

1. Introduction

Les vibrations font partie intégrante de notre univers. Le moindre mouvement entraîne des vibrations d'amplitude et de durée variables, depuis l'oscillation lente d'un pont suspendu excité par le vent jusqu'au choc engendré à l'atterrissage par un avion, en passant par le bruit des moteurs des voitures. On s'intéresse aux vibrations des structures pour les principales raisons suivantes :

- Problèmes de dysfonctionnements et de destruction des structures soumises à des vibrations surtout en basses fréquences.
- Maintenance vibratoire : À partir de la mesure des vibrations régulièrement recueillies sur une machine tournante, l'analyse vibratoire consiste à détecter d'éventuels dysfonctionnements et à suivre leur évolution dans le but de planifier ou reporter une intervention mécanique.
- Rayonnement acoustique : L'étude du bruit produit par une machine tournante nécessite la connaissance assez précise de leur comportement vibratoire. À partir du mesure du bruit rayonné par une machine tournante, on peut diagnostiquer leurs panes.

2 Vibrations des systèmes discrets

2.1 Système a un degré de liberté

La figure 1 définit le système à un degré de liberté $x(t)$, constitué d'une masse m , d'un ressort de raideur k , et d'un amortisseur visqueux de coefficient c .

$x(t)$ est le déplacement qui définit la position de la masse m à partir de la position d'équilibre statique, déterminée par l'action de la pesanteur. $f(t)$ est la force extérieure agissant sur la masse m .

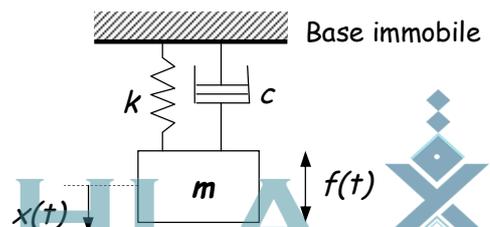


Figure 1: Système à 1 ddl

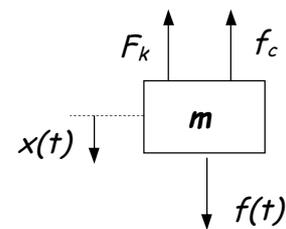
2.1.1 Équation du mouvement

L'équation du mouvement de la masse m est obtenue en appliquant deux méthodes : la loi de Newton et les équations de Lagrange.

- Loi de Newton : $\sum f = m\ddot{x}$

$f_k = k(0 - x(t)) = -kx(t)$: est la force de rappel du ressort

$f_c = c(0 - \dot{x}(t)) = -c\dot{x}(t)$: est la force due à l'amortissement



L'équation du mouvement est alors :

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = f(t) \tag{1}$$

Remarque : En prenant pour origine du mouvement, la longueur initiale du ressort, l'effet de la pesanteur est introduite comme une force extérieure. Pour un système non amorti (figure 2), l'équation du mouvement s'obtient à partir de :

$$m\ddot{X}(t) + kX(t) = f(t) + mg$$

Avec :

$X(t) : x_{st} + x(t)$: déplacement total

x_{st} : déplacement statique

$x(t)$: déplacement dynamique

$mg = kx_{st}$: poids de la masse m

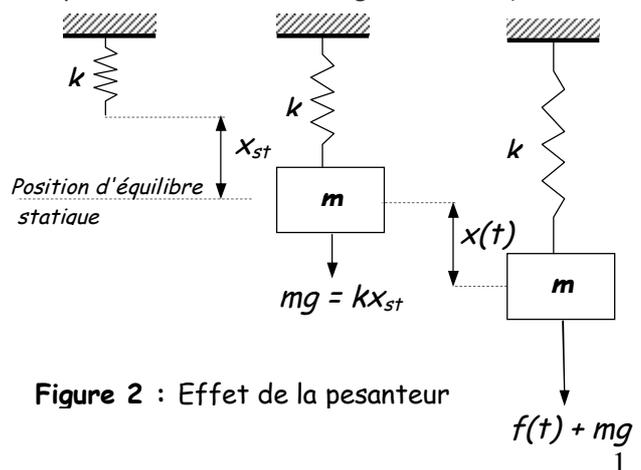


Figure 2 : Effet de la pesanteur

L'équation du mouvement devient alors :

$$m\ddot{x}(t) + kx(t) = f(t)$$

Donc la pesanteur ne modifie pas le comportement dynamique du système.

- Équations de Lagrange :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial \dot{x}} = Q \quad (2)$$

Avec : $T = \frac{1}{2} m\dot{x}^2$: L'énergie cinétique totale du système

$V = \frac{1}{2} kx^2$: L'énergie potentiel totale du système

$U = \frac{1}{2} c\dot{x}^2$: L'énergie de dissipation totale du système

$Q = f(t)$: La force généralisée extérieur appliquée sur le système

En appliquant l'équation (2), on obtient l'équation du mouvement du système de la figure (1) :

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = f(t)$$

Remarque : Pour un système conservatif ($U = 0$), l'équation de Lagrange peut s'écrire :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

Avec : $L = T - V$ est appelé Lagrangien.

2.1.2 Vibrations libres non amorties

En absence de l'amortissement et de la force extérieur, le mouvement libre non amortie se traduit par :

$$m\ddot{x}(t) + kx(t) = 0 \quad (3)$$

L'équation (3) est une équation différentielle linéaire à coefficients constants, dont la solution s'écrit sous la forme suivante :

$$x(t) = Ae^{rt} \quad (4)$$

En dérivant et en reportant (4) dans (3), on obtient l'équation caractéristique :

$$r^2 + k/m = 0 \quad (5)$$

Dont les racines r_1 et r_2 sont : $r_1 = \sqrt{\Delta}/2$, $r_2 = -\sqrt{\Delta}/2$. Avec $\sqrt{\Delta} = -2j\sqrt{k/m} = -2j\omega$.

La pulsation naturelle est $\omega = \sqrt{k/m}$. Donc, La solution donnée par (4) est :

$$x(t) = A_1 e^{j\omega t} + A_2 e^{-j\omega t} \quad (6)$$

En utilisant l'équation d'Euler : $e^{\pm j\omega t} = \cos \omega t \pm j \sin \omega t$, l'équation (6) prend la forme suivante :

$$x(t) = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t \quad (7)$$

C_1 et C_2 sont des constantes qui peuvent être exprimées en fonction des conditions initiales à $t = 0$, c'est-à-dire le déplacement x_0 et la vitesse \dot{x}_0 : $C_1 = x_0$, $C_2 = \dot{x}_0/\omega$. L'équation (7), devient (figure 3) :

$$x(t) = x_0 \cos \omega t + \frac{\dot{x}_0}{\omega} \sin \omega t \quad (8)$$

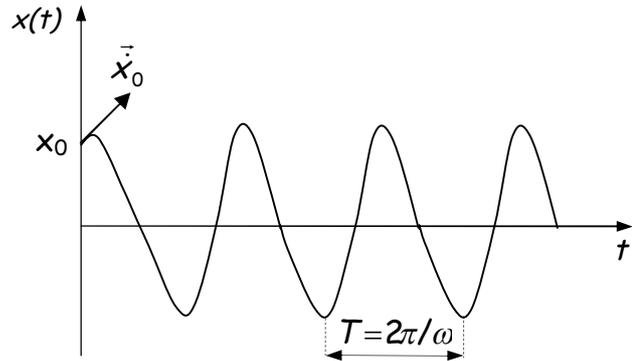


Figure 3 : Réponse en oscillation libre non amortie

2.1.3 Vibrations libres amortis

En présence de l'amortissement et en absence de la force extérieure, le mouvement libre se traduit par :

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = 0 \quad (9)$$

L'équation (9) est une équation différentielle linéaire à coefficients constants, dont la solution s'écrit sous la forme (4). En dérivant et en reportant (4) dans (9), on obtient l'équation caractéristique :

$$r^2 + \frac{c}{m}r + \frac{k}{m} = 0 \quad (10)$$

Dont les racines r_1 et r_2 sont :

$$r_1 = -\frac{c}{2m} + \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \omega^2}, \quad r_2 = -\frac{c}{2m} - \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \omega^2} \quad (11)$$

La forme des solutions de (4) dépend du signe de Δ , nous examinons les trois cas suivants :

1^{er} cas : Système à amortissement critique ($\Delta = 0$)

→ $\frac{c}{2m} = \omega$. On définit le coefficient d'amortissement critique : $c_{cr} = 2m\omega$. On met ainsi, en

évidence deux paramètres facilement mesurables : la pulsation ω et le **facteur d'amortissement** $\xi = c/c_{cr} = c/2m\omega$. Dans ce cas $\xi = 1$, très rare dans les systèmes mécaniques, la réponse ne présente aucune oscillation au cours du temps et le déplacement tend vers 0 au bout d'un temps infini. On peut en déduire que l'amortissement critique correspond à la plus petite valeur de l'amortissement pour laquelle la réponse en vibration libre ne comporte pas d'oscillations. Les racines r_1 et r_2 sont doubles :

$$r_1 = r_2 = -c/2m = -\omega$$

Le mouvement s'obtient par :

$$x(t) = (A_1 + A_2 t)e^{-\omega t} \quad (12)$$

En introduisant les conditions initiales, on obtient la forme finale de la réponse dans le cas d'un amortissement critique (figure 4) :

$$x(t) = (x_0(1 + \omega t) + \dot{x}_0 t)e^{-\omega t} \quad (13)$$

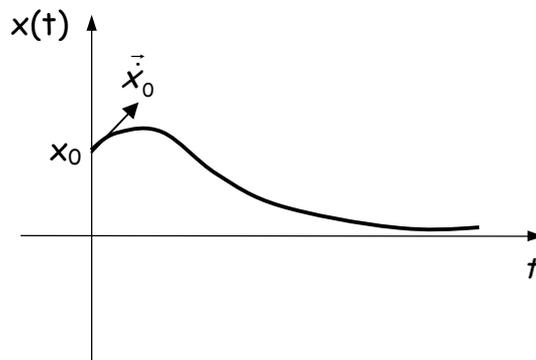


Figure 4 : Réponse en oscillation libre à amortissement critique

2^{ème} Cas : Système sou-amortis ($\Delta < 0$)

→ $c < 2m\omega \rightarrow \xi < 1$, ce cas est très répandu en pratique. Les racines de (10) s'écrivent :

$$r_1 = -\xi\omega + j\omega\sqrt{1-\xi^2}; \quad r_2 = -\xi\omega - j\omega\sqrt{1-\xi^2} \quad (14)$$

L'expression du déplacement $x(t)$ s'écrit :

$$x(t) = e^{-\xi\omega t} (A_1 e^{j\omega_d t} + A_2 e^{-j\omega_d t}) \quad (15)$$

En utilisant l'expression d'Euler et les conditions initiales, l'expression (15) peut s'écrire :

$$x(t) = e^{-\xi\omega t} \left(\frac{\dot{x}_0 + x_0 \xi \omega}{\omega_d} \sin \omega_d t + x_0 \cos \omega_d t \right) \quad (16)$$

Avec $\omega_d = \omega\sqrt{1-\xi^2}$ s'appelle **pulsation propre amortie**.

L'expression (16) peut s'écrire sous la forme d'un vecteur tournant :

$$x(t) = A e^{-\xi\omega t} \cos(\omega_d t - \phi)$$

Avec :

$$A = \left(\left(\frac{\dot{x}_0 + x_0 \xi \omega}{\omega_d} \right)^2 + x_0^2 \right)^{1/2}$$

$$\phi = \arctg \left(\frac{\dot{x}_0 + x_0 \xi \omega}{\omega_d x_0} \right)$$

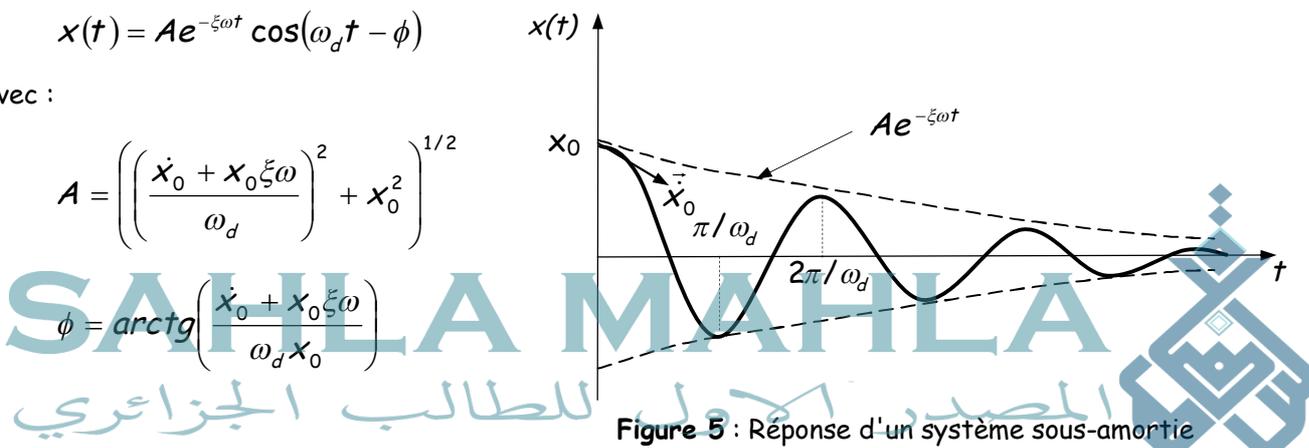
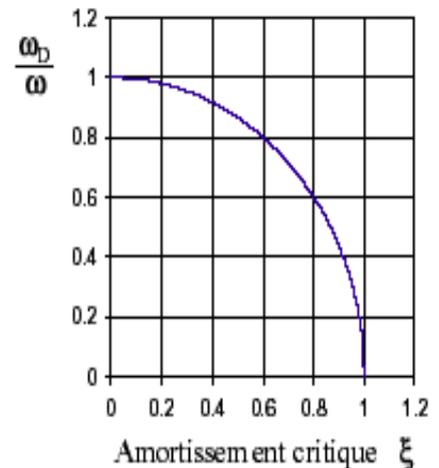


Figure 5 : Réponse d'un système sous-amortie

3^{ème} Cas : Système sur-amortis ($\Delta > 0$)

→ $(c/2m)^2 > \omega^2 \rightarrow \xi > 1$, dans ce cas, les racines de l'équation caractéristique (10) sont :

$$r_1 = -\xi\omega + \omega\sqrt{\xi^2 - 1}; \quad r_2 = -\xi\omega - \omega\sqrt{\xi^2 - 1} \quad (17)$$

D'où l'expression du déplacement $x(t)$:

$$x(t) = e^{-\xi\omega t} (A_1 e^{\hat{\omega}t} + A_2 e^{-\hat{\omega}t}) \quad \text{ou bien} \quad x(t) = e^{-\xi\omega t} (A \sinh \hat{\omega}t + B \cosh \hat{\omega}t) \quad (18)$$

Avec $\hat{\omega} = \omega\sqrt{\xi^2 - 1}$. La figure 6 représente le déplacement de la masse m en fonction du temps, pour trois valeurs du facteur d'amortissement ξ . Pour le cas le plus couramment rencontré $0 < \xi < 1$, le déplacement du mouvement libre oscille harmoniquement avec une amplitude décroissante par la présence de l'amortissement et avec une pulsation très proche de $\omega = \sqrt{k/m}$ lorsque ξ^2 est négligeable devant 1.

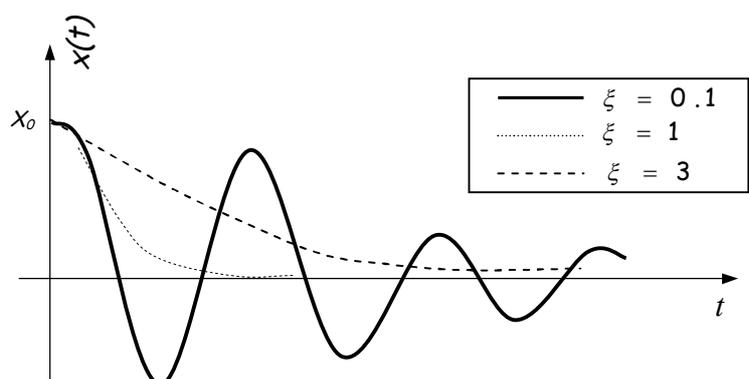


Figure 6 : Mouvement Libre amortie

Remarques :

1. Si le coefficient d'amortissement C est négatif ($\xi\omega < 0$), l'évolution du déplacement $x(t)$ en fonction du temps, tend vers l'infini (figure 7) : on définit ainsi l'**instabilité**.

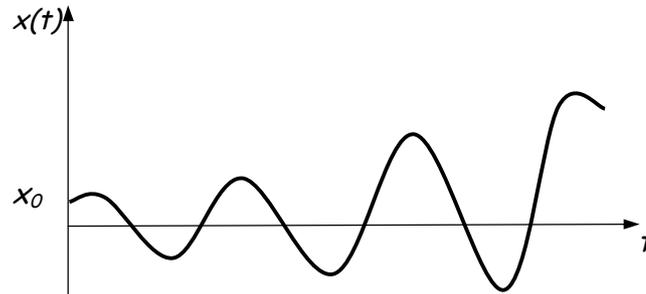


Figure 7 : Instabilité du mouvement libre amortie

2. La résolution de l'équation caractéristique (10) peut être présentée sous la forme matricielle suivante :

$$(mr^2 + cr + k)X_0 = 0 \Leftrightarrow r \begin{bmatrix} 0 & -m \\ m & c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} rX_0 \\ X_0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} rX_0 \\ X_0 \end{Bmatrix} = 0$$

Ou bien

$$rB\delta_0 + D\delta_0 = 0 \Rightarrow D^{-1}B\delta_0 = -\frac{1}{r}\delta_0 \Rightarrow A\delta_0 = -\frac{1}{r}\delta_0 \tag{19}$$

Cette présentation sera utilisée pour les systèmes à plusieurs degrés de liberté ; elle met en évidence la liaison entre la recherche de r et le problème aux valeurs propres (19).

2.1.4 Vibrations forcées

2.1.4.1 Système non amortie

Dans le cas d'une excitation par une force sinusoïdale (harmonique), de pulsation Ω et d'amplitude constante F , l'équation du mouvement (3) devient :

$$m\ddot{x}(t) + kx(t) = F \sin\Omega t \tag{20}$$

La solution générale de cette équation (20), est égale à la somme de la solution homogène de mouvement libre (équation sans second membre) et d'une solution particulière dont la forme dépend du second membre.

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t) \tag{21}$$

La solution homogène est donnée par l'expression (7) :

$$x_h(t) = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t \tag{22}$$

La solution particulière due à un chargement harmonique est harmonique, en phase avec le chargement:

$$x_p(t) = A \sin\Omega t \tag{23}$$

En substituant la solution particulière (23) dans l'équation du mouvement (20), On obtient.

$$-m\Omega^2 A \sin\Omega t + KA \sin\Omega t = F \sin\Omega t$$

Donc l'amplitude de la solution particulière devient:

$$A = \frac{F}{k} \frac{1}{1 - \beta^2} \tag{24}$$

Où β est le rapport de la fréquence du chargement et de la fréquence propre d'oscillation libre, ou encore rapport des fréquences : $\beta = \Omega/\omega$.

La solution générale est donc la somme de la solution homogène (22) et de la solution particulière (23) :

$$x(t) = C_1 \sin \omega t + C_2 \cos \omega t + \frac{F}{k} \frac{1}{1-\beta^2} \sin \Omega t \quad (25)$$

Si le système est initialement au repos, c'est-à-dire $x(0) = \dot{x}(0) = 0$, les constantes C_1 et C_2 sont :

$$C_1 = -\frac{F\beta}{k} \frac{1}{1-\beta^2} ; C_2 = 0 \quad (26)$$

La solution générale (29) devient alors :

$$x(t) = \frac{F}{k} \frac{1}{1-\beta^2} (-\beta \sin \omega t + \sin \Omega t) \quad (27)$$

Où :

$F/k = x_{st}$: Déplacement statique; c'est le déplacement qui serait produit par la force F appliquée statiquement.

$1/(1-\beta^2)$: Facteur d'amplification représentant l'effet d'amplification dynamique de la charge harmonique.

$\sin \Omega t$: Composante de la réponse ayant la fréquence de la charge appliquée «réponse en oscillation permanente, directement liée à la charge appliquée».

$\beta \sin \omega t$: Composante de la réponse ayant la fréquence propre du système «effet d'oscillation libres qui dépend des condition initiales».

Remarque : Comme en pratique, l'amortissement fera tôt ou tard disparaître le dernier terme, on l'appelle également **réponse transitoire** (figure 8).

Facteur de réponse :

$$R(t) = \frac{x(t)}{x_{st}} = \frac{x(t)}{F/k} = \frac{1}{1-\beta^2} (\sin \Omega t - \beta \sin \omega t) \quad (28)$$

2.1.4.2 Système amortie

Dans le cas d'une excitation par une force sinusoïdale, de pulsation Ω et d'amplitude constante F , l'équation du mouvement (1), divisée par m devient :

$$\ddot{x}(t) + 2\xi\omega\dot{x}(t) + \omega^2 x(t) = \frac{F}{m} \sin \Omega t \quad (29)$$

Comme dans le cas d'un système non amortie, la solution de l'équation (29) est composée d'une solution homogène et d'une solution particulière. La solution homogène est donnée par (système sous-amortie) :

$$x_h(t) = e^{-\xi\omega t} (C_1 \sin \omega_d t + C_2 \cos \omega_d t) \quad (30)$$

La réponse dynamique d'un système amortie n'est généralement pas en phase avec le chargement appliquée, la solution particulière est sous la forme :

$$x_p(t) = A_1 \sin \Omega t + A_2 \cos \Omega t \quad (31)$$

Remplaçons l'expression (31) dans l'équation (29) et en séparant les termes en sinus et en cosinus, on a :

$$\begin{aligned} (-A_1\Omega^2 - A_2\Omega(2\xi\omega) + A_1\omega^2)\sin \Omega t &= \frac{F}{m} \sin \Omega t \\ (-A_2\Omega^2 + A_1\Omega(2\xi\omega) + A_2\omega^2)\cos \Omega t &= 0 \end{aligned} \quad (32)$$

Divisons (32) par ω^2 , on obtient :

$$\begin{aligned} A_1(1 - \beta^2) - A_2(2\xi\beta) &= \frac{F}{k} \\ A_2(1 - \beta^2) + A_1(2\xi\beta) &= 0 \end{aligned} \tag{33}$$

D'où les facteurs de la réponse :

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{F}{k} \frac{1 - \beta^2}{(1 - \beta^2) + (2\xi\beta)^2} \\ A_2 &= \frac{F}{k} \frac{-2\xi\beta}{(1 - \beta^2) + (2\xi\beta)^2} \end{aligned} \tag{34}$$

La solution générale sera :

$$x(t) = \underbrace{e^{-\xi\omega t} (C_1 \sin\omega_d t + C_2 \cos\omega_d t)}_{\text{Solution transitoire}} + \underbrace{\frac{F}{k} \frac{1}{(1 - \beta^2) + (2\xi\beta)^2} [(1 - \beta^2) \sin\Omega t - 2\xi\beta \cos\Omega t]}_{\text{Solution permanente}} \tag{35}$$

La composante permanente de la réponse peut d'onc s'exprimer par :

$$x_p(t) = A \sin(\Omega t - \phi) \tag{36}$$

Avec A représente l'amplitude de la réponse permanente, ϕ son déphasage ($0 < \phi < 180$) :

$$A = \frac{F}{k} [(1 - \beta^2) + (2\xi\beta)^2]^{-0.5} \tag{37}$$

$$\phi = \text{arctg}\left(\frac{2\xi\beta}{1 - \beta^2}\right)$$

On peut représenter la solution permanente par un vecteur tournant (figure 9). Le rapport D de l'amplitude de la réponse en mouvement permanent et du déplacement statique qui serait produit par la force F s'appelle facteur d'amplification dynamique, il s'écrit:

$$D = \frac{A}{F/k} = [(1 - \beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2]^{-0.5} \tag{38}$$

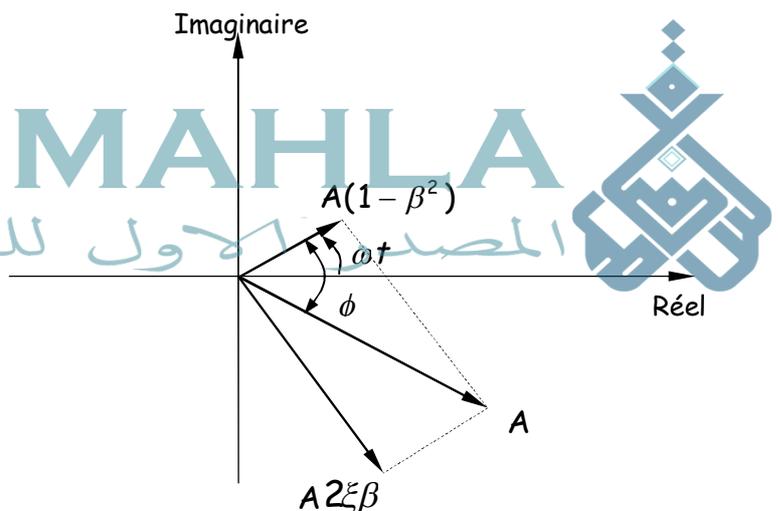


Figure 9 : Représentation du mouvement permanent par un vecteur tournant

Au cours du temps, le premier terme de (35) tend vers zéro du fait de l'amortissement. Dès que la durée devient supérieure à 2 fois la période de vibration propre $T = 2\pi/\omega$ de l'oscillateur, la réponse associée au mouvement libre devient négligeable devant la réponse forcée associée au mouvement permanent, comme le montre l'exemple de la figure 10.

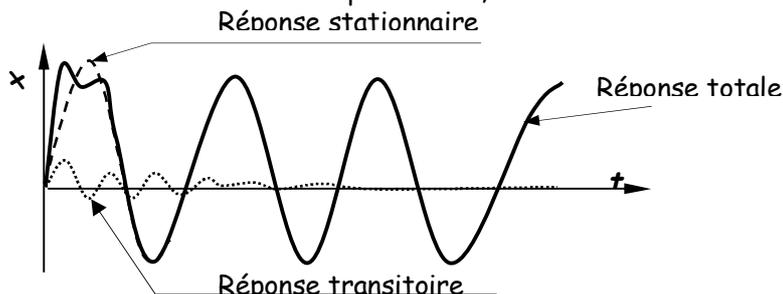


Figure 10 : Mouvement de la masse en fonction du temps.

La figure 11 représente la variation du facteur d'amplification dynamique D en fonction du rapport $\beta = \Omega/\omega$, pour différentes valeurs du facteur d'amortissement ξ . L'analyse de cette représentation met en évidence un maximum de réponse vibratoire lorsque la pulsation Ω de l'excitation est égale à ω ; c'est la résonance d'amplitude.

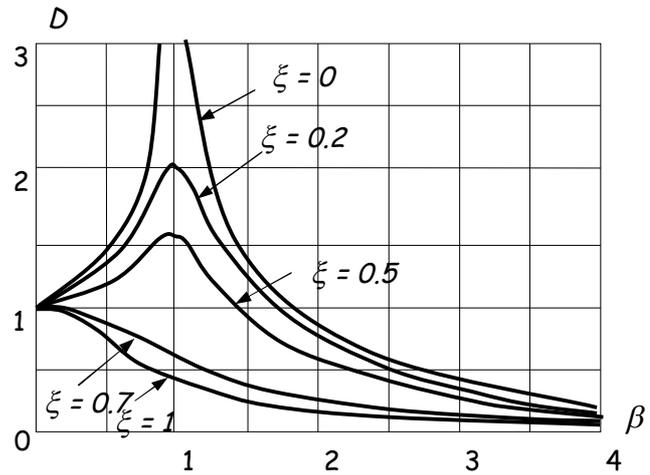


Figure 11 : Variation du facteur d'amplification dynamique D en fonction de ξ et β

La variation de la phase ϕ , entre le mouvement de la masse m et de la force excitatrice, en fonction de la pulsation d'excitation Ω est caractérisé (figure 12) par :

- L'angle de déphasage est compris entre 0 et 180 degrés, avec un passage à 90 degrés à la pulsation ω ; c'est la résonance de phase.
- Pour un faible amortissement, le passage par cette résonance provoque un changement de phase de 180 degrés environ.

Pour les systèmes peu amortis, la résonance de phase et la résonance d'amplitude apparaissent comme confondus; on parle de **résonance** sans précision. Cette fréquence de $\omega/2\pi$, ne dépend que de la rigidité et de la masse du système; sa détermination se fait indépendamment de la force d'excitation et de l'amortissement ξ .

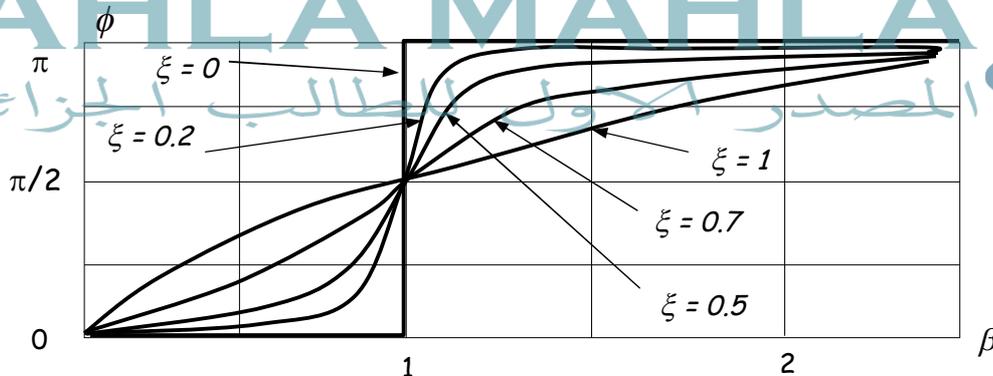


Figure 12 : Déphasage entre le déplacement et la force excitatrice en fonction de β

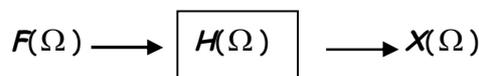
Remarques : En notation complexe, si la force excitatrice s'exprime par $f(t) = F e^{j\Omega t}$, la solution particulière de l'équation du mouvement forcée semblable à (36) peut être choisie sous la forme

$$x(t) = A e^{j\Omega t} \tag{39}$$

Avec A complexe. On obtient donc :

$$\frac{A}{F} = \frac{1/k}{1 - \beta^2 + j2\xi\beta} = H(\Omega) \tag{40}$$

$H(\Omega)$ est la fonction de transfert du système vibratoire forcé définie par :



En notant $H = u + jv$, on peut écrire :

$$u = \frac{1 - \beta^2}{k[(1 - \beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2]} \quad (41)$$

$$v = \frac{-2\xi\beta}{k[(1 - \beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2]} \quad (42)$$

Un tracé (figure 13) de $H(\Omega)$ dans le plan complexe, pour Ω croissant, décrit un cercle dans le sens inverse du sens trigonométrique (diagramme de Nyquist) ; ce cercle est défini par l'équation suivante :

$$u^2 + \left(v + \frac{1}{4k\xi\beta}\right)^2 = \frac{1}{(4k\xi\beta)^2} \quad (43)$$

Le cercle est gradué en pulsations ; la pulsation propre ω (position de la plus grande amplitude) est diamétralement opposée à l'origine O du système d'axe (u, v) . On peut aussi montrer qu'en utilisant ω_1 et ω_2 diamétralement opposées sur le diamètre perpendiculaire à l'axe des imaginaires, on a :

$$2\xi \approx \frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega} \quad \text{pour } \xi \text{ faible}$$

Enfin, si R est le rayon du cercle on peut déterminer k par : $k \approx \frac{1}{4R\xi}$ et déduire m par : $m \approx \frac{k}{\omega^2}$.

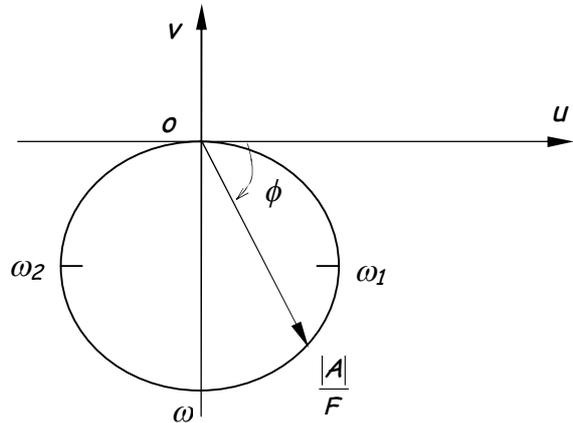


Figure 13 : Diagramme de Nyquist (avec $tg\phi = \frac{2\xi\beta}{1 - \beta^2}$)

2.1.5 Résonance

Pour comprendre la nature de la réponse résonante d'une structure à un chargement harmonique, il est nécessaire de considérer l'équation générale de la réponse (35), dans laquelle interviennent à la fois le terme permanent et le terme transitoire. A la fréquence de résonance ($\beta = 1$) cette équation devient:

$$x(t) = e^{-\xi\omega t} (C_1 \sin \omega_d t + C_2 \cos \omega_d t) - \frac{F}{2\xi k} \cos \Omega t \quad (44)$$

Supposons que le système soit au repos à l'instant initial ($x(0) = 0 = \dot{x}(0)$):

$$C_1 = \frac{F}{k} \frac{\omega}{2\omega_d} = \frac{F}{k} \frac{1}{2\sqrt{1 - \xi^2}}, \quad C_2 = \frac{F}{k} \frac{1}{2\xi} \quad (45)$$

L'équation (44) devient :

$$x(t) = \frac{1}{2\xi} \frac{F}{k} \left[e^{-\xi\omega t} \left(\frac{\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}} \sin \omega_d t + \cos \omega_d t \right) - \cos \Omega t \right] \quad (46)$$

En ce qui concerne l'amortissement, le terme en sinus de cette équation contribuera très peu à l'amplitude de la réponse; de plus la fréquence amortie est presque égale à la fréquence non amortie. Ainsi le facteur de réponse dans ce cas peut être approché par :

$$R(t) = \frac{x(t)}{F/k} \approx \frac{1}{2\xi} (e^{-\xi\omega t} - 1) \cos \omega t \quad (47)$$

Pour un amortissement nul, l'équation (46) devient indéterminée, mais si on applique la règle de l'Hospital on trouve la réponse résonante du système non amorti :

$$R(t) = \frac{1}{2} (\sin \omega t - \omega t \cos \omega t) \quad (48)$$

Les équations (47) et (48) sont représentées graphiquement à la Figure 14 qui montre comment la réponse s'amplifie en cas de **résonance**, avec et sans amortissement:

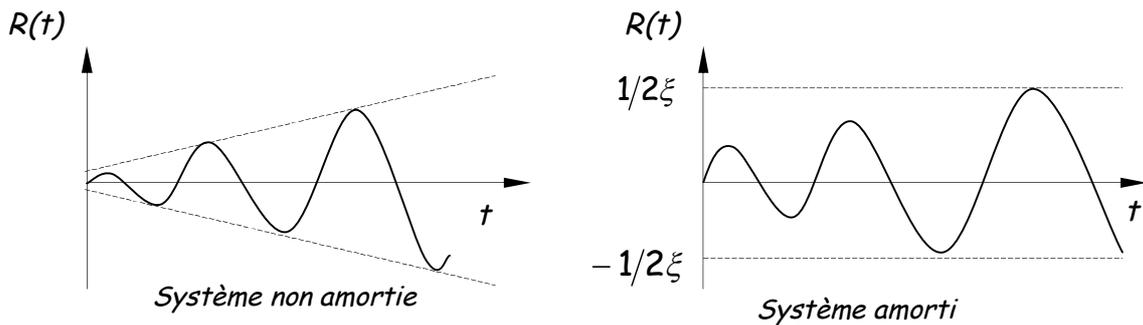


Figure 14 : Réponse à un chargement en résonance ($\beta = 1$) pour des conditions initiales au repos

2.1.6 Amortissement

L'amortissement joue un rôle prépondérant dans l'atténuation du niveau vibratoire à la fréquence de résonance, sa connaissance est donc très importante pour les systèmes réels. Sa représentation visuelle caractérisée par ξ , peut être déterminée :

1. En utilisant l'expression de la réponse du mouvement libre (15) et en l'exprimant pour deux amplitudes maximales successifs et positifs séparées d'une période $T = 2\pi/\omega_d$ (voir figure 5) :

$$x(t_n) = Ae^{-\xi\omega t_n}$$

$$x(t_{n+1}) = Ae^{-\xi\omega(t_{n+1})} = Ae^{-\xi\omega\left(t_n + \frac{2\pi}{\omega_d}\right)} = Ae^{-\xi\omega(t_{n+1})} e^{-2\pi\xi\frac{\omega}{\omega_d}}$$

Le logarithme népérien du rapport de ces deux amplitudes (**décroissement logarithmique δ**) donne :

$$\delta = \log\left(\frac{x_n}{x_{n+1}}\right) = \frac{2\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \quad (49)$$

Pour $\xi \ll 1$, cette expression permet d'obtenir le facteur d'amortissement en mesurant le décroissement logarithmique δ :

$$\delta \approx 2\pi\xi \quad (50)$$

De (49) et (50), on écrit et développe en série de Taylor,

$$\frac{x_n}{x_{n+1}} = e^\delta \approx e^{2\pi\xi} = 1 + 2\pi\xi + \frac{(2\pi\xi)^2}{2!} + \dots$$

En négligeant les termes d'ordre supérieur, on exprime le facteur d'amortissement comme suite :

$$\xi = \frac{x_n - x_{n+1}}{2\pi x_{n+1}} \quad (51)$$

2. Par la méthode de la largeur de bande à -3dB, qui consiste pour des valeurs suffisamment faibles de ξ , à mesurer l'intervalle des fréquences situées autour de la fréquence de résonance ω_0 , correspondant à une diminution de -3dB de l'amplitude (Figure 15)

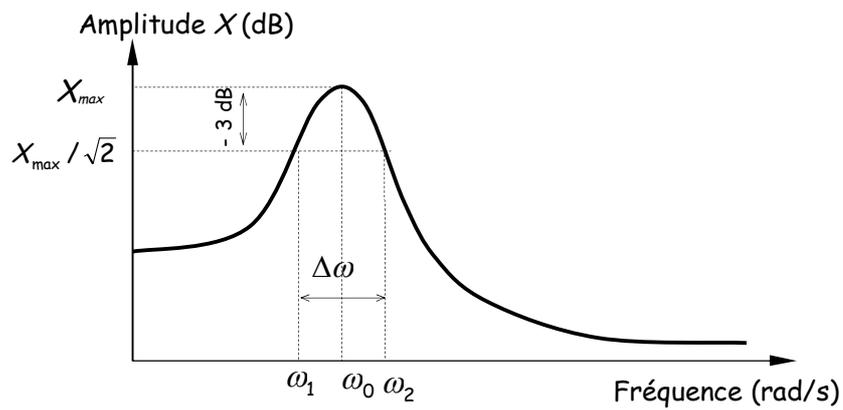


Figure 15 : Méthode de la largeur de bande à -3 dB

Avec :

$$X(\omega_1) = X(\omega_2) = \frac{X_{\max}}{\sqrt{2}} \Rightarrow 20 \log_{10} \frac{X(\omega_1)}{X_{\max}} = 20 \log_{10} \frac{X(\omega_2)}{X_{\max}} = -3 \text{ dB} \quad (52)$$

ω_1 et ω_2 satisfont l'équation suivante :

$$\frac{X_{\max}}{\sqrt{2}} = \frac{F/k}{2\sqrt{2\xi}} = \frac{F/k}{[(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2]^{0.5}}$$

qui donne :

$$\left(\frac{\omega_{1,2}}{\omega_0}\right)^2 = 1 - 2\xi^2 \pm 2\xi\sqrt{1 + \xi^2}$$

ou bien :

$$\left(\frac{\omega_1}{\omega_0}\right)^2 \approx 1 - 2\xi \quad \text{et} \quad \left(\frac{\omega_2}{\omega_0}\right)^2 \approx 1 + 2\xi \quad \text{pour} \quad \xi \ll 1$$

or

$$\left(\frac{\omega_2}{\omega_0}\right)^2 - \left(\frac{\omega_1}{\omega_0}\right)^2 = (\omega_2 - \omega_1)(\omega_2 + \omega_1)/2 = 2\Delta\omega/\omega_0 = 4\xi$$

d'où

$$2\xi \approx \frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{1}{Q} \quad (53)$$

Q est le facteur de surtension.

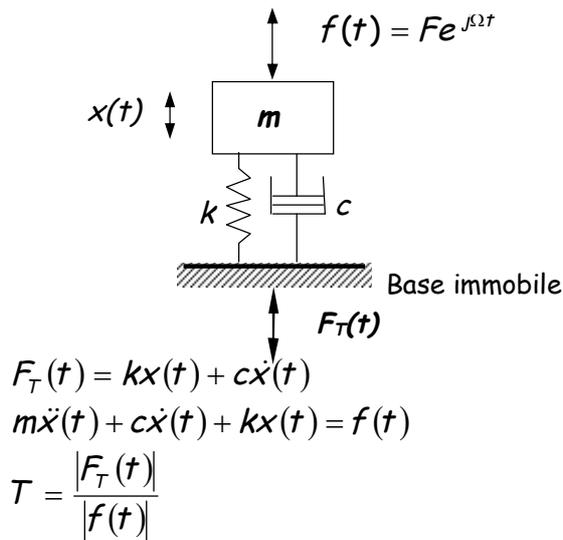
2.1.7 Transmissibilité

La transmissibilité est définie par un rapport entre un mouvement et son effet à travers un système masse- ressort- amortisseur. On peut l'exprimer de deux façons :

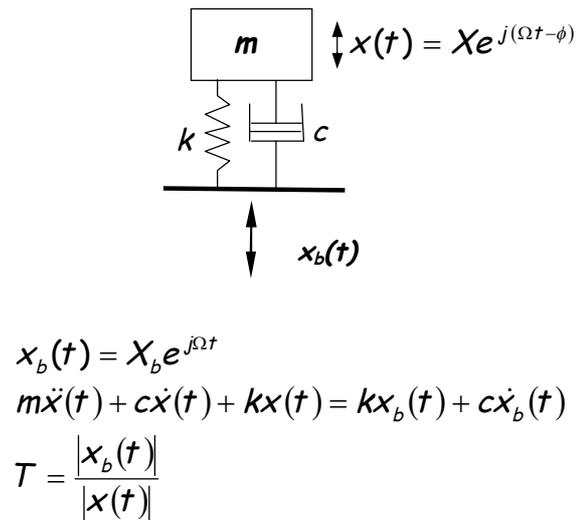
- Transmissibilité en force : c'est le rapport entre les modules de la force transmise à une base immobile, et de la force d'excitation de la masse m .
- Transmissibilité en déplacement : c'est le rapport entre les modules du mouvement de la masse m , et du mouvement imposé à la base mobile.

Dans le cas d'un mouvement harmonique de pulsation Ω , ces deux voies se résument par :

a. Transmissibilité en force



b. Transmissibilité en déplacement



La résolution de ces deux configurations aboutit à l'expression suivante :

$$T = \left[\frac{1 + (2\xi\beta)^2}{(1 - \beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2} \right]^{0.5} \tag{54}$$

Pour différentes valeurs de l'amortissement ξ , la figure 16 représente les variations de la transmissibilité en fonction de la pulsation Ω .

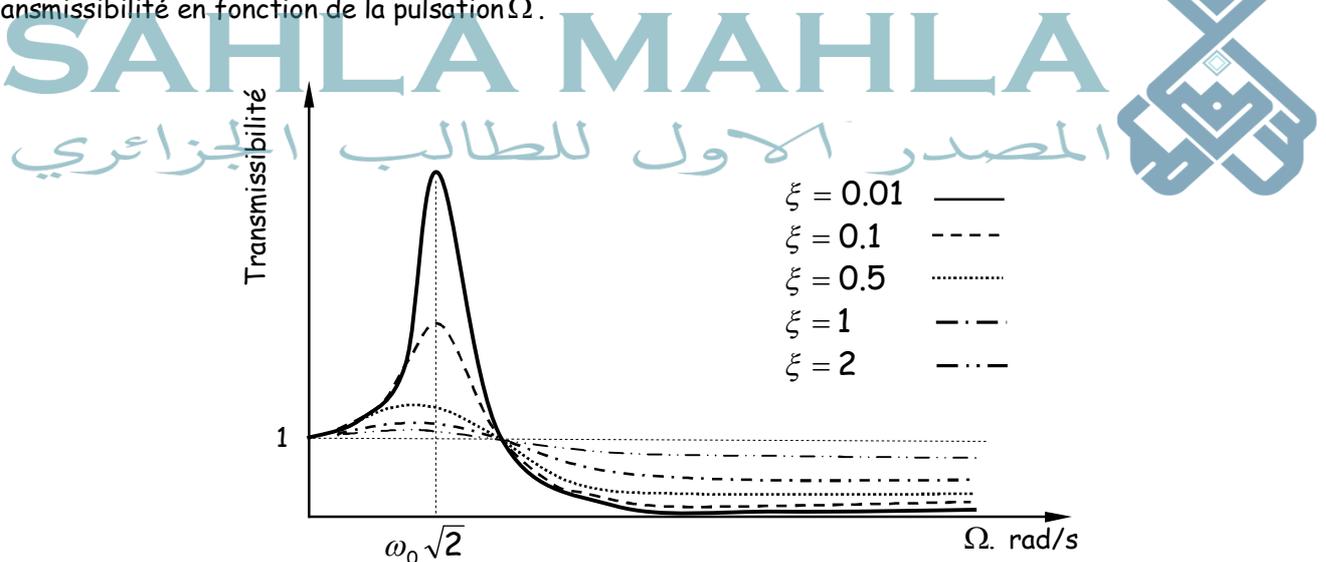


Figure 16 : Transmissibilité en fonction de la pulsation d'excitation Ω .

L'analyse de ces courbes permet de conclure que pour avoir une bonne isolation, il faut :

- Que la zone de fonctionnement soit telle que $\Omega \gg \omega_0 \sqrt{2}$
- Et choisir dans cette zone, un ξ petit mais assurant une résistance du système (ressort+amortisseur) au passage de Ω par la résonance ω_0 .

2.2 Système a deux degrés de liberté

Le passage par l'étude d'un système à deux degrés de liberté, permet de compléter l'analyse des phénomènes observés pour un degré de liberté et mettre en place sur des exemples simples, les méthodes de calcul utilisées pour les systèmes à plus de deux degrés de liberté.

2.2.1 Mouvement libre non amorti

Dans le cas d'un système non amorti (voir Figure 17), l'utilisation des théorèmes généraux de la dynamique ou les équations de Lagrange aboutit aux équations du mouvement des masses m_1 et m_2 :

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 + (k_1 + k_2)x_1 - k_2 x_2 &= 0 \\ m_2 \ddot{x}_2 + k_2 x_2 - k_2 x_1 &= 0 \end{aligned} \quad (55)$$

C'est un système d'équations différentielles à coefficients constants, qui se présente sous une forme matricielle suivante :

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Où $[M] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}$ est la matrice masse

$$[K] = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \text{ est la matrice raideur}$$

Les solutions de ce système, décrivant le mouvement libre, sont obtenues à partir de :

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} e^{j\omega t} \quad (57)$$

Remplaçons (57) dans (56), nous arrivons à la résolution d'un problème aux valeurs et aux vecteurs propres suivant :

$$([K] - \omega^2 [M])\{X\} = \{0\} \quad (58)$$

Le sens physique de ces valeurs et vecteurs propres est décrit pour le cas particulier ou : $m_1 = 3m$, $m_2 = m$ et $k_1 = k_2 = k$. La résolution de (58) donne :

$$\begin{aligned} \omega_1 &= 0.482 \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{et} \quad \Phi_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1.303 \end{Bmatrix} \\ \omega_2 &= 1.197 \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{et} \quad \Phi_2 = \begin{Bmatrix} 1 \\ -2.303 \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (59)$$

ω_1 et ω_2 représentent les pulsations propres, sur lesquelles vibre le système décrit par la figure (17), Φ_1 et Φ_2 sont les modes propres vibratoires associés à chacune des pulsations propres ω_1 et ω_2 on peut les schématiser par la représentation suivante :

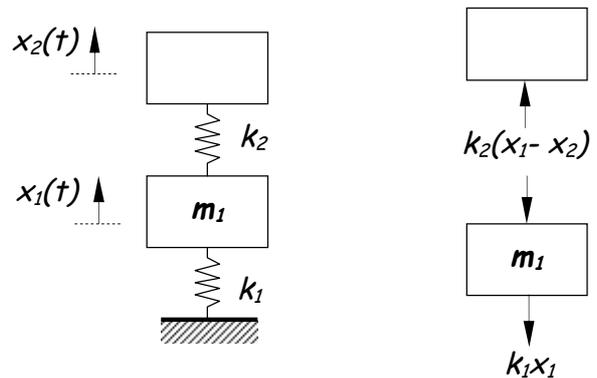
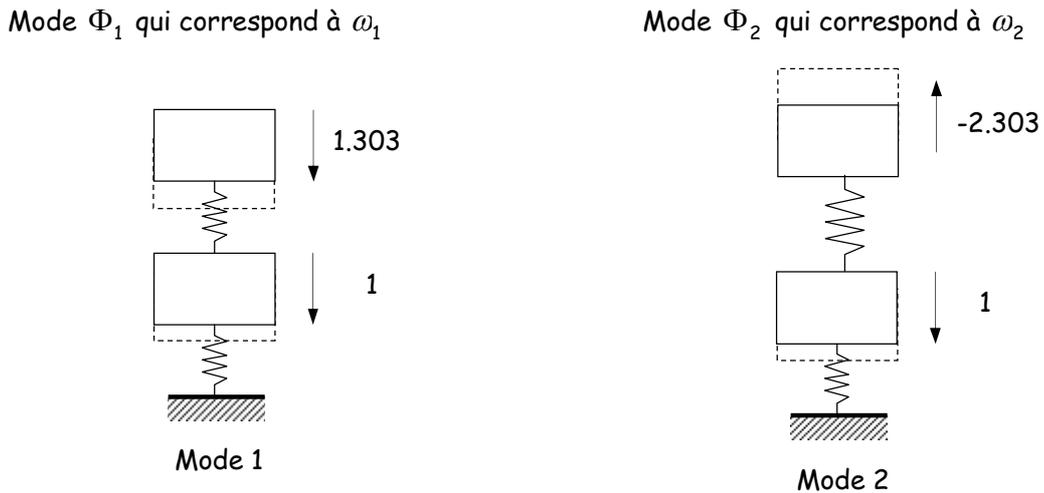


Figure 17 : Système à deux degrés de liberté

SAHLA MAHLA



المصدر الأول للطالب الجزائري



Le mouvement libre de ce système non amorti, décomposé dans la base de ses modes propres (60), et est décrit par la figure 18 :

$$\begin{aligned} x_1(t) &= 1.000e^{j\omega_1 t} + 1.000e^{j\omega_2 t} \\ x_2(t) &= 1.303e^{j\omega_1 t} - 2.303e^{j\omega_2 t} \end{aligned} \quad (60)$$

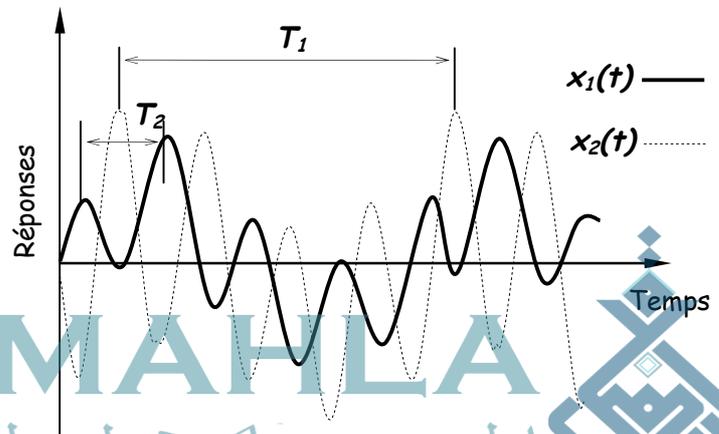


Figure 18 : Mouvement libre du système à deux degrés de liberté, en fonction du temps.

En fonction du temps, les mouvements libres des deux masses m_1 et m_2 oscillent sur les pulsations propres du système. On met bien en évidence l'intérêt de l'utilisation de la transformée de Fourier, qui permet de passer d'une visualisation de l'espace temporel vers l'espace fréquentiel, où les courbes de la figure 18 se transforment en deux raies (en ω_1 et ω_2) sur l'axe des fréquences.

2.2.2 Mouvement forcé non amorti

L'application d'une excitation au niveau des masses m_1 ou m_2 , change le second membre du système d'équations (35) régissant le mouvement vibratoire. Dans ce cas, on s'intéresse à la réponse du mouvement forcé qui dépend de la forme de la force d'excitation. Pour une excitation du type harmonique, la solution exacte est obtenue grâce à la méthode directe. Nous présentons le principe de calcul sur un exemple de dispositif (étouffeur de vibrations) utilisé pour atténuer l'amplitude des vibrations dues à des phénomènes de résonance.

Etouffeur de vibrations

C'est un dispositif souvent utilisé pour contrôler l'amplitude de vibration lors du phénomène de résonance. Le principe d'un étouffeur de vibrations est simple, soit un système à 1 degré de liberté (figure 18.a), soumise à une force harmonique $Fe^{j\Omega t}$. La solution de ce système est :

$$x_1(t) = \frac{Fe^{j\Omega t}}{k_1 - m_1\Omega^2} \quad (61)$$

Sur un système à 1 degré de liberté (m_1, k_1) excité par une force $Fe^{j\Omega t}$, on place un autre système (m_2, k_2) permettant d'étouffer les vibrations du premier (figure 18.b). Nous cherchons donc, à définir les critères de choix de (m_2, k_2) assurant l'annulation de $x_1(t)$.

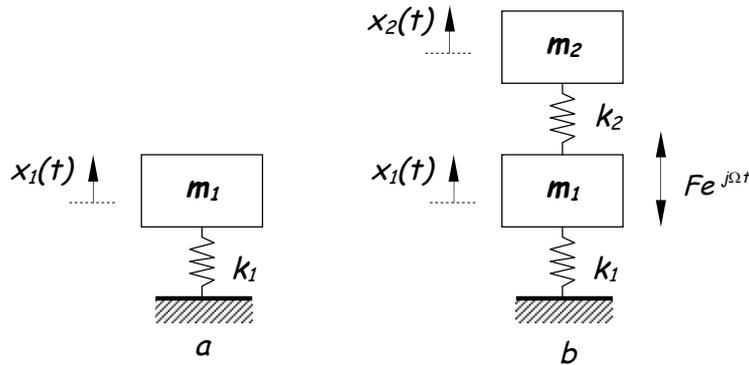


Figure 18 : Principe de l'étouffeur de vibrations

Sous forme matricielle, les équations du mouvement du système 18.b, s'écrivent :

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Fe^{j\Omega t} \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{62}$$

Sans amortissement, les solutions de (62) sont obtenues en posant :

$$x_1(t) = X_1 e^{j\Omega t} \qquad x_2(t) = X_2 e^{j\Omega t} \tag{63}$$

Remplaçons (63) dans (62), nous obtenons le système suivant :

$$\begin{bmatrix} (k_1 + k_2) - m_1 \Omega^2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 - m_2 \Omega^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{64}$$

On obtient donc :

$$X_1 = \frac{F(k_2 - m_2 \Omega^2)}{(k_2 - m_2 \Omega^2)(k_1 + k_2 - m_1 \Omega^2) - k_2^2} \tag{65}$$

$$X_2 = \frac{-Fk_2}{(k_2 - m_2 \Omega^2)(k_1 + k_2 - m_1 \Omega^2) - k_2^2} \tag{66}$$

L'annulation du déplacement $x_1(t)$ de la masse m_1 soumise à une excitation de pulsation Ω impose la condition suivante :

$$\Omega = \sqrt{\frac{k_2}{m_2}} \tag{67}$$

Dans ce cas : $x_1(t) = 0$ et $x_2(t) = -\frac{Fe^{j\Omega t}}{k_2}$ (68)

La figure 19 présente un exemple d'application d'un étouffeur de vibrations sur un système à un degré de liberté (en trait plein) excité au voisinage de la résonance ω_0 . Le nouveau système à deux degrés de liberté (en trait pointillé) montre bien l'apparition de deux résonances ω_1 , et ω_2 et d'une nette atténuation des vibrations au voisinage de fréquence d'excitation.

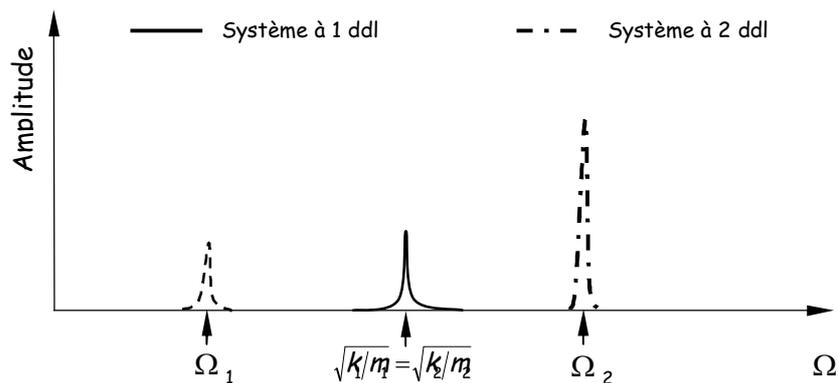


Figure 19 : Variations de l'amplitude en fonction de l'excitation, Etouffeur de vibrations

Pour définir un étouffeur de vibrations (k_2, m_2), il faut que :

- La fréquence d'excitation vérifie la relation (67), et qu'elle soit constante ou très peu variable sinon elle pourrait exciter l'une des résonances générées (voir figure 19).
- Le ressort de l'absorbeur puisse résister au module de la force excitatrice qui doit être donc connu.

2.3 Système à plusieurs degrés de liberté

La généralisation à un système à N degrés de liberté peut être abordée pour étudier des structures proches de la réalité et accéder ainsi aux N fréquences et modes propres. Les calculs se font à l'aide d'un ordinateur et d'outil de traitement numérique mais la démarche se résume par les points suivants :

- La discrétisation de la structure vibrante en N degrés de liberté avec plusieurs systèmes masse+ressort+amortisseur couplés. Cette partie très importante constitue le modèle de base qui représente le comportement vibratoire de la structure étudiée.
- La mise en équation du système discret nécessite la construction des matrices masses et raideurs pour le calcul des fréquences et modes propres, et de la matrice amortissement visqueux et du vecteur force excitatrice pour un calcul de réponse vibratoire à une excitation. Cette mise en équation peut s'effectuer à partir des théorèmes généraux ou des équations de lagrange.

Après la mise en équation, on choisit une présentation matricielle qui se présente sous la forme :

$$[M]\{\ddot{x}(t)\} + [C]\{\dot{x}(t)\} + [K]\{x(t)\} = \{F(t)\} \tag{69}$$

Avec :

$$[M] : \text{Matrice masse} \quad [C] : \text{Matrice amortissement} \quad [K] : \text{Matrice raideur}$$

Pour accéder aux fréquences et modes propres, on considère le système conservatif associé à (69) :

$$[M]\{\ddot{x}(t)\} + [K]\{x(t)\} = 0 \tag{70}$$

Les solutions de ce système sont déterminées sous la forme :

$$x(t) = X e^{j\omega t}$$

Ce qui donne :

$$[M]^{-1}[K]\{X\} = \omega^2 \{X\} \tag{71}$$

Nous retrouvons un problème aux valeurs et vecteurs propres à résoudre pour obtenir les fréquences et les modes propres. A chaque pulsation propre ω_i correspond un mode propre Φ_i ; ces modes propres sont orthogonaux, c'est-à-dire que :

$$\{\Phi_i\}^T [K] \{\Phi_j\} = 0 \quad \text{Pour tout } i \neq j \text{ et } \omega_i \neq \omega_j \neq 0 \quad (72)$$

$$\{\Phi_i\}^T [M] \{\Phi_j\} = 0 \quad \text{Pour tout } i \neq j \text{ et } \omega_i \neq \omega_j \neq 0$$

Ainsi on peut construire les matrices masse modale, raideur modale et amortissement modale (sur la base de $[C] = a[M] + b[K]$), qui sont donc diagonales et permettent ainsi d'écrire un système d'équations différentielles découplées lors de la résolution de la réponse forcée. (C'est la méthode modale).

Pour accéder à la réponse forcée, on doit prendre en compte l'amortissement et le vecteur force excitatrice et utiliser :

- La méthode directe si l'excitation est périodique, en prenant une décomposition en série de fourrier de la force et en posant comme solution une forme similaire à l'excitation.
- La méthode modale si l'excitation est quelconque, avec l'avantage de résoudre le problème dans la base des modes propres ou les équations deviennent découplées.

3 Vibrations des systèmes continus

C'est une extension des systèmes à N degré de liberté avec $N \rightarrow \infty$. Dans le cas des structures de géométrie simple telle qu'une poutre homogène avec des conditions aux limites simples, on peut utiliser des solutions analytiques pour le calcul des fréquences et modes propres ou des réponses vibratoires à une excitation. Dans le cas contraire, on ne peut se passer des méthodes numériques (Rayleigh, Rayleigh- Ritz, modale, Eléments Finis...). Nous résumons dans ce qui suit les équations du mouvement vibratoire de poutres sollicitées en traction compression, torsion et en flexion, afin d'accéder aux fréquences et modes propres. L'amortissement et les sollicitations extérieurs ne sont pas pris en compte.

3.1 Mouvement longitudinal

Le mouvement longitudinal correspondant à des oscillations de traction-compression des bars qui peut être représenté par (figure 20):

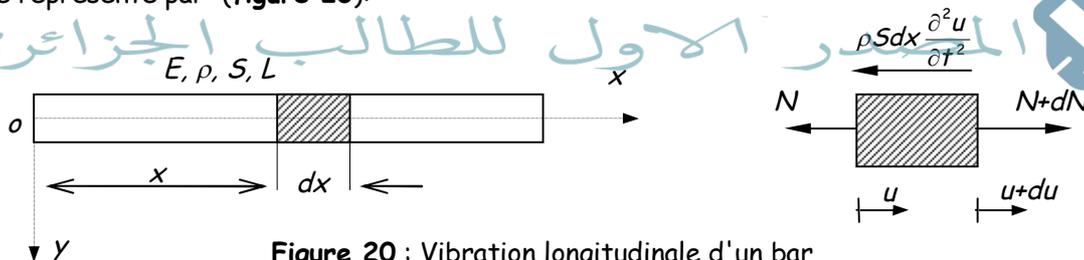


Figure 20 : Vibration longitudinale d'un bar

Où : $u(x, t)$: Le déplacement longitudinal de l'élément bar dx

N : La force longitudinale agissant sur la section droite S de l'élément bar dx

$dN = \frac{\partial N}{\partial x} dx$: L'accroissement de la force longitudinale

$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx$: L'accroissement du déplacement

$\rho S dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$: La force d'inertie de l'élément bar dx

En combinant l'application du théorème de la résultante cinétique et la loi de Hooke ($\sigma_x = E \epsilon_x = E \frac{\partial u}{\partial x}$) à un élément de longueur dx , on obtient l'équation du mouvement longitudinal libre dans le cas d'une section constante qui s'écrit :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{E}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (73)$$

S est l'aire de la section droite, E est le module de Young et ρ est la masse volumique.

Pour déterminer les fréquences et modes propres, on utilise la méthode de séparation des variables en posant :

$$u(x, t) = U(x)T(t) \quad (74)$$

L'équation (73) devient :

$$\frac{E}{\rho} \frac{U''(x)}{U(x)} = \frac{\ddot{T}(t)}{T(t)} = Cte \quad (75)$$

La constante est prise négative et égale à $-\omega^2$, de façon que la solution soit limitée dans le temps ; on obtient donc :

$$\frac{\partial^2 T(t)}{\partial t^2} + \omega^2 T(t) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 U(x)}{\partial x^2} + \omega^2 \frac{\rho}{E} U(x) = 0$$

Qui ont pour solutions :

$$T(t) = A \sin \omega t + B \cos \omega t \quad (76)$$

$$U(x) = C \sin \omega \sqrt{\frac{\rho}{E}} x + D \cos \omega \sqrt{\frac{\rho}{E}} x \quad (77)$$

L'application des conditions aux limites conduit à la détermination des fréquences et modes propres ; dans le cas d'une poutre encastree-encastree, on a quelque soit le temps :

$$u(0, t) = U(0)T(t) = 0 \quad \text{et} \quad u(L, t) = U(L)T(t) = 0$$

Ce qui conduit à $D = 0$ et $C \sin \omega \sqrt{\frac{\rho}{E}} L$

Les fréquences propres sont donc : $\omega_n = \frac{n\pi}{L} \sqrt{\frac{E}{\rho}}$ et les modes propres $U_n(x) = C \sin \frac{n\pi x}{L}$ et la solution du mouvement libre peut s'écrire :

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \sin \omega_n t + B_n \cos \omega_n t) C \sin \frac{n\pi x}{L} \quad (78)$$

3.2 Mouvement de flexion

Le mouvement de flexion d'une poutre peut être représenté par (figure 21) :

Où :

$w(x, t)$: Le déplacement vertical de l'élément de poutre dx

T : L'effort tranchant, M : le moment fléchissant

$dT = \frac{\partial T}{\partial x} dx$: L'accroissement de l'effort tranchant

$dM = \frac{\partial M}{\partial x} dx$: L'accroissement du moment fléchissant

$\rho S dx \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$: La force d'inertie de l'élément poutre dx

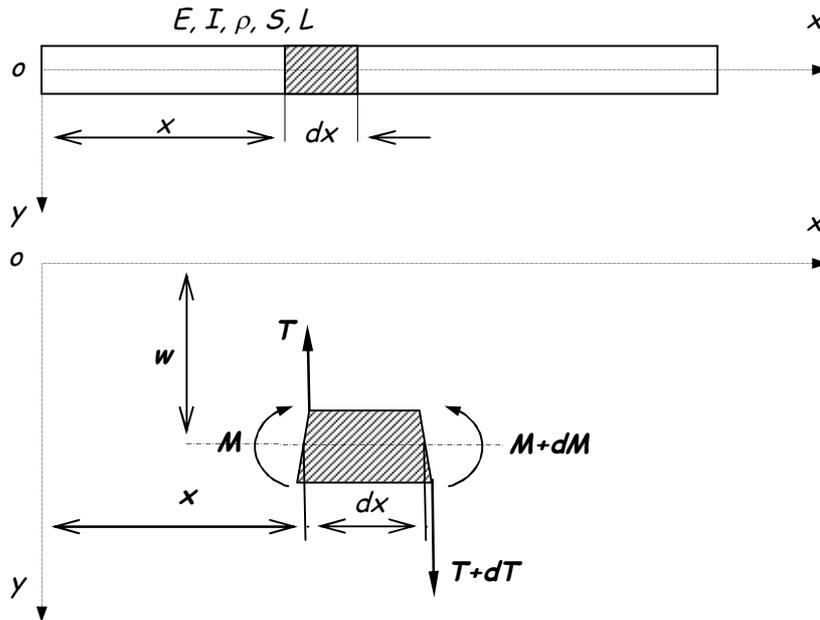


Figure 21 : Vibration de flexion d'une poutre

L'application des théorèmes généraux de la dynamique et des relations classiques de la résistance des matériaux ($EI \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} = -T$ et $\psi - \frac{T}{aSG} = \frac{\partial w}{\partial x}$), sans prise en compte des effets secondaires (cisaillement et inertie de rotation), conduit à l'équation du mouvement libre, dans le cas d'une section constante :

$$SAHILA MAHLA \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{EI}{\rho S} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = 0 \quad (79)$$

Avec I : Inertie de section, G : module de cisaillement
 ψ : Pente due au moment fléchissant
 a : Facteur de forme (≈ 1 pour des sections usuelles)

Pour déterminer les fréquences et modes propres, on utilise la méthode de séparation des variables en posant :

$$w(x, t) = W(x)T(t) \quad (80)$$

L'équation (79) devient :

$$\frac{EI}{\rho S} \frac{1}{W(x)} \frac{d^4 W(x)}{dx^4} = -\frac{\ddot{T}(t)}{T(t)} = Cte$$

La constante est prise positive et égale à ω^2 , de façon que la solution soit limitée dans le temps ; on obtient donc :

$$\frac{d^2 T(t)}{dt^2} + \omega^2 T(t) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{d^4 W(x)}{dx^4} - \omega^2 \frac{\rho S}{EI} W(x) = 0$$

Qui ont pour solutions :

$$T(t) = A \sin \omega t + B \cos \omega t \quad (81)$$

$$W(x) = C \sin \beta x + D \cos \beta x + E \sinh \beta x + F \cosh \beta x \quad (82)$$

Avec $\beta = \sqrt[4]{\frac{\rho S \omega^2}{EI}}$

L'application des conditions aux limites conduit à la détermination des fréquences et modes propres ; dans le cas d'une poutre encastree-libre, on a quelque soit le temps :

$$w(0,t) = 0 ; \frac{\partial w(0,t)}{\partial x} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 w(L,t)}{\partial x^2} = 0 , \frac{\partial^3 w(L,t)}{\partial x^3} = 0$$

Ce qui conduit à : $1 + \cos \beta L \cosh \beta L = 0$, dont les solutions ont la forme $\beta_n L = \lambda_n$. Les fréquences propres sont :

$$\omega_n = \frac{\lambda_n^2}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho S}} \tag{83}$$

3.3 Mouvement de torsion

Le mouvement de torsion peut être modélisé de la même façon que le mouvement longitudinal. La figure 22 représente le mouvement de torsion d'une poutre circulaire.

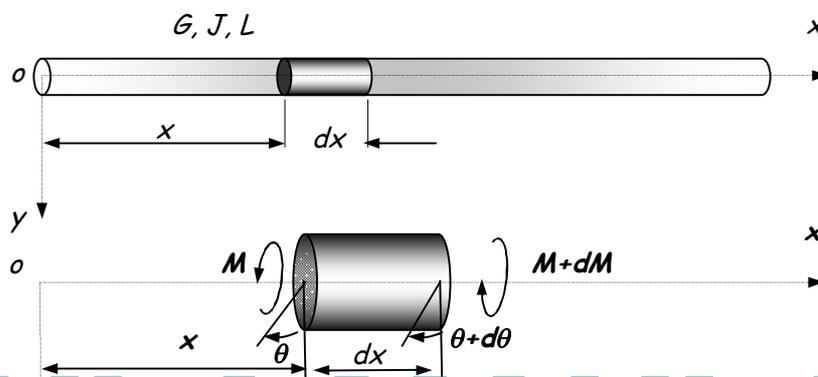


Figure 22 : Vibration de torsion d'une poutre circulaire

Où : $\theta(x,t)$: Le déplacement angulaire (angle de torsion) de l'élément de poutre de longueur dx

$$d\theta = \frac{\partial \theta}{\partial x} dx : \text{L'accroissement de l' angle de torsion}$$

M : le couple de torsion appliquée à la section transversale d'abscisse x

$$dM = \frac{\partial M}{\partial x} dx : \text{L'accroissement du couple de torsion}$$

D'après la résistance des matériaux, le couple et l'angle de torsion sont reliés par :

$$M = GJ \frac{\partial \theta}{\partial x} \tag{84}$$

Où G est le module d'élasticité en torsion (module de coulomb) et J le moment d'inertie polaire de la section transversale. L'équilibre dynamique en rotation de l'élément de poutre de longueur dx donne :

$$I_\theta \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = GJ \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \tag{85}$$

I_θ est l'inertie de masse par rapport à l'axe de torsion par unité de longueur (inertie géométrique).

Dans le cas d'une section circulaire constante $I_\theta = J\rho$.

L'équation du mouvement de torsion (85) est semblable à celle du mouvement longitudinal (73); l'obtention des fréquences et modes propres est déjà développée dans le paragraphe 3.1.

4 Méthodes de calcul des fréquences et modes propres

4.1 Méthode directe

Pour accéder aux fréquences et modes propres, on considère le système conservatif associé à (69) :

$$[M]\{\ddot{\theta}\} + [K]\{\theta\} = 0 \tag{72}$$

Les solutions de ce système sont déterminées sous la forme : $\{\theta(t)\} = \{\phi\}e^{j\omega t}$, ce qui donne :

$$([K] - \lambda[M])\{\phi\} = \{0\} ; \lambda = \omega^2 \tag{73}$$

Nous retrouvons un problème aux valeurs et vecteurs propres à résoudre pour obtenir les fréquences et les modes propres. Si les deux matrices sont définies positif, λ_i sont réels et positif. Il n'existe des vecteurs $\{\phi\}$ non nul que si $([K] - \lambda[M])$ est singulier, c'est-à-dire $\det([K] - \lambda[M]) = 0$. Cette dernière expression est un polynôme d'ordre N en λ . La recherche des λ_i est identique à la recherche des racines d'un polynôme d'ordre N. A chaque valeur λ_i correspond un vecteur $\{\phi_i\}$, solution de $([K] - \lambda_i[M])\{\phi_i\} = \{0\}$. Ces vecteurs (modes) propres sont orthogonaux, c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} \{\phi_i\}^T [K] \{\phi_j\} &= \lambda_i \delta_{ij} \\ \{\phi_i\}^T [M] \{\phi_j\} &= \delta_{ij} \end{aligned} \tag{74}$$

Nous dirons que les modes propres sont $[K]$ orthogonaux et $[M]$ orthonormés. Ainsi on peut construire les matrices masse modale, raideur modale et amortissement modale (sur la base de $[C] = a[M] + b[K]$), qui sont donc diagonales et permettent ainsi d'écrire un système d'équations différentielles découplées lors de la résolution de la réponse forcée (c'est la méthode modale).

4.2 Méthodes itératives

Pour calculer les fréquences et les modes propres des systèmes à plusieurs degrés de liberté, les méthodes itératives sont les plus utilisées car, les calculs se font à l'aide d'un ordinateur et d'outil informatique. Les méthodes les plus utilisées sont :

- ✓ **La méthode de la matrice d'itération** : permet de calculer le fréquences et les modes propres sur la base des équations du mouvement obtenues par la méthode des coefficients d'influence. les relations (74) d'orthogonalité des modes propres sont également utilisées.
- ✓ **La méthode de Stodola** : permet de calculer la fréquence et le mode fondamentale d'un système à plusieurs degrés de liberté en vibration libre sans amortissement. Cette méthode n'a pas besoin des la détermination des équations de mouvement. Lorsque le système vibre avec son mode fondamental de fréquence ω , il est soumis à l'action des couples d'inertie $-J_i \ddot{\theta}_i$, avec $\theta_i = A_i \sin \omega t$. Les couples d'inertie et les déplacements sont maximaux en même temps mais de sens opposé, alors

$$-J_i \ddot{\theta}_i = \omega^2 J_i \theta_i \tag{75}$$

- ✓ **La méthode d'Holzer** : cette méthode est très utilisée en vibration de torsion. Elle permet de calculer toutes les fréquences et les modes d'un système à plusieurs degrés de liberté, avec ou sans amortissement, en vibration libre ou forcées.

- Pour un système à deux bords libre: $\theta_i = \theta_{i-1} - (\omega^2 / K_i) \sum_{j=1}^{i-1} J_j \theta_j$ (76)

- Pour un système encasturé- libre : $\theta_i = \theta_{i-1} - (\omega^2 / K_i) \sum_{j=1}^{i-1} J_j \theta_j$ (77)

- Pour un système encasturé- libre : $\theta_i = \theta_{i-1} + (1/K_i) [K_i \theta_i - \omega^2 \sum_{j=1}^{i-1} J_j \theta_j]$ (78)

Pour plus de détails sur les méthodes itératives, voir TD.