lyapounov du type $V(x, y, z) = ax^2 + by^2 + cz^2$. Montrer que l'équilibre $(0, 0, 0)$ est stable. En déduire que les trajectoires du système sont sur des ellipsoïdes.

III. Écrire les deux systèmes non-linéaires

$$(S_1) : \begin{cases} x' &= -y + x(1 - r^2) \\ y' &= x + y(1 - r^2) \end{cases}, \qquad (S_2) : \begin{cases} x' &= -y + x(r^2 - 1) \\ y' &= x + y(r^2 - 1) \end{cases},$$

où $r^2 = x^2 + y^2$.

en coordonnées polaires (r, θ). Rechercher et démontrer l'existence d'un cycle limite. Est-il stable ?

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université frères Mentouri Constantine 1
Faculté des Sciences Exactes - Département de Mathématiques

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة الإخوة منتوري قسنطينة 1
كلية العلوم الدقيقة - قسم الرياضيات

Concours d'accès à la Formation de Doctorat 3ème Cycle pour l'année universitaire 2022/2023

Filière : **Mathématiques** Spécialité : **Statistique Appliquée**

Épreuve : Statistique mathématique - Analyse de données.

Durée : 02 heures

Exercice 1. (10 pts)
On considère X une variable aléatoire continue, de densité :

$$f_\theta(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} c \exp\left(-\frac{x^2}{2\theta}\right) 1_{\{x>0\}},$$

avec $\theta > 0$ un paramètre inconnu. La constante c est à déterminer. On considère un n-échantillon $(X_1, \ldots, X_n)$ pour cette loi (variable).

1. Montrer que la constante c est égale à $\frac{1}{\sqrt{\theta}}$. On rappelle que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx = \sqrt{2\pi}.$$

2. Calculer l'espérance $E(X)$ et la variance $Var(X)$ de la variable aléatoire X.
3. Trouver un estimateur de θ par la méthode des moments, noté $\widehat{\theta}_n$. Etudier son biais.
4. Calculer l'information de Fisher pour la variable aléatoire X et ensuite pour le n-échantillon $(X_1, \ldots, X_n)$.
5. Trouver l'estimateur du maximum de vraisemblance de θ. On note cet estimateur par $\widetilde{\theta}_n$.
6. La loi de la variable aléatoire est-elle de type exponentiel ?
7. Etudier le biais et l'exhaustivité de l'estimateur du maximum de vraisemblance.

Exercice 2. (10 pts)
Considérons un échantillon de $n = 5$ individus où chaque individu $x_i \in \mathbb{R}^d$ est décrit par d=3 variables réelles. Cet échantillon est représenté par la matrice $X = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)^t$ suivante :

$$X = \sqrt{10}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

On va faire une ACP centrée réduite de ce jeu de données.

1. Calculer le centre de gravité du nuage de données $\overline{x}$.
2. Calculer la matrice Y des données centrées.
3. Calculer les écarts types σ_i de chacune des variables.

Problème (8 pts) : On considère l'application

$$\partial : \begin{array}{ccc} \mathcal{D}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{D}(\mathbb{R}) \\ \varphi & \longmapsto & \partial\varphi = \varphi' \end{array},$$

et soit $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ une fonction donnée vérifiant $\int_{\mathbb{R}} \psi(x)\, dx = 1$.

1. Montrer que si $\chi \in \operatorname{Im}\partial$, alors $\int_{\mathbb{R}} \chi(x)\, dx = 0$.

2. Montrer que toute fonction $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ se décompose d'une façon unique sous la forme

$$\varphi = c\psi + \chi$$

où c est une constante réelle et $\chi \in \operatorname{Im}\partial$.

Dans toute la suite, X désigne un ouvert de $\mathbb{R}$ et $T \in \mathcal{D}'(X)$.

3. En utilisant la question 1, montrer que

$$\partial T = 0, \text{ si et seulement si, } T = C.1,$$

où 1 est la distribution $\varphi \longmapsto \int_X \varphi(x)\, dx$ et $C \in \mathbb{C}$ est une constante arbitraire.

4. Considérons l'équation

$$\partial T = f,$$

où $f \in \mathcal{C}(X)$ est une fonction donnée non identiquement nulle.

Montrer en utilisant la question **3**, que $T \in \mathcal{C}^1(X)$.

5. Considérons maintenant l'équation

$$\partial T + aT = f,$$

où $f \in \mathcal{C}(X)$ et $a \in \mathcal{C}^\infty(X)$ sont deux fonctions données non identiquement nulles.

En posant $g(x) = e^{\int a(x)dx}$ et en calculant au sens de distributions $\partial(gT)$, montrer que $T \in \mathcal{C}^1(X)$.