Cours EDP Licence
Faculté de Mathématiques
USTHB

D. Teniou

Contents

CHAPTER 1

Préambule

1. Quelques notations

La nature est généralement régie par des lois qui s'expriment par des relations

$$F(x, y, \ldots, u, u_x, u_y, \ldots, u_{xx}, u_{xy}, \ldots) = 0$$

où $u_x := \frac{\partial u}{\partial x}$ etc sont les dérivées partielles de u.

Nous allons dans ce bref préambule, expliciter quelques unes de ces lois, ce qui permettra en même temps de faire ressortir l'importance des équations aux dérivées partielles (EDP) dans la vie de tous les jours, et de motiver l'intérêt de ce cours.

Un milieu (qui peut être un corps solide, un liquide, un substrat, etc), est en général noté $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ (sauf en dimension un où il est plutôt noté I); d est la dimension spatiale et dans les situations réelles, $d = 1, 2$ où 3. On l'appelle souvent domaine.

L'état (d'une substance par exemple) au point x et à l'instant t considéré est la plupart du temps noté

$$u(x,t), \quad x \in \Omega, \quad t \in [0,T) \subset [0,\infty) \text{ ou parfois } t \in \mathbb{R}$$

On a également une fonction $\phi = \phi(x,t))$, (vectorielle si u est scalaire) qui va intervenir dans la modélisation et qui est définie par le flux traversant $\partial\omega$, où $\omega \subset \Omega$ est un sous domaine de Ω et $\partial\omega$ sa frontière. Si u est un vecteur (par exemple un vecteur vitesse), alors ϕ est une matrice.

La densité de source (second membre de l'équation) est notée $f(x,t)$

L'intégrale:

$$U(\omega, t) := \int_\omega u(x,t)dx$$

représente la quantité totale considérée dans ω, au temps t. L'intégrale

$$U(\omega, t_1, t_2) := \int_{t_1}^{t_2} \int_\omega u(x,t)dxdt$$

représente la quantité totale dans ω et durant l'intervalle de temps $[t_1, t_2]$.

Par exemple, la masse totale dans ω à l'instant t de densité $\rho(x,t)$ est égale à:

$$m(\omega, t) := \int_\omega \rho(x,t)dx$$

et la masse contenue dans ω durant l'intervalle de temps $[t_1, t_2]$, est

$$m(\omega, t_1, t_2) := \int_{t_1}^{t_2} \int_\omega \rho(x,t)dxdt$$

Choisissons ω régulier, c'est à dire que son bord représente une surface (dans le cas d=3), régulière (respectivement une courbe (dans le cas d=2) régulière). Soit $n(x)$ la normale unitaire extérieure à ce bord. On définit :

$$\Phi(\partial\omega, t) := \int_{\partial\omega} \phi(x,t).n(x)dS$$

qui est la "quantité totale " qui traverse le bord à l'instant t.

On définit de même $\Phi(\partial\omega, t_1, t_2), F(\partial\omega, t), F(\partial\omega, t_1, t_2)$.

2. Loi de conservation évolutive

Dans les définitions que l'on vient de donner, le temps intervenait, auquel cas, on dit que le système est évolutif. Si le temps n'intervient pas, on dit que le système est stationnaire.

Nous allons maintenant donner une première loi de conservation. Pour simplifier, nous allons supposer que u est un scalaire.

La loi de conservation évolutive (équilibre) dit que la différence de la quantité totale U dans ω entre t_1 et t_2 est égale au flux traversant $\partial\omega$ entre t_1 et t_2, auquel on ajoute la quantité produite par la source dans ω durant l'intervalle de temps $[t_1, t_2]$.

En langage mathématique, cela s'écrit:

$$\int\int_{\omega} u(x,t_2)dx - \int\int_{\omega} u(x,t_1)dx = -\int_{t_1}^{t_2}\int_{\partial\omega}\phi(x,t).n(x)dSdt + \int_{t_1}^{t_2}\int\int_{\omega} f(x,t)dxdt \tag{1}$$

Par convention, le flux est considéré comme positif dans la direction de la normale extérieure n.

Dans le cas $d = 1$, l'intégrale de flux s'écrit:

$$\int_{\partial(a,b)}\phi(x,t).n(x)dS = \phi(b,t) - \phi(a,t)$$

Nous allons maintenant supposer que les fonctions sont "régulières". Remplaçons $u(x,t_2) - u(x,t_1)$ par $\int_{t_1}^{t_2}\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}dt$, la formule (1) devient;

$$\int_{t_1}^{t_2}\int\int_{\omega}\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}dxdt = -\int_{t_1}^{t_2}\int\int_{\partial\omega}\phi(x,t).n(x)dSdt + \int_{t_1}^{t_2}\int\int_{\omega} f(x,t)dxdt \tag{2}$$

L'intervalle de temps étant arbitraire, quitte à diviser par $t_2 - t_1$, et à faire tendre cette quantité vers 0, on obtient:

$$\int\int_{\omega}\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}dx = -\int_{\partial\omega}\phi(x,t).n(x)dS + \int\int_{\omega} f(x,t)dx \tag{3}$$

Le théorème de la divergence nous donne la relation:

$$\int_{\partial\omega}\phi(x,t).n(x)dS = \int\int_{\omega}\text{div }\phi(x,t)dx$$

où div $\phi := \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial \phi_i}{\partial x_i}$.

Dans le cas $d = 1$, div $\phi = \frac{d\phi}{dx}$.

Là encore, la relation étant vraie pour tout sous domaine ω, on obtient:

$$\boxed{\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + \text{div } \phi(x,t) = f(x,t)} \tag{4}$$

(On divise par la mesure de ω et on fait tendre cette mesure vers zéro -voir exercice-). Dans la suite, et sauf risque de confusion, on écrira les intégrales, aussi bien simples, doubles que triples avec un seul symbole $\int$.

Remarque 0.1. ***Loi de conservation stationnaire***

Dans beaucoup de situations, la source est indépendante du temps ($f(x,t) = f(x)$). En fonction du problème, le phénomène, au bout d'un certain temps plus ou moins long, va devenir indépendant du temps, la dérivée par rapport au temps devient nulle et ainsi, là partir d'un certain moment, a loi sous sa forme globale (ou intégrale) s'écrit:

$$\int_{\partial\omega} \phi(x).n(x)dS = \int\int_{\omega} f(x)dx \tag{5}$$

et la loi sous sa forme ponctuelle s'écrit:

$$\boxed{div\ \phi(x) = f(x)} \tag{6}$$

Remarque 0.2. *La loi de conservation que l'on vient de donner est indépendante du milieu choisi, et également du type de phénomène considéré. Elle est trop générale, et du point de vue physique, il est illusoire d'espérer décrire un phénomène entièrement avec cette seule loi, et des considérations spécifiques sont nécessaires, de même que dupoint de vue mathématique, bien que la source f soit connue, nous avons néanmoins deux inconnues, à savoir u et ϕ. Cette n'est donc pas suffisante pour déterminer une solution unique et on aura besoin d'une autre relation (loi). Ce sera l'objet de la section suivante où l'on se contentera en fait de donner quelques exemples de ce que l'on appellera lois constitutives.*

3. Exemples (Lois constitutives)

3.1. Équation de transport ou de convection. Le modèle unidimensionnel de convection décrit par exemple, la propagation d'un contaminant à travers un tube. La relation entre la quantité d'état u qui est la concentration en contaminant, et la quantité du flux ϕ est donnée par la loi constitutive :

$$\phi = cu$$

où c est une constante positive correspondant à la vitesse de propagation du contaminant. La loi de conservation devient donc ce que l'on appelle l'équation de transport :

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x} = f}$$

3.2. L'équation de diffusion. Le processus de diffusion est caractérisé par la quantité d'état qui est la concentration d'une substance qui est diffusée et par son flux dont la loi constitutive (loi de Fick) s'écrit:

$$\phi = -k \operatorname{grad} u$$

La constante $k > 0$ qui dépend du matériau, est appelée, coefficient de diffusion et la loi de conservation appelée équation de diffusion devient:

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial t} - k\Delta u = f(x,t)}$$

où Δ appelé laplacien est défini par: $\sum_{i=1}^{d} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$ et est l'opérateur probablement le plus important dans les équations aux dérivées partielles.

3.3. L'équation de la chaleur. Dans cette situation, la quantité u représente la température, et la loi constitutive est donnée par la loi de Fourier

$$\phi = -K \operatorname{grad} u$$

La loi de conservation appelée équation de la chaleur devient:

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial t} - K\Delta u = f}$$

le nombre K est appelé coefficient de diffusivité thermique. Remarquons que les équations de diffusion et de la chaleur sont identiques.

3.4. L'équation des ondes (mouvement ondulatoire). Le mouvement ondulatoire est décrit par la densité de masse d'un milieu et son déplacement u et par sa tension interne et son moment ϕ. Le modèle le plus simple (mais d'une importance fondamentale) est modélisé comme suit Sa modélisalisation est un peu différente des précédentes.

Désignons par w le déplacement, et posons $u := \rho(x)\frac{\partial w}{\partial t}$ ce que nous appellerons la quantité de mouvement. Le flux satisfait alors la relation $\phi(u) = -c^2\nabla w$ où c est la vitesse de la lumière, auquel cas, la loi de conservation devient

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial t} + \operatorname{div}\phi = \rho(x)\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - c^2\Delta w = f}$$

Si le milieu est homogène ($\rho(x) = const$), on normalise en prenant $\rho = 1$.

Remarque 0.3. *Dans le cas stationnaire, les équations de diffusion, de la chaleur et des ondes se transforment en le laplacien.*

Remarque 0.4. *Les exemples donnés peuvent être trompeurs car ils pourraient faire croire que les lois de la nature sont linéaires. En réalité, les lois constitutives qui ont été données sont juste des approximations.*

Par exemple, pour la loi de la diffusion $\phi(u) = k\nabla u$, en réalité, $k = k(u)$. Pour des variations petites, on peut écrire

$$\phi(u) = k(0)\nabla u + k'(\theta u)u\nabla u$$

et le second terme, qui est d'ordre deux, sera considéré comme négligeable par rapport au premier terme.

CHAPTER 2

Les Caractéristiques

1. L'équation de transport

1.1. La dérivée directionnelle. L'exemple le plus simple d'équation aux dérivées partielles est l'équation de transport.

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x} = 0} \tag{7}$$

où c est une constante réelle.

Pour obtenir la solution générale, notons par v le vecteur $(c, 1)$ dans $\mathbb{R}^2$. L'équation de transport peut alors être considérée comme une dérivée directionnelle: $\frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x} = v.\nabla u = 0$, où $\nabla u :=$ grad $u := (\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial t})$.

Cette dérivée étant nulle, il s'en suit que la fonction est constante le long de la direction $(c, 1)$ et ne dépend donc que d'une seule variable.

Les équations des droites de direction $(c, 1)$ sont: $x = x(t) = ct + \alpha$ où α est une constante arbitraire, l'équation (7) le long de ces droites devient

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{dx}{dt}\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

car $u(x, t) = u(x(t), t)$ et la solution générale s'écrit donc :

$$u(x, t) = f(x - ct) = f(\alpha)$$

où f est pour le moment une fonction arbitraire (dérivable). On peut dire que α est le numéro de la droite.

Définition 0.1. *Les droites $x - ct = const$ sont appelées droites caractéristiques*

Une question qui se pose est alors celle de l'unicité. Quelles conditions supplémentaires peut-on ajouter pour avoir l'unicité de la solution.

Soit γ une courbe paramétrisée, définie par $x = \xi(s), t = \tau(s)$ et soit donnée le long de cette courbe une fonction $\phi = \phi(s)$. Imposons à cette courbe de ne couper les droites $x - ct = const$ qu'en un point au maximum.

Imposons à la fonction u de prendre les valeurs ϕ sur γ ($u_{|\gamma} = \phi$)

La fonction f et donc u sera déterminée comme suit:
pour chaque valeur de $x - ct$ déterminons s de telle sorte que $x - ct = \xi(s) - c\tau(s)$. Si la courbe coupe la droite, alors s existe et est unique. On pose alors $f(x - ct) = \phi(s)$. La théorie des courbes permet de démontrer que si $, \xi, \tau, \phi$ sont régulières, alors f est régulière.

Remarque 0.5. • *On peut choisir la courbe γ d'une infinité de manière, en particulier, un segment de l'axe des x ou un segment de l'axe des t, mais on ne peut pas prendre une courbe qui coupe une droite quelconque en au plus un point car alors à moins de conditions de compatibilité, la fonction f ne peut être définie*

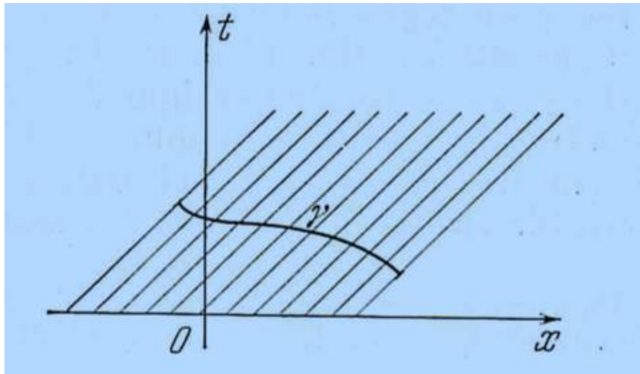

FIGURE 1. Droites caractéristiques

FIGURE 2. Courbe initiale γ (bonnes)

- *L'unicité n'est assurée que sur les droites qui coupent la courbe, en dehors, l'unicité n'est plus assurée.*

- *Plus généralement, on peut considérer l'équation :*
$$a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad \text{avec } a^2 + b^2 \neq 0.$$
Elle s'écrit sous la forme $v.\nabla u = 0$, avec le vecteur v qui est égal à : (a, b) et les droites caractéristiques sont : $bx - ay = const$. La solution générale s'écrit sous la forme $u(x, y) = f(bx - ay)$ avec f arbitraire (le vérifier).

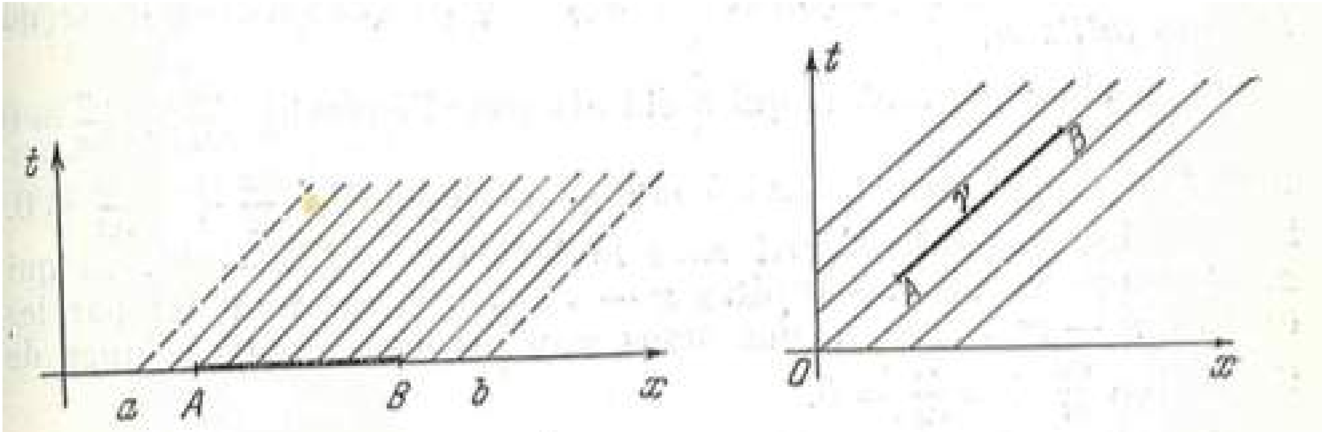

FIGURE 3. Domaine d'unicité

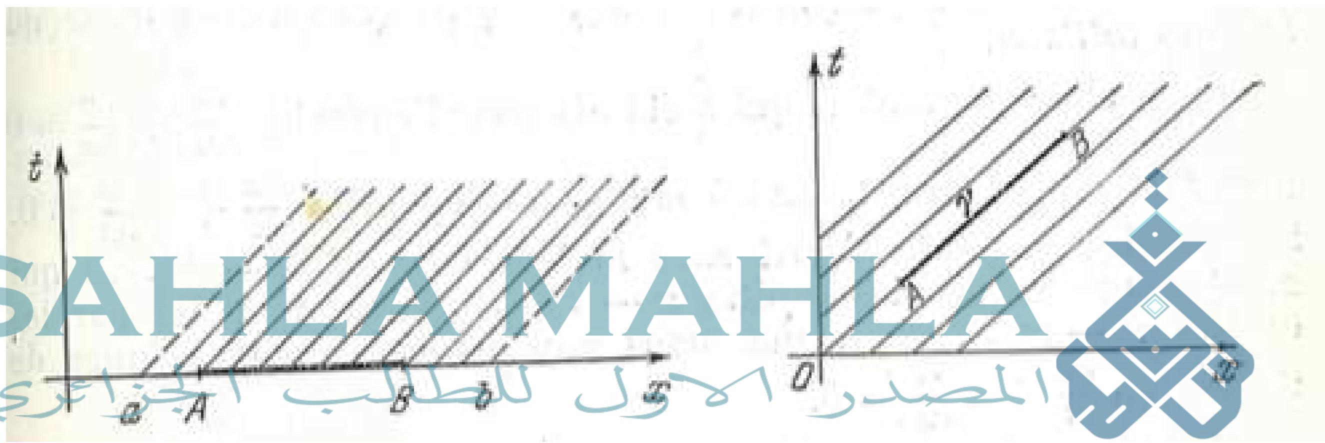

FIGURE 4. Domaine d'unicité

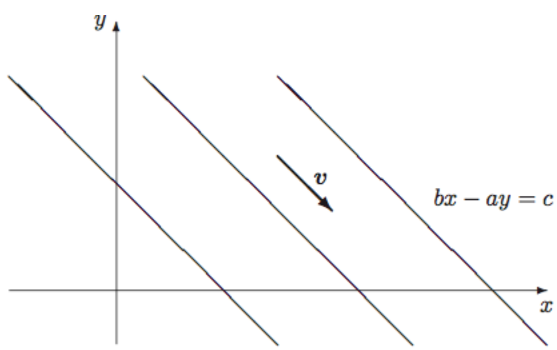

FIGURE 5. initiales2

EXEMPLE 0.1. Considérons l'équation:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - 3\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

avec comme courbe γ l'axe des x avec $u(x,0) = e^{-x^2}$. Les courbes (droites) caractéristiques sont $x + 3t = const$ et ainsi la solution (unique) est donnée par $u(x,t) = f(x+3t)$. La fonction f étant déterminée par $u(x,0) = f(x) = e^{-x^2}$, soit

$$u(x,t) = e^{-(3t+x)^2}$$

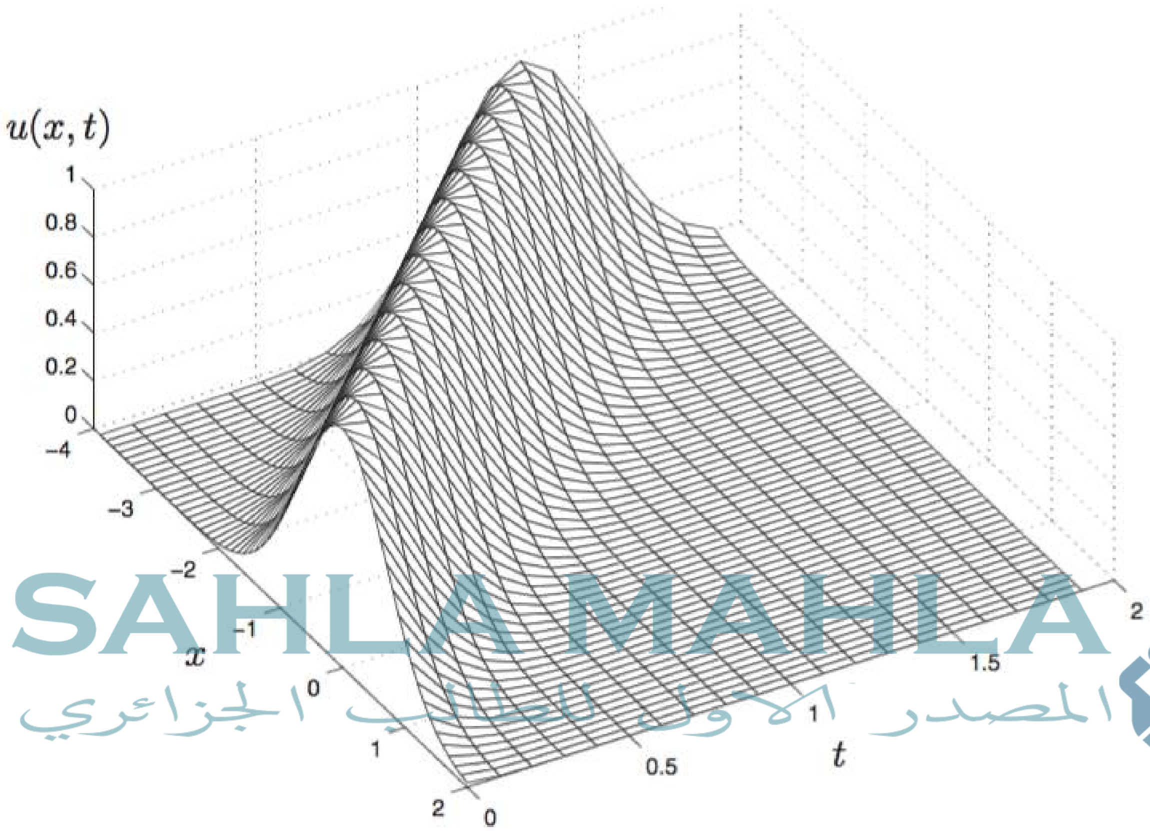

FIGURE 6. Solution $u(x,t) = e^{-(3t+x)^2}$

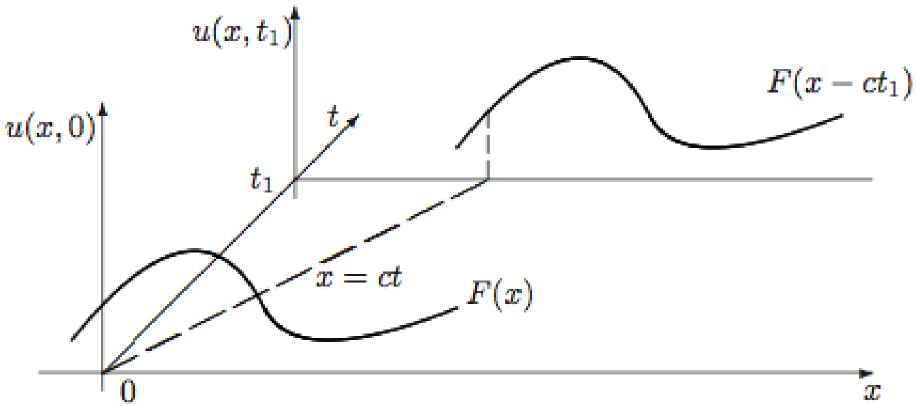

FIGURE 7. Évolution de la condition initiale

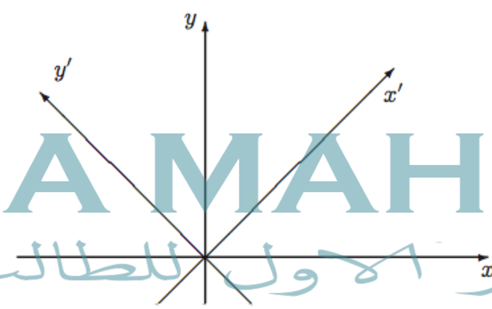

FIGURE 8. Le changement de variables

1.2. La méthode des coordonnées caractéristiques. Une autre manière de procéder est d'effectuer un changement de variables:

$$x' = ax + by, \qquad y' = bx - ay$$

le déterminant de ce système étant non nul, (x', y') forme un nouveau système de coordonnées (il est à remarquer que dans ce système de coordonnées, $y' = const$ est une droite caractéristique). Le théorème de changement de variable donne alors

$$u_x = \frac{\partial u}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial x} = au_{x'} + bu_{y'}$$

$$u_y = \frac{\partial u}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial y} = bu_{x'} - au_{y'}.$$

L'équation $au_x + bu_y$ devient

$$a^2u_{x'} + abu_{y'} + b^2u_{x'} - abu_{y'} = 0$$

soit : $(a^2+b^2)u_{x'}=0$, c'est à dire

$$u_{x'}=0.$$

Il s'en suit que $u(x',y')=f(y')$, c'est à dire

$$u(x,y)=f(bx-ay)$$

On peut aussi utiliser la méthode des coordonnées caractéristiques pour la forme plus générale suivante

$$\boxed{a\frac{\partial u}{\partial x}+b\frac{\partial u}{\partial y}+c(x,y)u=f(x,t)\ .} \tag{8}$$

Le changement de variable donne l'équation différentielle suivante

$$\tilde{u}_{x'}+\tilde{c}(x',y')\tilde{u}=\tilde{f}(x',y')$$

où $\tilde{c}(x',y')=c(x,y)$ etc. qui est une équation différentielle ordinaire linéaire, avec y' considéré comme paramètre, facile à résoudre (théoriquement).

Remarque 0.6. *Bien que ce type d'équation relève plutôt des équations différentielles ordinaires, et bien qu''elle soit très simple, puisqu'elle est de degré un et linéaire, vu son importance dans les EDP, nous allons établir la formule qui donne sa solution générale.*

Proposition 0.1. *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $a(x)$ et $f(x)$ deux fonctions intégrables sur I. Alors, la solution générale de l'équation*

$$u'=a(x)u+f(x)$$

est donnée par

$$u(x)=Ce^{\int_\alpha^x a(s)\,ds}+\int_\alpha^x f(s)e^{\int_s^x a(\tau)\,d\tau}\,ds$$

où α est un élément arbitraire de l'intervalle I et C une constante arbitraire.

Démonstration. Nous allons utiliser la méthode de variation de la constante. La solution de l'équation générale $u'=a(x)u$ est donnée par $u(x)=Ke^{\int_\alpha^x a(s)\,ds}$. Considérons maintenant K comme une fonction et dérivons u nous obtenons

$$u'=a(x)u+K'e^{\int_\alpha^x a(s)\,ds}$$

il s'ensuit que $K'e^{\int_\alpha^x a(s)\,ds}=f(x)$, soit

$$K'=f(x)e^{-\int_\alpha^x a(s)\,ds}$$

dont l'intégration par quadrature donne

$$K(x)=\int_\alpha^x f(s)e^{-\int_\alpha^s a(\tau)\,d\tau}+C$$

où C est une constante arbitraire. En remplaçant $K(x)$ dans la formule trouvée pour la solution $u(x)$, on obtient le résultat. □

Remarque 0.7.

- *Dans le changement de variables, et si par exemple $b \neq 0$, on peut tout aussi bien choisir comme nouvelles coordonnées:*

$$\xi = bx - ay, \qquad \tau = y$$

le déterminant de ce système étant lui aussi différent de zéro.

- *Lorsque $a(x) \equiv a$ est une constante, la formule devient*

$$u(x) = Ce^{ax} + \int_{\alpha}^{x} f(s)e^{a(x-s)}\, ds.$$

- *Lorsque l'on donne une condition initiale, par exemple $u(x_0) = u_0$, il est plus commode de choisir $\alpha = x_0$, auquel cas, la formule devient*

$$u(x) = u_0 e^{\int_{x_0}^{x} a(s)\, ds} + \int_{x_0}^{x} f(s)e^{\int_{s}^{x} a(\tau)\, d\tau}\, ds,$$

Souvent $x_0 = 0$.

Exemple 0.2. Soit à trouver la solution générale de l'équation de transport

$$u_t + u_x - u = t$$

Les coordonnées caractéristiques sont $\xi = x - t, \tau = t$, et l'équation devient

$$u_\tau - u = \tau.$$

La formule donnée dans la proposition précédente nous donne directement

$$u(\xi, \tau) = C(\xi)e^{\tau} + \int_0^{\tau} se^{\tau - s}\, ds$$

où C est une constante par rapport à la variable τ. L'intégration donne

$$u(\xi, \tau) = [C(\xi) + 1]e^{\tau} - (1 + \tau).$$

En revenant aux coordonnées d'origine, et en posant $g(\xi) = C(\xi) + 1$ nous trouvons

$$u(x, t) = g(x - t) - (1 + t)$$

où g est une fonction arbitraire.

1.3. les équations à coefficients variables.

Exemple 0.3. Considérons l'équation

$$u_x + yu_y = 0.$$

La dérivée directionnelle se fait suivant le vecteur $v = (1, y)$, qui cette fois ci n'est plus constant, mais change avec y. Les courbes caractéristiques ne sont plus des droites, mais des courbes.

Cherchons ces courbes sous la forme $(x(t), y(t))$. Nous devons donc avoir

$$\frac{du}{dt}(x(t), y(t) = 0 = x'(t)u_x + y'(t)u_y$$

Nous allons donc chercher des courbes qui satisfont à $x'(t) = 1$ et $y'(t) = y(t)$. La première relation donne $x(t) = t + a$, a étant une constante arbitraire. Quitte à changer l'origine de t, on peut toujours prendre $a = 0$, et donc $x(t) = t$. Nous pouvons donc choisir comme paramètre $t = x$. Il s'en suit que la deuxième équation devient: $\frac{dy}{dx} = y$, équation qui donne $y = y(x, \alpha) = \alpha e^x$ courbe le long de laquelle la fonction u est constante.

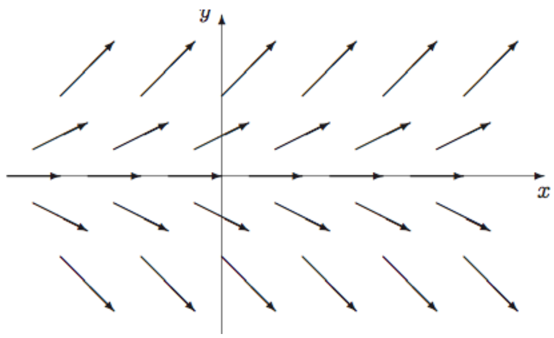

FIGURE 9. Le champ de vecteurs v

En effet, pour α fixé, on a

$$\frac{d}{dx}u(x, y(x)) = \frac{\partial u}{\partial x} + y'\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

α est le " numéro " de la courbe ($\alpha = ye^{-x}$).

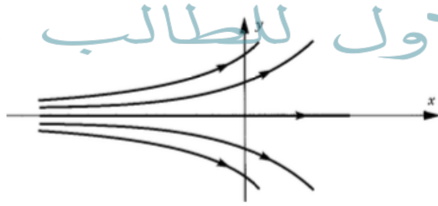

FIGURE 10. Les courbes caractéristiques de $y' = y$

Si l'on se donne f dérivable arbitraire, alors

$$u(x, y) = f(\alpha) = f(ye^{-x})$$

est solution.

Donnons nous pour courbe γ, la droite $x = 0$, et imposons à la solution de satisfaire $u(0, y) = y^2$.

La relation $u(0, y) = y^2 = f(y)$ implique que

$$u(x, y) = y^2 e^{-2x}.$$

Question Peux-on nous donner comme courbe γ la droite $y = 0$?

Considérons maintenant le cas général

$$\boxed{a(x,y)\frac{\partial u}{\partial x} + b(x,y)\frac{\partial u}{\partial y} = 0}$$

avec $a^2 + b^2 \neq 0$.

Le vecteur v est égal à $v = (a(x,y), b(x,y))$. Sans restreindre la généralité, on peut supposer que $a(x,y) \neq 0$ et la direction de v sera la même que celle de $w = (1, \frac{b(x,y)}{a(x,y)})$. L'équation devient

$$u_x + \frac{b(x,y)}{a(x,y)} u_y = 0.$$

Supposons que les fonctions a et b soient régulières. Alors, on peut résoudre l'équation différentielle ordinaire $y' = \frac{b(x,y)}{a(x,y)}$, dont la solution y est donnée en fonction d'une "constante" α; $y = y(x, \alpha)$ qui définit les caractéristiques.

La solution u est donc constante le long de ces courbes caractéristiques

$$u(x, y(x,\alpha)) = f(\alpha)$$

car, comme dans le cas constant, on a

$$\frac{d}{dx}u(x, y(x,\alpha)) = \frac{\partial u}{\partial x} + y'\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{b}{a}\frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

REMARQUE 0.8. *Il faut faire attention qu'ici, différemment de ce qui se passe avec le cas constant, la solution peut n'être que locale (voir un exemple dans la première série de la liste d'exercices).*

REMARQUE 0.9. *La condition $a^2 + b^2 \neq 0$ permet aussi de travailler avec les courbes paramétrées, qui formeront les courbes caractéristiques. Elles sont solutions du système*

$$\begin{cases} x'(t) = a(x(t), y(t)) \\ y'(t) = b(x(t), y(t)) \end{cases}$$

2. L'équation des ondes. Le problème de Cauchy

2.1. Le cas homogène. Nous allons dans cette section étudier l'équation des ondes en une dimension d'espace, appelée aussi équation des cordes vibrantes, car elle modélise également le mouvement d'une corde soumise à des petites vibrations.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \tag{9}$$

Nous allons pour cela utiliser les résultats obtenus lors de l'étude de l'équation de transport.

Écrivons cette équation sous la forme:

$$(\frac{\partial}{\partial t} - c\frac{\partial}{\partial x})(\frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x}) = 0$$

Désignons par $v = \frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x}$. L'équation se transforme alors en le système:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x} = v \\ \frac{\partial v}{\partial t} - c\frac{\partial v}{\partial x} = 0 \end{cases}$$

D'après la section précédente, la solution générale de la seconde équation s'écrit: $v = G(x + ct)$ où G est une fonction arbitraire modulo un minimum de régularité. On peut alors toujours l'écrire sous la forme $v = 2cg'(x + ct)$ où g est une fonction arbitraire régulière.

La première équation du système devient donc:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x} = 2cg'(x + ct)$$

cette équation est équivalente à:

$$\frac{\partial(u - g(x + ct))}{\partial t} + c\frac{\partial(u - g(x + ct))}{\partial x} = 0$$

On a de nouveau une équation de transport dont la solution générale s'écrit:

$$u - g(x + ct) = f(x - ct)$$

Soit:

$$u(x, t) = f(x - ct) + g(x + ct)$$

Cette formule est connue sous le nom de formule de d'Alembert.

2.2. Conditions initiales et unicité. Considérons le cas particulier de la "courbe" $t = 0$ (qui correspond à la courbe γ considérée dans l'équation de transport), et imposons à la solution de satisfaire: $u(x, 0) = \phi(x)$, $u_t(x, 0) = \psi(x)$ où ϕ et ψ sont des fonctions données.

Proposition 0.2. *Sous les conditions initiales précédentes, la solution s'écrit sous la forme*

$$u(x, t) = \frac{\phi(x + ct) + \phi(x - ct)}{2} + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} \psi(\xi)d\xi$$

Formule également appelée formule de d'Alembert alors qu'elle est due à Euler.

Démonstration. Il s'agit donc de déterminer f et g pour que les conditions initiales soient satisfaites. Ces conditions donnent:

$$u(x, 0) = f(x) + g(x) = \phi(x), \quad u_t(x, 0) = -cf'(x) + cg'(x) = \psi(x)$$

En dérivant la première égalité, nous aboutissons à un système d'équations en f' et g', qui se résout facilement et nous trouvons:

$$f'(x) = \frac{1}{2}\phi'(x) - \frac{1}{2c}\psi(x), \quad g'(x) = \frac{1}{2}\phi'(x) + \frac{1}{2c}\psi(x)$$

dont l'intégration donne:

$$f(x) = \frac{1}{2}\phi(x) - \frac{1}{2c}\int_{x_0}^{x} \psi(\xi)d\xi + a$$

et

$$g(x) = \frac{1}{2}\phi(x) + \frac{1}{2c}\int_{x_0}^{x} \psi(\xi)d\xi + b$$

où x_0 est un point arbitraire du domaine de définition et a et b sont les constantes d'intégration. De l'égalité $f(x) + g(x) = \phi(x)$, nous trouvons $a = -b$ et finalement:

$$u(x,t) = f(x-ct) + g(x+ct) = \frac{\phi(x+ct) + \phi(x-ct)}{2} + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} \psi(\xi)d\xi$$

□

On obtient ainsi le théorème suivant

THÉORÈME 1. *Soit $\varphi \in \mathcal{C}^2$, $\psi \in \mathcal{C}^1$, définies sur $\mathbb{R}$. Le problème de Cauchy pour (9) avec déplacement initial φ et vitesse initiale ψ, admet une unique solution classique $u \in \mathcal{C}^2$, donnée par la formule de d'Alembert.*

L'unicité est obtenue par construction.

REMARQUE 1.1. *Les hypothèses faites sur les conditions initiales sont en fait trop fortes et on peut montrer le théorème avec des hypothèses plus faibles, mais cela dépasse le cadre de ce programme.*

EXEMPLE 1.1.

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx} & x \in \mathbb{R}, \quad t > 0 \\ u(x,0) = 0 \\ u_t(x,0) = \sin x \end{cases}$$

La formule de d'Alembert nous donne directement que

$$u(x,t) = \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} \sin\tau d\tau = \frac{1}{2c}[\cos(x-ct) - \cos(x+ct)] = \frac{1}{c}\sin ct \sin x$$

REMARQUE 1.2. *Ces solutions sont appelées standing waves (voir figure)*

2.3. Évolution de la solution en fonction des données. Donnons un exemple qui permet de "visualiser" comment évolue la solution en fonction des données. Supposons que les conditions initiales satisfont

$$u(x,0) = \varphi(x) = \begin{cases} b - \frac{b}{a}|x| & \text{si } |x| \le a, \\ 0 & \text{si } |x| > a \end{cases}$$

où $a > 0$, et supposons que $u_t \equiv 0$. Ce problème décrit le comportement d'une corde de longueur infinie, qui à l'instant $t = 0$, est déplacée par "trois doigts", puis est relachée.

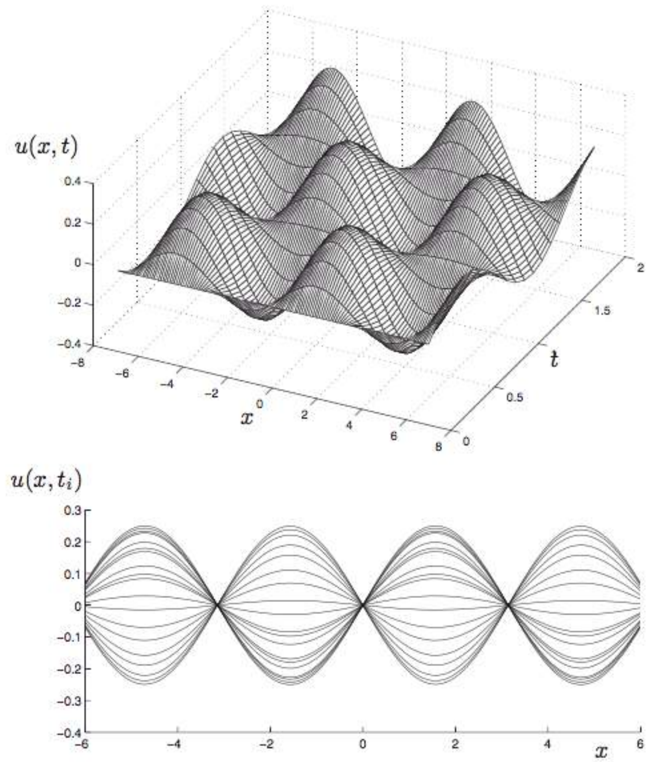

Figure 11. Standing waves pour $c = 4$

Les trois points $x = -a, 0, a$ représentent des singularités du déplacement initial. Par la formule de d'Alembert, nous avons

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[\varphi(x-ct) + \varphi(x+ct)].$$

C'est la somme de deux "fonctions triangles" qui divergent avec le temps (voir figures avec les valeurs $b = 1, a = 2, c = 2$).

Remarque 1.3. *Bien que la fonction ne soit pas dérivable en certains points, nous acceptons que c'est la solution de l'équation des ondes.*

Donnons maintenant un exemple avec un déplacement initial nul, mais une vitesse initiale différente de zéro

$$u_t(x,0) = \psi(x,0) = \begin{cases} 1 & \text{si } |x| \le a, \\ 0 & \text{si } |x| > a \end{cases}$$

Ce problème peut être regardé comme un modèle simplifié du comportement d'une corde infinie, ayant subie un coup de marteau dont la largeur vaut $2a$. La formule de d'Alembert donne

$$u(x,t) = \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} \psi(\tau)\, d\tau = \frac{1}{2c} \times \text{la longueur de l'intervalle } \{(-a,+a) \cap (x-ct, x+ct)\}.$$

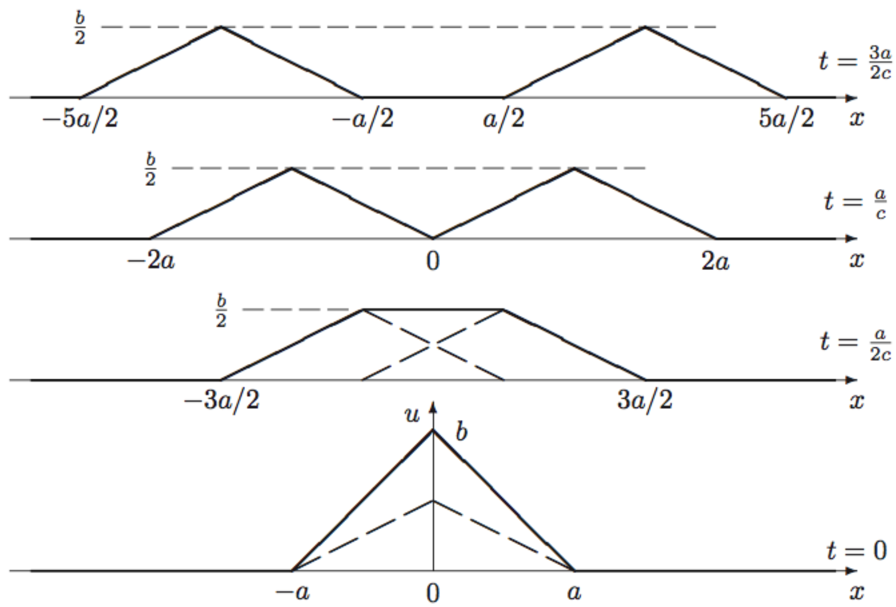

FIGURE 12. Déplacement de la corde en différents temps pour φ donnée et pour $c = 4$

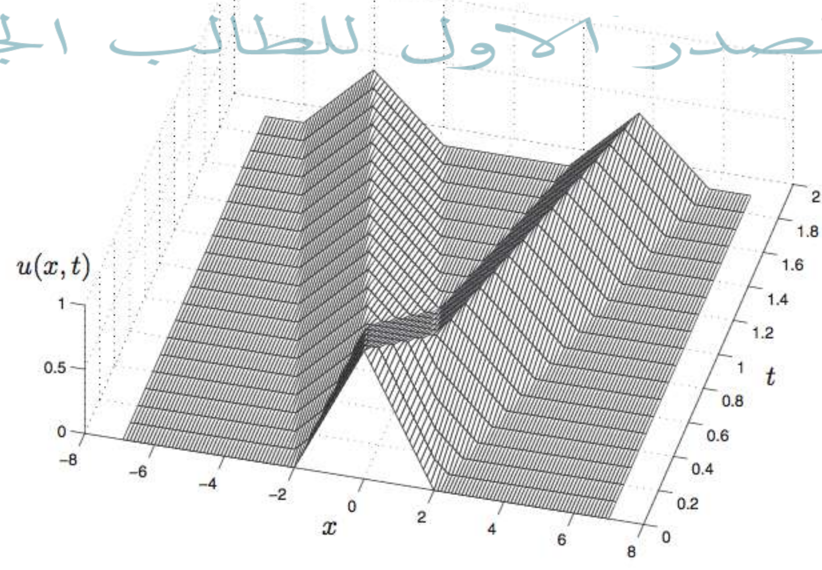

FIGURE 13. Graphe de u

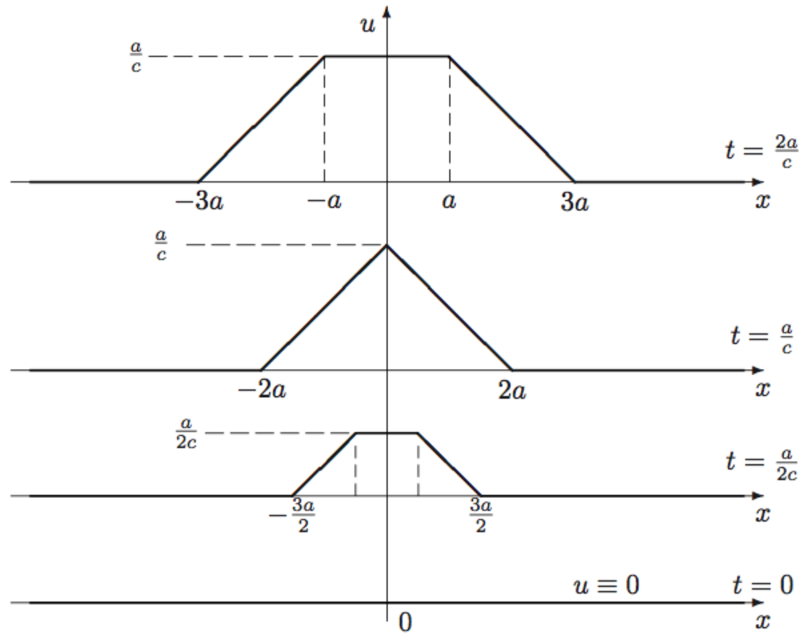

FIGURE 14. Déplacement de la corde en différents temps pour ψ donnée

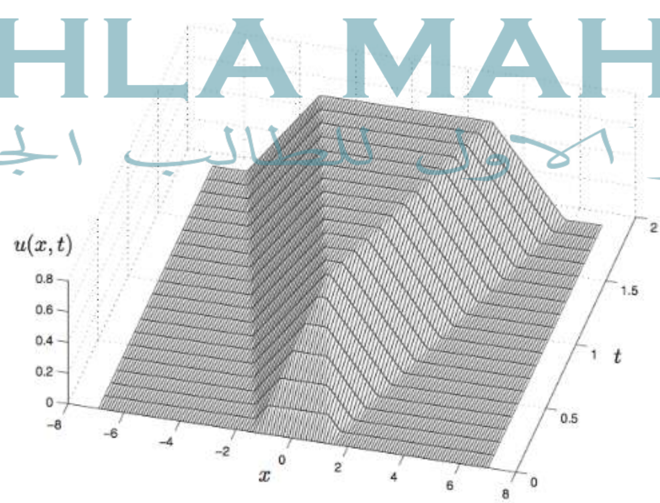

FIGURE 15. Graphe de u

2.4. Domaine de dépendance et région d'influence. Soit (x_0, t_0) un point du demi plan $t > 0$. Regardons de quoi dépend $u(x_0, t_0)$. Pour cela, traçons les droites caractéristiques

$$x - ct = x_0 - ct_0, \quad x + ct = x_0 + ct_0$$

ces droites coupent l'axe des x aux points $(x_0 - ct_0, 0)$ et $(x_0 + ct_0, 0)$. Le triangle dont les sommets sont constitués de ces deux points et du point (x_0, t_0), est appelé *triangle caractéristique.*

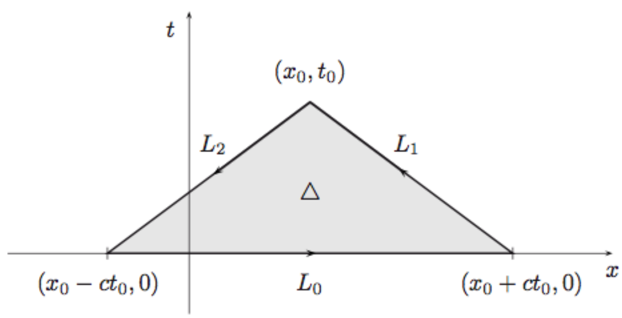

FIGURE 16. Triangle caractéristique

La formule de d'Alembert nous donne:

$$u(x_0, t_0) = \frac{\phi(x_0 + ct_0) + \phi(x_0 - ct_0)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{x_0 - ct_0}^{x_0 + ct_0} \psi(\xi) d\xi$$

Nous voyons donc que la valeur de u au point (x_0, t_0) ne dépend que des valeurs de ϕ aux sommets de la base du triangle caractéristique et des valeurs de ψ le long du côté de la base caractéristique.

Cet intervalle est appelé le domaine de dépendance de u au point (x_0, t_0) . Si nous changeons les valeurs des données initiales en dehors de cet intervalle, la valeur de u ne change pas au point (x_0, t_0) . L'information se propage à la vitesse c et donc une donnée en dehors de cet intervalle ne peut arriver à x_0, , en un temps $t \leq t_0$.

Inversement, étant donné un intervalle $[a, b]$, quelle est la *région influencée* par cet intervalle.D'après ce qu'on vient de voit, un point (x_0, t_0) est influencé par $[a, b]$ si et seulement si $[x_0 - ct_0, x_0 + ct_0] \cap [a, b] \neq \emptyset$. Ainsi les points (x, t) *influencés* par $[a, b]$ sont les points tels que:

$$x - ct \leq b \quad \text{et} \quad x + ct \geq a$$

Ces points sont donc ceux qui sont à l'intérieur du cône caractéristique de base $[a, b]$ et de côté les demi droites $x + ct = a$ et $x - ct = b$. Si les données sont nulles en dehors de l'intervalle $[a, b]$, alors u est nulle en dehors de la *zone d'influence* qui vient d'être définie.

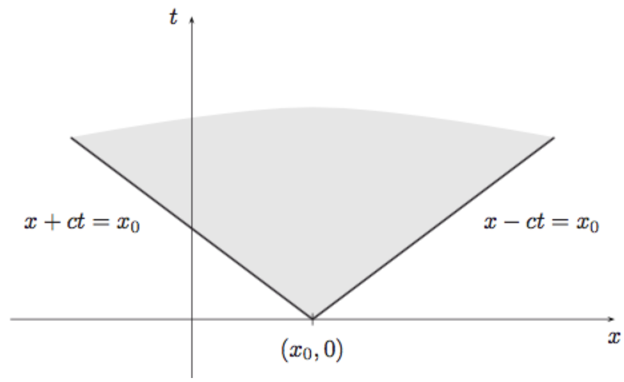

FIGURE 17. Région influencée par le point $(x_0, 0)$

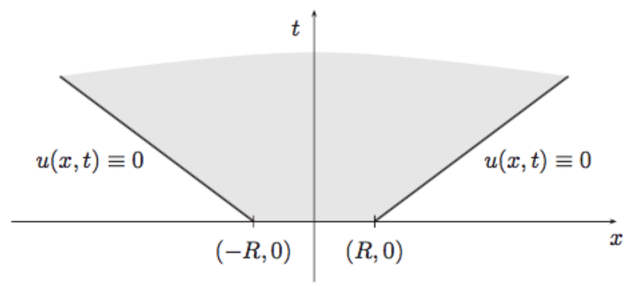

FIGURE 18. Région influencée par l'intervalle $[-R, R] \times \{0\}$

2.5. Le cas non homogène. Nous allons maintenant traiter le cas où le second membre est non nul.Supposons maintenant qu'une force extérieure $F(x,t)$ agit sur la corde, nous remplaçons donc dans l'équation (9) zéro par $F(x,t)$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = F(x,t) \tag{10}$$

THÉORÈME 2. *Soit $\varphi \in \mathcal{C}^2$, $\psi \in \mathcal{C}^1, F \in \mathcal{C}^1$. Alors le problème de Cauchy non homogène admet une solution et une seule dans $\mathcal{C}^2$.*

DÉMONSTRATION. Par linéarité, l'unicité se fait comme dans le cas homogène en se ramenant partout à zéro.

Existence

Nous allons chercher une solution explicite. Pour cela utilisons la formule de Green

PROPOSITION 2.1 (Rappel). *Si Ω est un ouvert du plan à frontière* régulière Γ *par morceaux, et si $P(x,t)$ et $Q(x,t)$ sont deux fonctions* régulières, *alors:*

$$\iint_\Omega [Q(x,t)_x - P(x,t)_t] dx\, dt = \oint_\Gamma [P(x,t)dx + Q(x,t)dt]$$

Supposons que nous ayons effectivement une solution $u(x,t)$. Soit (x_0,t_0) donné dans le demi plan supérieur $t>0$. Soit Δ le triangle caractéristique de sommet supérieur (x_0,t_0). Soit L_0, L_1, L_2 les côtés de ce triangle (base, côté droit et côté gauche).On a

$$-\iint_\Delta F(x,t)dxdt = \iint_\Delta (c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2})dxdt$$

posons $Q = c^2u_x$ et $P = u_t$. La formule de Green, donne

$$-\iint_\Delta F(x,t)dxdt = \oint_\Gamma [u_t dx + c^2u_x dt] = \int_{L_0} + \int_{L_1} + \int_{L_2} [u_t dx + c^2 u_x dt]$$

Sur la base L_0, $dt = 0$, on en déduit:

$$\int_{L_0} [u_t dx + c^2 u_x dt] = \int_{x_0-ct_0}^{x_0+ct_0} u_t(x,0)dx = \int_{x_0-ct_0}^{x_0+ct_0} \psi(x)dx$$

sur le côté droit L_1, nous avons $x + ct = x_0 + ct_0$ et ainsi $dx + cdt = 0$, d'où

$$\int_{L_1} [u_t dx + c^2 u_x dt] = -c\int_{L_1} (u_t dt + u_x dx) = -c\int_{L_1} du$$
$$= -c[u(x_0,t_0) - u(x_0+ct_0,0)] = -c[u(x_0,t_0) - \phi(x_0+ct_0)]$$

car nous avons l'intégrale d'un gradient. Il en est de même pour le côté gauche qui nous donne

$$\int_{L_2} [u_t dx + c^2 u_x dt] = c[\phi(x_0 - ct_0) - u(x_0,t_0)].$$

Ainsi,

$$-\iint_\Delta F(x,t)dxdt = \int_{x_0-ct_0}^{x_0+ct_0} \psi(x)dx + c[f(x_0-ct_0) + \phi(x_0+ct_0) - 2u(x_0,t_0)]$$

soit

$$u(x_0,t_0) = \frac{\phi(x_0-ct_0)+\phi(x_0+ct_0)}{2} + \frac{1}{2c}\int_{x_0-ct_0}^{x_0+ct_0} \psi(x)dx + \frac{1}{2c}\iint_\Delta F(x,t)dxdt$$

(x_0,t_0) étant arbitraire, nous avons donc bien une solution explicite donnée par la formule (de d'Alembert)

$$u(x,t) = \frac{\phi(x-ct)+\phi(x+ct)}{2} + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} \psi(\tau)d\tau + \frac{1}{2c}\iint_\Delta F(\xi,\tau)d\xi d\tau \tag{11}$$

Il reste à montrer que u ainsi définie est bien une solution. Nous allons utiliser le principe de superposition. Soit

$$v(x,t) = \frac{1}{2c}\iint_\Delta F(\xi,\tau)d\xi d\tau = \frac{1}{2c}\int_0^t \int_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)} F(\xi,\tau)d\xi d\tau$$

Nous allons voir que v est solution de (10) avec conditions initiales nulles (sous l'hypothèse que F et F_x soient continues). Nous avons bien

$$v(x,0) = 0$$

Utilisons la formule de dérivation suivante

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{a(t)}^{b(t)} G(\xi,t)d\xi = G(b(t),t)b'(t) - G(a(t),t)a'(t) + \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial}{\partial t}G(\xi,t)d\xi$$

il vient

$$\begin{aligned} v_t(x,t) &= \frac{1}{2c}\int_x^x F(\xi,t)dt + \frac{1}{2}\int_0^t [F(x+c(t-\tau),\tau) + F(x-c(t-\tau),\tau)]d\tau \\ &= \frac{1}{2}\int_0^t [F(x+c(t-\tau),\tau) + F(x-c(t-\tau),\tau)]d\tau \end{aligned}$$

en particulier

$$v_t(x,0) = 0$$

Les conditions initiales homogènes sont donc vérifiées.

Dérivons v deux fois par rapport à t, nous trouvons

$$v_{tt} = F(x,t) + \frac{c}{2}\int_0^t [F_x(x+c(t-\tau),\tau) - F_x(x-c(t-\tau),\tau)]d\tau$$

de même,

$$v_x(x,t) = \frac{1}{2c}\int_0^t [F(x+c(t-\tau),\tau) - F(x-c(t-\tau),\tau)]d\tau$$

et

$$v_{xx}(x,t) = \frac{1}{2}\int_0^t [F_x(x+c(t-\tau),\tau) - F_x(x-c(t-\tau),\tau)]d\tau$$

Nous voyons bien que v est solution de l'équation des ondes avec second membre F non nul et des conditions initiales nulles. De même, si nous notons w la solution de l'équation des ondes avec second membre nul et des conditions initiales non nulles, nous trouvons que w satisfait la première formule de d'Alembert.

Le principe de superposition permet alors de conclure que $u = w + v$ est solution de notre problème.

Remarque 2.1. *Il est à remarquer que même dans le cas non homogène, le domaine de dépendance de la solution ne change pas.*

□

3. L'équation des ondes. Le problème mixte

3.1. Le cas de la corde semi-infinie avec extrémité fixe. Considérons l'équation des ondes sur le domaine $I = [0, \infty)$ avec $t > 0$.

Si nous posons des conditions initiales comme dans le cas de la corde infinie des deux côtés, nous aurons deux situations. Pour le cas $x > ct$, la formule est satisfaisante et nous donne la solution au point (x,t) (voir le domaine de dépendance). Par contre, pour le

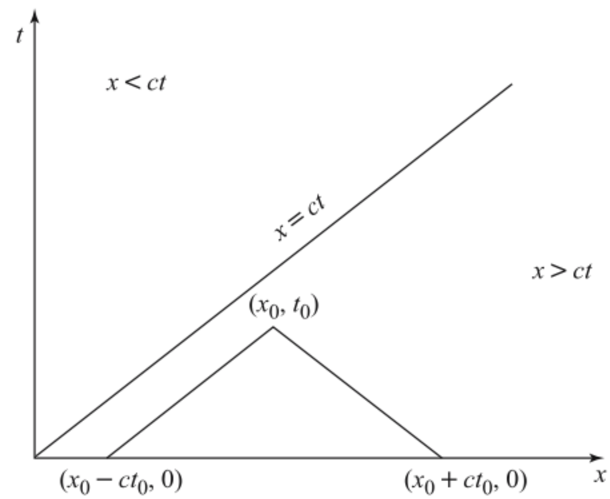

FIGURE 19. Région influencée par les points $(x, 0),\ x > 0$

cas $x < ct$, nous rencontrons un problème car une seule famille de droites caractéristiques passe par ces points, et nos données ne suffisent pas pour bien définir la solution (voir dessin).

La deuxième famille démarre avec $x < 0$, région qui n'existe pas pour la corde. Ces caractéristiques coupent la demi droite $(0, t), t > 0$, chacune en un point unique. L'idée naturelle est donc d'imposer des données sur cette demi droite. Il restera alors à trouver une formule équivalente à celle de d'Alembert pour la solution.

Pour cela, nous allons travailler formellement, et faire comme si la solution existait sur toute la droite, chercher des propriétés spécifiques, à cette solution, et ensuite la restreindre à la demi droite $x > 0$.

Supposons que l'on impose, les conditions suivantes

$$\begin{cases} u(x,0) = \varphi(x) & x \geq 0 \\ u_t(x,0) = \psi(x) & x \geq 0 \\ u(0,t) = 0 & t \geq 0 \end{cases}$$

La dernière condition s'appelle **condition aux limites**.

Si la solution existe, comment l'écrirait-on en s'inspirant de la formule de d'Alembert. Comme indiqué plus haut, nous avons deux situations. Dans le cas $x_0 > ct_0$, la formule de d'Alembert au point (x_0, t_0), ne dépend que des valeurs de φ et ψ, sur la base du triangle de dépendance,

$$u(x_0, t_0) = \frac{\phi(x_0 - ct_0) + \phi(x_0 + ct_0)}{2} + \frac{1}{2c}\int_{x_0-ct_0}^{x_0+ct_0} \psi(\tau)d\tau$$

Supposons maintenant que $x_0 < ct_0$. Travaillons comme si nous étions sur $\mathbb{R}$. Nous avons vu que dans ce cas, la solution générale s'écrivait sous la forme

$$u(x,t) = f(x+ct) + g(x-ct)$$

soit, pour $x = 0$, $g(-ct) = -f(ct)$.

Posons $\alpha = -ct$, il s'en suit que $g(\alpha) = -f(-\alpha)$. Le tour de passe-passe, est donc de remplacer les valeurs de g, pour $\alpha < 0$, par les valeurs de f avec $-\alpha > 0$.

Les conditions initiales donnent alors

$$f(\xi) = \frac{1}{2}\varphi(\xi) + \frac{1}{2c}\int_0^{\xi} \psi(\tau)d\tau + a$$

$$g(\eta) = \frac{1}{2}\varphi(\eta) + \frac{1}{2c}\int_0^{\eta} \psi(\tau)d\tau + b$$

En remplaçant ξ, par $x+ct$ et η par $x-ct$, nous obtenons

$$f(x+ct) = \frac{1}{2}\varphi(x+ct) + \frac{1}{2c}\int_0^{x+ct} \psi(\tau)d\tau + a$$

$$g(\eta) = -\frac{1}{2}\varphi(ct-x) - \frac{1}{2c}\int_0^{ct-x} \psi(\tau)d\tau - a$$

soit

$$u(x,t) = \begin{cases} \frac{1}{2}[\varphi(x+ct) + \frac{1}{2}\varphi(x-ct)] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} \psi(\tau)d\tau & \text{si } x > ct \\ \frac{1}{2}[\varphi(x+ct) - \frac{1}{2}\varphi(ct-x)] + \frac{1}{2c}\int_{ct-x}^{x+ct} \psi(\tau)d\tau & \text{si } x < ct \end{cases}$$

Remarque 2.2. *Pour que la solution classique existe, il est nécessaire d'imposer à φ d'être de classe $\mathcal{C}^2$, et ψ d'être de classe $\mathcal{C}^1$, avec en plus $f(0) = f''(0) = g(0) = 0$, auquel cas, les deux formules sont confondues pour $x = ct$.*

Remarque 2.3 (Interprétation physique). *Si le point (x_0, t_0), est tel que $x_0 > ct_0$, la caractéristique $x + ct = x_0 + ct_0$ rencontre l'axe des x au point $(x_0 - ct_0, 0)$; tout se passe comme dans le cas de la corde infinie .*
Par contre, la caractéristique $x - ct = x_0 - ct_0$, rencontre l'axe des t en $(0, t_0 - \frac{x_0}{c})$, et la caractéristique $x+ct = ct_0 - x_0$, rencontre l'axe des x, en $(ct_0 - x_0, 0)$. Donc la perturbation provoquée par (φ, ψ) au point $ct_0 - x_0$, $(\varphi(ct_0 - x_0), \psi(ct_0 - x_0))$,se propage jusqu'à $x = 0$, (à l'instant $t_0 - \frac{x_0}{c}$) et est réfléchie dans l'autre sens (représentée par $-f(ct_0 - x_0)$).

Exemple 2.1.

$$\begin{aligned} u_{tt} &= 4u_{xx}, && 0 < x < \infty, && t > 0 \\ u(x,0) &= |\sin x|, && 0 \leq x < \infty, && \\ u_t(x,0) &= 0, && 0 \leq x < \infty && \\ u(0,t) &= 0, && && t \geq 0 \end{aligned}$$

dont la solution est :

- pour $x > 2t$

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[f(x+2t) + f(x-2t)] = \frac{1}{2}[|\sin(x+2t)| - |\sin(x-2t)|]$$

- et pour $x < 2t$

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[f(x+2t) + f(2t-x)] = \frac{1}{2}[|\sin(x+2t)| - |\sin(2t-x)|]$$

Remarque 2.4. *Nous pouvons également regarder le cas de la corde finie, cependant, ce cas est un peu plus compliqué à écrire comme formule de d'Alembert, et nous allons nous contenter de ne l'étudier que dans le cas des séries de Fourier.*

CHAPTER 3

La classification

CHAPTER 4

La méthode de séparation des variables

CHAPTER 5

Le problème de Sturm-Liouville

CHAPTER 6

Les transformations intégrales

CHAPTER 7

Quelques propriétés du laplacien