الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE MOHAMED BOUDIAF –M'SILA-

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique

Département de Mathématiques

Cours de

Mesure et Intégration

Par:

DAHIA Elhadj

Troisième année Licence Mathématiques (L.M.D)

Table des matières

0.1 Introduction

Le présent polycopié reprend un cours de troisième année Licence Mathématiques donné à l'Université de Mohamed Boudiaf-M'sila pendant les années 2013-2016. Le but de ce cours était de présenter aux étudiants les notions de base concernant la Théorie de la Mesure et de l'Intégration. Nous rappelons que le contenu de ce polycopié est exactement le même proposé dans l'offre de formation officiel applicable actuellement dans tous les départements de Mathématiques des Universités Algériennes.

Nous supposons que le lecteur a une bonne connaissance de la topologie usuelle de $\mathbb{R}$, les premiers principes de la théorie des ensembles et le concept d'intégration au sens de Riemann.

Comme ce polycopié est un cours, nous avons pris le parti de démontrer presque tous les résultats de façon complète, c'est-à-dire sans renvoyer au cours de la preuve à un résultat bien connu ou en admettant un résultat auxiliaire difficile. Nous avons d'ailleurs inclus un nombre considérable d'exercices résolus tels qu'ils ont été testés dans le cadre de travaux dirigés, ou ont fait l'objet de devoirs de réflexion ou de contrôle des connaissances. Il va de soi que le lecteur aura intérêt à essayer de résoudre le problème sans lire la solution au préalable. Les chapitres de ce polycopié ce terminent par des exercices non-corrigés puisés dans les fonds des séries de T.D. de l'équipe pédagogique du département de Mathématiques de l'Université de M'sila depuis 2010.

L'originalité de ce polycopié réside dans son contenu, inspiré sans vergogne de la littérature existante.

Venons-en à une description plus précise de ce que l'on trouvera dans ce polycopié.

Dans le premier chapitre, nous donnerons rapidement les propriétés utiles concernant les opérations sur les ensembles, la dénombrabilité, les limites d'ensembles et les fonctions caractéristiques d'ensembles. Nous présenterons, par la suite, la notion de tribu particulièrement la tribu borélienne. Nous offrirons une étude détaillée concernant la mesure positive, la mesure extérieure et en particulier la mesure de Lebesgue sur la tribu des boréliens.

Nous donnerons, dans le second chapitre, les propriétés générales des fonctions mesurables notamment les applications numériques mesurables qui seront désignées par $\mathcal{L}^0$. Pour les suites des fonctions dans $\mathcal{L}^0$, nous étudierons la convergence presque partout et la convergence en mesure.

Dans le troisième chapitre, nous aborderons et traiterons la notion d'intégration par rapport à une mesure positive. En premier lieu, nous ferons l'étude pour les fonctions numériques mesurables et nous donnerons le Théorème de convergence monotone (ou de Beppo-Levi) et ses conséquences. Nous étudierons ensuite l'intégrale d'une fonction numérique mesurable et nous finirons par une comparaison de l'intégrale de Lebesgue avec l'intégral de Riemann. Enfin, nous donnerons un aperçu général sur la construction de l'espace L^1 et le théorème de convergence dominée dans cet espace.

Nous consacrons dans le quatrième chapitre à l'étude de la mesure produit, notamment les Théorèmes de Fubini et quelques applications.

Comme toute entreprise humaine n'est infaillible, nous tenons, à la fin de cette petite introduction, à solliciter la haute bienveillance de nos lecteurs de nous faire parvenir toutes leurs remarques via notre adresse E-mail : hajdahia@univ-msila.dz.

Chapitre 1

Tribus et mesures

1.1 Rappels sur la théorie des ensembles.

Dans toute la suite, on considère un ensemble de base X. On rappelle que $\mathcal{P}(X)$ désigne la famille de tous les sous-ensembles de X. Pour tout sous-ensembles A et B de X on a

$A^c = \{x \in X : x \notin X\}$, le complémentaire de A dans X.

$A \backslash B = \{x \in X : x \in A \text{ et } x \notin B\} = A \cap B^c = A \backslash (A \cap B)$

$A \Delta B = (A \backslash B) \cup (B \backslash A) = (A \cup B) \backslash (A \cap B)$

Dénombrabilité

Il est essentiel, pour tout ce qui concerne la théorie de la mesure, de savoir distinguer ce qui est dénombrable de ce qui ne l'est pas.

Définition 1.1.1 *L'ensemble E est dit dénombrable s'il existe une bijection entre E et $\mathbb{N}$. En d'autres termes, on peut écrire*

$$E = \{x_n : n \in \mathbb{N}\} = \{x_0, ..., x_n, ...\}$$

C'est-à-dire tout ensemble dénombrable pouvant être indexé par $\mathbb{N}$ (ou si on peut énumérer tous ses éléments).

Remarques 1.1.2 *1) Tout ensemle fini est dénombrable.*
2) $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ sont dénombrables mais $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.
3) Toute partie d'un ensemle dénombrable est dénombrable.
4) Si pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, l'ensemble A_n est dénobrable, alors $\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$ est dénombrable.
5) La propriété 4) reste vrai si l'on remplace la suite d'ensemble $(A_n)_{n \geqslant 1}$ par famille dénombrable $(A_i)_{i \in I}$, c'est-à-dire avec I dénombrable .
6) Tout produit d'un nombre fini d'ensembles dénombrables est dénombrable.

En général, les familles dénombrables ou les propriétés qui s'expriment en termes de dénombrabilité sont notées avec le préfixe σ pour témoigner de leur caractère dénombrable (exemples : σ-algèbre, σ-additivité).

Limites d'ensembles

Définition 1.1.3 *Soit X un ensemble non-vide et $(A_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de parties de X, on définit la limite supérieure et inférieure de la suite $(A_n)_{n\geqslant 1}$ par*

$$\begin{aligned}
\overline{\lim} A_n &= \limsup_n A_n := \bigcap_{n\geqslant 1}\bigcup_{k\geqslant n} A_k = \bigcap_{n=1}^{+\infty}\bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k \\
\underline{\lim} A_n &= \liminf_n A_n := \bigcup_{n\geqslant 1}\bigcap_{k\geqslant n} A_k = \bigcup_{n=1}^{+\infty}\bigcap_{k=n}^{+\infty} A_k
\end{aligned}$$

La notation $\inf\sup$ et $\sup\inf$ est à prendre au sens de la relation d'ordre partiel $\subset$ sur les parties de X.

Remarque 1.1.4 *Noter que*

$$\underline{\lim} A_n \subset \overline{\lim} A_n \tag{1.1}$$

En effet, $\bigcap_{k\geqslant n} A_k \subset A_k$ *pour tout* $k \geqslant n$. *On a donc* $\bigcap_{k\geqslant n} A_k \subset \bigcup_{k\geqslant n} A_k$ *pour tout* n. *On a alors pour tout* n

$$\bigcap_{k\geqslant n} A_k \subset \bigcap_{n\geqslant 1}\bigcup_{k\geqslant n} A_k = \overline{\lim} A_n$$

Finalement,

$$\bigcup_{n\geqslant 1}\bigcap_{k\geqslant n} A_k \subset \overline{\lim} A_n$$

C'est à dire l'inclusion (1.1).

Proposition 1.1.5 *[18, Page 5](Suite convergente d'ensembles)*

1) Si $(A_n)_n$ est croissante i.e. $A_n \subset A_{n+1}$, $\forall n \geq 1$, alors

$$\overline{\lim} A_n = \underline{\lim} A_n = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$$

2) Si $(A_n)_n$ est décroissante i.e. $A_{n+1} \subset A_n$, $\forall n \geq 1$, alors

$$\overline{\lim} A_n = \underline{\lim} A_n = \bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n$$

Dans les deux cas on dira que la suite $(A_n)_n$ est convergente.

Pour les suites réelles, rappelons que si $(a_n)_n$ est une suite dans $\mathbb{R}$, on définit

$$\begin{aligned} \limsup_n a_n &= \inf_{n\geq 1} \sup_{k\geq n} a_k \\ \liminf_n a_n &= \sup_{n\geq 1} \inf_{k\geq n} a_k \end{aligned}$$

Ces deux nombres existent toujours dans $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$.

De même si $(f_n)_n$ est une suite de fonctions d'un ensemble X dans $\mathbb{R}$, $f_n : X \longrightarrow \mathbb{R}$, on définit $\limsup_n f_n$ et $\liminf_n f_n$ comme fonctions de X dans $\overline{\mathbb{R}}$

$$\begin{aligned} \left(\limsup_n f_n\right)(x) &= \inf_{n\geq 1} \sup_{k\geq n} f_k(x) \\ \left(\liminf_n f_n\right)(x) &= \sup_{n\geq 1} \inf_{k\geq n} f_k(x) \end{aligned}$$

Fonctions caractéristiques d'ensembles

Rappelons que la fonction caractéristique (ou indicatrice) χ_A d'une partie A de X est la fonction $\chi_A : X \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in A \\ 0, & \text{si } x \notin A \end{cases}$$

Cette fonction ne prend donc que deux valeurs 1 ou 0 selon qu'elle est évaluée sur A ou non.

La fonction indicatrice vérifie les propriétés suivantes, pour la preuve voir par example [2, Page 22]

Proposition 1.1.6 *Soient X un ensemble non vide et $A, B \subset X$.*

1) Si $A \cap B = \phi$ alors $\chi_{A\cup B} = \chi_A + \chi_B$.

2) On a $\chi_{A^c} = 1 - \chi_A$ et si $B \subset A$ alors $\chi_{A\setminus B} = \chi_A - \chi_B$.

3) Si $(A_n)_n$ une suite de parties de X on a alors

$$\chi_{\underline{\lim} A_n} = \liminf_n \chi_{A_n} \quad et \quad \chi_{\overline{\lim} A_n} = \limsup_n \chi_{A_n} \tag{1.2}$$

De plus si les A_n sont disjoints deux à deux, alors $\chi_{\cup A_n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \chi_{A_n}$

1.2 Algèbres et tribus

Maitenant on va définir un sous-ensemble de $\mathcal{P}(X)$, (on dit aussi une famille des parties de X) qu'on appelle tribu sur lequel on pourra définir une mesure comme une application de cette famille dans $[0, +\infty]$ avec certaines conditions.

Définition 1.2.1 *Soit X un ensemble et $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}(X)$ une famille de parties de X. On dit que $\mathcal{M}$ est une tribu (ou σ-algèbre) sur X, si l'on a les trois propriétés suivantes*
(c1) $\phi \in \mathcal{M}$.
(c2) Si $A \in \mathcal{M}$ alors $A^c \in \mathcal{M}$.
(c3) Si $(A_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite de $\mathcal{M}$ alors $\bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} A_n \in \mathcal{M}$.

Les éléments de $\mathcal{M}$ sont appelés les parties mesurables de X et on dit que $(X, \mathcal{M})$ est un espace mesurable.

Remarque 1.2.2 *Si $\mathcal{M}$ est une tribu sur X alors,*
(i) $X \in \mathcal{M}$ car $X = \phi^c \in \mathcal{M}$ d'aprés (c1) et (c2) de la définition précédente.
(ii) Si $(A_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite de $\mathcal{M}$ alors $\bigcap\limits_{n=1}^{+\infty} A_n \in \mathcal{M}$. En effet, par (c2) et (c3), $A_n \in \mathcal{M}$ implique que

$$\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n = \left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n^c\right)^c \in \mathcal{M}.$$

(iii) Si $A, B \in \mathcal{M}$ alors $A\backslash B, A\Delta B \in \mathcal{M}$ car

$$A\backslash B = A \cap B^c \in \mathcal{M} \quad et \quad A\Delta B = (A\backslash B) \cup (B\backslash A) \in \mathcal{M}.$$

Définition 1.2.3 *On appelle Algébre de parties d'un ensemble X toute famille $\mathcal{A}$ de parties de X vérifiant les propriétés suivantes*
1) $\phi \in \mathcal{A}$
2) Si $A \in \mathcal{A}$ alors $A^c \in \mathcal{A}$
3) Si $A, B \in \mathcal{A}$ alors $A \cup B \in \mathcal{A}$.

Remarque 1.2.4 *Une tribu est une algèbre d'ensembles stable par réunion dénombrable.*

Exemples 1.2.5 *Soit X un ensemble non vide.*

1) La famille $\mathcal{P}(X)$ de toute les parties de X est la plus grande tribu sur X.

2) La famille $\mathcal{M} = \{\phi, X\}$ est la plus petite tribu sur X.

3) Si X est un ensemble infini alors, la famille $\mathcal{M}$ définie par

$$\mathcal{M} = \{A \subset X, \ A \text{ ou } A^c \text{ est dénombrale}\}$$

est une tribu sur X.

4) Soit $(E_n)_{n\geqslant 1}$ une partition dénombrable de X c-à-d

$$\begin{cases} E_n \cap E_m, \text{ pour tout } m \neq n, \\ X = \bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n \end{cases}$$

Alors

$$\mathcal{M} = \left\{ A \subset X, \ A = \bigcup_{i\in I} E_i, \ I \subset \mathbb{N}^* \right\}$$

est une tribu sur X, dite engendrée par la partition $(E_n)_{n\geqslant 1}$, comme on le vérifiera à titre d'exercice.

5) Si X est un ensemble infini. La famille $\mathcal{A}$ définie par

$$\mathcal{A} = \{A \subset X, \ A \text{ ou } A^c \text{ fini}\}$$

n'est pas une tribu sur X bien que ce soit une algèbre de parties de X.

Proposition 1.2.6 *Si l'algèbre $\mathcal{A}$ vérifiée la propriété*

$$(B_n)_{n\geq 1} \subset \mathcal{A}, \ (B_n)_{n\geq 1} \text{ est croissante } \Longrightarrow \overset{\infty}{\underset{n=1}{\cup}} B_n \in \mathcal{A}$$

alors $\mathcal{A}$ est une tribu sur X.

Démonstration. Soit $(A_n)_{n\geq 1} \subset \mathcal{A}$ une suite de parties de X. Si on pose $B_n = \overset{n}{\underset{k=1}{\cup}} A_k \in \mathcal{A}$, la suite $(B_n)_{n\geq 1}$ est croissante donc $\overset{\infty}{\underset{n=1}{\cup}} B_n \in \mathcal{A}$. D'autre part il est clair que $\overset{\infty}{\underset{n=1}{\cup}} B_n = \overset{\infty}{\underset{n=1}{\cup}} A_n$, d'où $\overset{\infty}{\underset{n=1}{\cup}} A_n \in \mathcal{A}$ ■

Proposition 1.2.7 *$\mathcal{M}$ est une tribu sur X si, et seulement si*

(1) $\phi \in \mathcal{M}$.

(2) $\mathcal{M}$ stable par complémentation et intersection finie.

(3) Si $(A_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite de $\mathcal{M}$ disjoints deux à deux (i.e. $A_i \cap A_j = \phi$, $\forall i \neq j$), alors $\bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} A_n \in \mathcal{M}$.

Démonstration. La condition nécessaire est évidente. Pour montrer qu'elle est suffisante, il suffit de montrer que $\mathcal{M}$ est stable par réunion dénombrable, soit donc $(A_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite de $\mathcal{M}$ et posons

$$\begin{cases} B_1 = A_1 \\ B_n = A_n \cap \left(\overset{n-1}{\underset{i=1}{\cup}} A_i\right)^C, \quad n \geq 2 \end{cases} \tag{1.3}$$

d'aprés l'hypothèse (2) de la proposition on a $B_n \in \mathcal{M}$ pour tout $n \geq 1$. Pour tout $n \neq m$, si $n > m$ on a

$$B_m \cap B_n \subset A_m \cap B_n = A_m \cap \left(A_n \cap A_1^c \cap ... \cap A_m^c \cap ... \cap A_{n-1}^c\right) = \phi$$

d'où $B_m \cap B_n = \phi$, $\forall n \neq m$. D'autre part, il est clair que $\bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} B_n \subset \bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} A_n$. Pour l'inclusion inverse, si $x \in \bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} A_n$, il existe $n \geq 1$ tel que $x \in A_n$. On pose r la plus petite $n \geq 1$ qui vérifie $x \in A_n$ i.e.

$$r = \min \{n \in \mathbb{N}, x \in A_n\}$$

alors $x \in A_r, x \notin A_{r-1}, x \notin A_{r-2}, ...$et $x \notin A_1$ ce qui donne $x \in B_r$, alors $x \in \bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} B_n$. Nous avons montré que les B_n sont disjoints deux à deux et $\bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} A_n = \bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} B_n$ donc d'après l'hypothèse (3) de la proposition, on a $\bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} A_n \in \mathcal{M}$. ■

Lemme 1.2.8 *Soit $(\mathcal{M}_i)_{i\in I}$ une famille quelconque de tribus sur X. Alors $\bigcap\limits_{i\in I} \mathcal{M}_i$ est encore une tribu sur X.*

Démonstration. La vérification est immédiate. ■

Définition 1.2.9 *Soit $\mathcal{S}$ une famille de parties de X. On note $\sigma(\mathcal{S})$ l'intersection de toutes les tribus $\mathcal{M}$ contenant $\mathcal{S}$. Alors, $\sigma(\mathcal{S})$ est une tribu sur X appelée tribu engendrée par $\mathcal{S}$. C'est la plus petite tribu sur X qui contient $\mathcal{S}$.*

En pratique, pour montrer qu'une tribu $\mathcal{M}$ est la tribu engendrée par $\mathcal{S}$ il suffit de montrer que toute tribu contenant $\mathcal{S}$ contient $\mathcal{M}$.

Tribu borélienne ou tribu de Borel

Rappelons que, si X est un espace topologique (métrique), sa topologie $\mathcal{O}$ est l'ensemble de ses ouverts. La famille de parties $\mathcal{O}$ n'est pas une tribu (sauf cas très partiuculiers), par example, si $X = \mathbb{R}$ on a $\left]-\frac{1}{n}, 1\right[\in \mathcal{O}$ pour tout $n \geq 1$ mais $\bigcap_{n=1}^{+\infty} \left]-\frac{1}{n}, 1\right[= [0, 1[\notin \mathcal{O}$. De même le complémentaire d'un ouvert, c-à-d un fermé, n'est pas en général un ouvert. On est donc amené à définir les ensembles mesurables comme éléments d'une tribu contenant $\mathcal{O}$.

Définition 1.2.10 *La tribu borélienne d'un espace topologique $(X, \mathcal{O})$ est $\sigma(\mathcal{O})$, la tribu engendrée par $\mathcal{O}$. On la note $\mathcal{B}(X)$. Un borélien est un ensemble mesurable $A \in \mathcal{B}(X)$.*

Proposition 1.2.11 *La tribu borélienne $\mathcal{B}(X)$ est aussi engendrée par les fermés de l'espace topologique X.*

Démonstration. Soit $\mathcal{F}$ la famille de tous les fermés de X. Comme les tribus sont stables par passage au complémentaire et que les fermés sont les complémentaires des ouverts on a $\mathcal{F} \subset \mathcal{B}(X)$ et alors $\sigma(\mathcal{F}) \subset \mathcal{B}(X)$. Inversement, soit $\theta \in \mathcal{O}$ un ouvert de X, alors $\theta^c \in \mathcal{F} \subset \sigma(\mathcal{F})$ donc $\theta \in \sigma(\mathcal{F})$. Ce qui montre que $\mathcal{O} \subset \sigma(\mathcal{F})$ et puisque $\mathcal{B}(X) = \sigma(\mathcal{O})$ on a $\mathcal{B}(X) \subset \sigma(\mathcal{F})$. ■

Lemme 1.2.12 *Tout ouvert non vide de $\mathbb{R}$ est réunion dénombrable d'intervalles $]a, b[$.*

Démonstration. Soit θ un ouvert non vide de $\mathbb{R}$. Posons la partie $A \subset \mathbb{Q}^2$ définie par

$$A = \left\{(p,q) \in \mathbb{Q}^2,\ p < q :]p,q[\subset \theta\right\}.$$

Si $x \in \theta$, il existe $\varepsilon_x > 0$ tel que $]x-\varepsilon_x, x+\varepsilon_x[\subset \theta$. Par la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ en peut prendre $p_x, q_x \in \mathbb{Q}$ vérifiant

$$x - \varepsilon_x \leq p_x \leq x \quad \text{et} \quad x \leq q_x \leq x + \varepsilon_x$$

il résulte que

$$x \in]p_x, q_x[\subset]x-\varepsilon_x, x+\varepsilon_x[\subset \theta,$$

d'où $p_x, q_x \in A$, donc

$$x \in]p_x, q_x[\subset \bigcup_{(p,q)\in A}]p,q[,$$

c'est-à-dire $\theta \subset \bigcup\limits_{(p,q)\in A}]p,q[$. Inversement, si $x \in \bigcup\limits_{(p,q)\in A}]p,q[$, il existe $p_x, q_x \in A$ avec $x \in]p_x, q_x[\subset \theta$ d'où $x \in \theta$. On en déduit

$$\theta = \bigcup_{(p,q)\in A}]p,q[.$$

Cette réunion est dénombrable car la partie $A \subset \mathbb{Q}^2$ est dénombrable. ∎

Théorème 1.2.13 *(La tribu $\mathcal{B}(\mathbb{R})$)*
La tribu $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ est engendreé par les intervalles $]a,+\infty[$ pour $a \in \mathbb{R}$.

Démonstration. Soient $\mathcal{S} = \{]a,+\infty[,\ a \in \mathbb{R}\}$ la famille de toute les intervalles $]a,+\infty[$ et $\mathcal{O}$ l'ensemble des ouverts de $\mathbb{R}$. Il est clair que $\mathcal{S} \subset \mathcal{O}$ alors $\sigma(\mathcal{S}) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$ car par définition on a $\sigma(\mathcal{O}) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Maintenant, montrons que $\mathcal{O} \subset \sigma(\mathcal{S})$, soit $\theta \in \mathcal{O}$ alors, d'aprés le lemme précèdent, θ est une réunion dénombrable d'intervalles de la forme $]a,b[$ c-à-d $\theta = \bigcup\limits_{n=1}^{+\infty}]a_n, b_n[$. Pour tout $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$ on a

$$]a,b[=]-\infty, b[\cap]a,+\infty[\quad \text{et} \quad [b,+\infty[= \bigcap_{n=1}^{+\infty}]b - \tfrac{1}{n}, +\infty[.$$

Pour tout $n \geq 1$ on a $\left]b - \frac{1}{n}, +\infty\right[\in \mathcal{S} \subset \sigma(\mathcal{S})$ donc la stabilité par intérsection garantit que $[b, +\infty[\in \sigma(\mathcal{S})$ et par complémentaire,

$$]-\infty, b[= ([b, +\infty[)^c \in \sigma(\mathcal{S})$$

et $]a, +\infty[\in \mathcal{S} \subset \sigma(\mathcal{S})$ ce qui donne $]a, b[\in \sigma(\mathcal{S})$. Alors, $\theta = \bigcup_{n=1}^{+\infty}]a_n, b_n[\in \sigma(\mathcal{S})$. Finalement on obtient l'inclusion $\mathcal{O} \subset \sigma(\mathcal{S})$ ce qui implique que $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset \sigma(\mathcal{S})$. ■

1.3 Mesures positives.

Définition 1.3.1 *Soit $(X, \mathcal{M})$ un espace mesurable, une mesure positive sur $(X, \mathcal{M})$ (ou, plus simplement, sur X) est une application d'ensembles $\mu : \mathcal{M} \longrightarrow [0, +\infty]$ vérifiant les propriétés suivantes*

(c1) $\mu(\phi) = 0$.

(c2) Pour toute suite $(A_n)_{n \geqslant 1} \subset \mathcal{M}$ de parties mesurables deux-à-deux disjointes, on a

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

On dit que $(X, \mathcal{M}, \mu)$ est un espace mesuré.

Commentaires

- La condition (c2) s'appelle la propriété de σ-additivité de la mesure.
- On dira souvent "mesure" au lieu de "mesure positive".
- On admettra $+\infty$ comme valeur possible, $\mathbb{R}$ est de longueur infinie.

Remarques 1.3.2 *1) Dans la définition précédente, la condition (c1) peut être remplacée par la condition*

$$\exists A \in \mathcal{M} : \mu(A) < \infty, \ \textit{(i.e. } \mu(A) \textit{ est finie).}$$

2) La σ-additivité contient, en particulier, la propriété d'additivité simple pour tout $n \geq 1$, si les n ensemble mesurables, $A_1, \ldots, A_n$ sont deux-à-deux disjointes, alors

$$\mu(A_1 \cup \ldots \cup A_n) = \mu(A_1) + \ldots + \mu(A_n),$$

il suffit de prendre $A_{n+1} = A_{n+2} = \cdots = \phi$.

Définition 1.3.3 *Soient X un ensemble et $\mathcal{M}$ une tribu sur X. On appelle probabilité une mesure $\mathbb{P}$ sur $\mathcal{M}$ telle que $\mathbb{P}(X) = 1$.*
On dit que $(X, \mathcal{M}, \mathbb{P})$ est un espace probabilisé et les éléments de $\mathcal{M}$ sont appelés les événements.

Exemples 1.3.4 *1)* ***Mesure de comptage.*** *Sur $(X, \mathcal{P}(X))$, on définit la mesure de comptage par*

$$\begin{cases} \mu(A) = card(A), & si\ A\ est\ fini \\ \mu(A) = \infty, & sinon \end{cases}$$

2) ***Mesure de Dirac en un point.*** *Soit X un ensemble et $x_0 \in X$ un point de X. Pour tout sous-ensemble A de X, la mesure δ_{x_0} de Dirac (sur $\mathcal{P}(X)$) au point x_0 est définie par*

$$\begin{cases} \delta_{x_0}(A) = 1, & si\ x_0 \in A \\ \delta_{x_0}(A) = 0, & si\ x_0 \notin A \end{cases}$$

On peut remarquer que la mesure de Dirac est une probabilité.

3) ***Mesures discrètes.*** *Soit X un ensemble, $(a_n)_{n\geq 1}$ une suite de points de X et $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ une suite de réels strictement positifs. Pour toute partie A de X on pose*

$$\mu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n.\delta_{a_n}(A) = \sum_{n=1, a_n \in A}^{\infty} \alpha_n$$

On définit ainsi une mesure positive sur $\mathcal{P}(X)$ que l'on note

$$\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n.\delta_{a_n}.$$

Proposition 1.3.5 *Soit $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré. La mesure μ possède les propriétés suivantes*

1) ***(La monotonie).*** *Si $A, B \in \mathcal{M}$ avec $A \subset B$ alors $\mu(A) \leq \mu(B)$.*

2) Si $A, B \in \mathcal{M}$ avec $A \subset B$ et $\mu(A) < \infty$ alors $\mu(B \backslash A) = \mu(B) - \mu(A)$.

3) ***(La sous-additivité).*** *Pour toute suite $(A_n)_{n \geqslant 1}$ dans $\mathcal{M}$ on a*

$$\mu\Big(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\Big) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

Démonstration. 1) Si $A, B \in \mathcal{M}$ avec $A \subset B$ alors $B = A \cup (B \backslash A)$, puisque $A \cap (B \backslash A) = \phi$, par l'additivité de la mesure on a

$$\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \backslash A) \geq \mu(A).$$

2) Si de plus $\mu(A) < \infty$ alors $\mu(B \backslash A) = \mu(B) - \mu(A)$.

3) A partir de la suite $(A_n)_{n \geqslant 1}$, on construit la suite $(B_n)_{n \geqslant 1}$ définie par (1.3). On a $B_n \subset A_n$ pour tout $n \geqslant 1$, les B_n sont disjoints deux à deux dans $\mathcal{M}$ et $\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n$ (voir la preuve de la Proposition 1.2.7). La monotonie de la mesure donne $\mu(B_n) \leq \mu(A_n)$ pour tout $n \geqslant 1$. D'autre part, d'après la σ-additivité de la mesure on a

$$\mu\Big(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\Big) = \mu\Big(\bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

■

Définition 1.3.6 *On dit qu'une mesure positive μ est finie si elle est à valeurs finies c-à-d*

$$\mu(A) < \infty \text{ pour tout } A \in \mathcal{M}$$

Autrement dit, $\mu(X) < \infty$.

Définition 1.3.7 *Soit μ une mesure sur $(X, \mathcal{M})$. On dit qu'elle est σ-finie s'il existe une suite de parties mesurables $(E_n)_{n \geqslant 1}$ telle que $X = \bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n$ et $\mu(E_n) < \infty$ pour tout $n \geqslant 1$.*

Exemples 1.3.8 *1) La mesure de Direc δ_x est finie car $\delta_x(X) = 1 < \infty$.*

2) La mesure de compage sur X est :

i) finie si et seulement si X est fini

ii) σ-finie si et seulement si X est dénombrable.

1.4 Propriétés des mesures, mesures extérieures, mesures complètes.

La propiété de la continuité de la mesure sera à la base d'un des théorèmes les plus importants et l'un des plus utilisés pour l'intégrale de Lebesgue et le théorème de convergence monotone.

Théorème 1.4.1 *Soit* $(X, \mathcal{M}, \mu)$ *un espace mesuré, alors*
1) ***La continuité croissante.*** *Si* $(A_n)_{n\geq 1}$ *est une suite croissante de parties mesurables, on a*

$$\mu(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n) = \lim_{n\longrightarrow\infty} \mu\left(A_n\right)$$

2) ***La continuité décroissante.*** *Si* $(A_n)_{n\geq 1}$ *est une suite décroissante de parties mesurables avec*

$$\mu\left(A_1\right) < \infty, \tag{1.4}$$

alors, on a

$$\mu(\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n) = \lim_{n\longrightarrow\infty} \mu\left(A_n\right)$$

Démonstration. 1) Posons

$$\begin{cases} B_1 = A_1 \\ B_n = A_n \backslash A_{n-1}, \text{ pour } n \geq 2 \end{cases}$$

les ensembles B_n sont mesurables et $A_n = \bigcup\limits_{k=1}^{n} B_k$ pour tout $n \geq 1$, ce qui implique que $\bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} B_n = \bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} A_n$. De plus, les B_n, $n \geq 1$, sont deux-à-deux disjoints, donc

$$\begin{aligned} \mu\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) &= \mu\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n) = \lim_{n\longrightarrow\infty} \sum_{k=1}^{n} \mu(B_k) \\ &= \lim_{n\longrightarrow\infty} \mu\left(\bigcup_{k=1}^{n} B_k\right) = \lim_{n\longrightarrow\infty} \mu\left(A_n\right) \end{aligned}$$

2) Pour tout $n \geq 1$ posons $B_n = A_1 \backslash A_n = A_1 \cap A_n^c$. Comme la suite $(A_n)_{n\geq 1}$ est décroissante, la suite $(B_n)_{n\geq 1}$ est croissante, en utilisant 1)

$$\mu(\bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n) = \lim_{n\longrightarrow\infty} \mu(B_n) = \mu(A_1) - \lim_{n\longrightarrow\infty} \mu(A_n),$$

d'autre part on a

$$\bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n = A_1 \cap \left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n^c\right) = A_1 \backslash \bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n,$$

il résulte que

$$\mu(\bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n) = \mu(A_1) - \mu(\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n).$$

En fin, on peut simplifier par $\mu(A_1)$ puisque cette dernière quantité est finie,

$$\mu(\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n) = \lim_{n\longrightarrow\infty} \mu(A_n)$$

■

La condition $\mu(A_1) < \infty$ dans 2) du théorème précédent est nécessaire comme le montre l'exemple suivant.

Exercice corrigé 1.4.2 *Considérons l'espace mesuré* $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), card)$ *et la suite des parties mesurables* $(A_n)_{n\geq 1}$ *telle que*

$$A_n = \{n, n+1, n+2, ...\}$$

pour montrer que la condition (1.4) est nécessaire pour la continuité décroissante de la mesure.

Démonstration. La suite $(A_n)_{n\geq 1}$ est décroissante,

$$A_{n+1} = \{n+1, n+2, n+3...\} \subset A_n = \{n, n+1, n+2, ...\}$$

et

$$\mu(A_1) = card(\{1, 2, ...\}) = +\infty.$$

Si $x \in \bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n$ alors $x \geq n$ pour tout $n \geq 1$. D'où $\mathbb{N}$ est borné, ce qui est une contradiction. Donc

$$\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n = \phi.$$

D'autre part

$$0 = \mu\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n\right) \neq \lim_{n \longrightarrow \infty} \mu(A_n) = \lim_{n \longrightarrow \infty} card(\{n, n+1, n+2, ...\}) = +\infty$$

■

Exercice corrigé 1.4.3 *Soit $(X, \mathcal{M})$ un espace mesurable. Montrer que toute fonction additive définie sur $\mathcal{M}$ à valeur dans $[0, +\infty]$ satisfaisant la continuité croissante est une mesure.*

Démonstration. i) $\mu(\phi) = \mu(\phi \cup \phi) = \mu(\phi) + \mu(\phi)$ alors $\mu(\phi) = 0$.
ii) Il s'agit de vérifier la σ-additivité. Soit $(A_n)_{n\geq 1}$ une suite de $\mathcal{M}$ disjoints deux à deux. Posons $B_n = \bigcup_{k=1}^{n} A_k$. Cette suite est croissante et de plus on a $\bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$. La continuité croissante et l'additivité de la mesure μ donne

$$\begin{aligned} \mu\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) &= \mu\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n\right) = \lim_{n \longrightarrow \infty} \mu(B_n) \\ &= \lim_{n \longrightarrow \infty} \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \end{aligned}$$

■

Ensemble négligeable et mesure complétes

Définition 1.4.4 *Soit $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré et $N \subset X$. L'ensemble N est dit négligeable dans $(X, \mathcal{M}, \mu)$ s'il existe $E \in \mathcal{M}$ tel que $N \subset E$ et $\mu(E) = 0$.*

Remarque 1.4.5 *Si $(A_n)_{n\geq 1}$ une suite de parties négligeables dans $(X, \mathcal{M}, \mu)$ alors $\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$ est négligeable. En effet, pour tout $n \geq 1$ il existe $E_n \in \mathcal{M}$ tel que $A_n \subset E_n$ et $\mu(E_n) = 0$.*

Or

$$\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n \subset \bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n \quad et \quad \mu\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) = 0.$$

Donc $\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$ *est négligeable.*

Définition 1.4.6 *Un espace mesuré* $(X, \mathcal{M}, \mu)$ *est dit complet si toute partie négligeable est mesurable (et donc de mesure nulle). Dans ce cas on dit que la mesure* μ *est compléte.*

Mesures extérieurs

Définition 1.4.7 *Soit* X *un ensemble quelconque. On appelle mesure extérieure sur* X *une application* $\mu^* : \mathcal{P}(X) \longrightarrow [0, +\infty]$ *possédant les propriétés suivantes*

i) $\mu^*(\phi) = 0$

ii) si $A \subset B \subset X$ *alors* $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$.

iii) Pour toute suite $(A_n)_n$ *de parties de* X *on a*

$$\mu^*(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n).$$

Remarque 1.4.8 *Il est clair que toute mesure positive sur* $(X, \mathcal{P}(X))$ *est une mesure extérieure sur* X. *Mais la réceproque n'est pas vraie en générale, comme le montre l'exemple suivant*

Exemple 1.4.9 *Soit* X *un ensemble non-vide. L'application* $\mu^* : \mathcal{P}(X) \longrightarrow \{0, 1\}$ *définie par* $\mu^*(\phi) = 0$ *et* $\mu^*(A) = 1$, *si* $A \neq \phi$ *est une mesure extérieure sur* X.
De plus si $card(X) > 1$, *l'application* μ^* *n'est pas une mesure positive sur* $(X, \mathcal{P}(X))$.

Démonstration. Soit $A, B \in \mathcal{P}(X)$ avec $A \subset B$. Si $A = \phi$ alors $\mu^*(A) = 0 \leq \mu^*(B)$. Si $A \neq \phi$ alors $B \neq \phi$ et donc $\mu^*(A) = 1 = \mu^*(B)$.

Soit maintenant $(A_n)_n$ une suite de parties de X. Si tous les A_n sont vides on a

$$\mu^*(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n) = \mu^*(\phi) = 0 = \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n).$$

Pour le contraire, s'il existe $j \in \mathbb{N}$ tel que $A_j \neq \phi$ on a $\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n \neq \phi$ et alors

$$\mu^*(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n) = 1 = \mu^*(A_j) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n).$$

ce que signifie que μ^* est une mesure extérieure sur X.

Du fait que $card(X) > 1$, on peut choisir $a, b \in X$ avec $a \neq b$. On pose $A = \{a\}$ et $B = \{b\}$. Dans ce cas μ^* n'est pas additive car

$$\mu^*(A \cup B) = 1 \neq \mu^*(A) + \mu^*(B) = 2$$

Alors μ^* n'est pas une mesure positive sur $(X, \mathcal{P}(X))$. ■

Proposition 1.4.10 *Toute mesure extérieure additive sur X est une mesure positive sur $(X, \mathcal{P}(X))$.*

Démonstration. Il s'agit de vérifier la σ-additivité. Soit $(A_n)_{n\geq 1}$ une suite de $\mathcal{P}(X)$ disjoints deux à deux. Tout d'abord remarquons que $\bigcup_{n=1}^{p} A_n \subset \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$ pour tout $p \geq 1$. D'aprés l'hypothèse de l'additivité et (ii) de la Définition 1.4.7 on a

$$\sum_{n=1}^{p} \mu^*(A_n) = \mu^*(\bigcup_{n=1}^{p} A_n) \leq \mu^*(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n).$$

Par le passage à la limite quand $p \longrightarrow +\infty$ on obtient

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \mu^*(A_n) \leq \mu^*(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n).$$

Cette dernière inégalité et (iii) de la Définition 1.4.7 donnent la σ-additivité de μ^*. ■

Définition 1.4.11 *Soit X un ensemble non-vide et soit μ^* une mesure extérieure sur X. Une partie E de X est dite μ^*-mesurable si pour tout $A \subset X$ on a*

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c) \tag{1.5}$$

On dit aussi que E est mesurable au sens de Carathéodory (par rapport à μ^*).

On note $\mathcal{M}(\mu^*)$ la famille des parties μ^*-mesurable de X.

Remarques 1.4.12 *1) La mesurabilité de* E *ne fait pas intervenir* $\mu^*(E)$ *mais* $\mu^*(A)$ *où* A *est appelée ensemble test.*

2) Pour tout $A \subset X$ *on peut écrire*

$$A = A \cap (E \cup E^c) = (A \cap E) \cup (A \cap E^c),$$

par la sous-additivité de la mesure extérieure (iii dans la Définition 1.4.7) on a toujours

$$\mu^*(A) \leq \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c).$$

Alors pour montrer qu'une partie $E \subset X$ *est* μ^**-mesurable, il suffit de montrer que*

$$\mu^*(A) \geq \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c) \tag{1.6}$$

pour tout $A \subset X$*.*

Exemples 1.4.13 *Soit* X *un ensemble non-vide*

1) X *et* ϕ *sont* μ^**-mesurables pour toute mesure extérieure.*

2) Si μ^* *est une mesure extérieure sur* X *et* $E \subset X$ *tel que* $\mu^*(E) = 0$*, alors* E *est* μ^**-mesurable.*

Démonstration. 2) Il suffit de montrer que (1.6) est vrai pour tout $A \subset X$. D'aprés les inclusions $A \cap E \subset E$ et $A \cap E^c \subset A$ on a $\mu^*(A \cap E) \leq \mu^*(E) = 0$ et $\mu^*(A \cap E^c) \leq \mu^*(A)$, ce qui implique que

$$\mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c) = \mu^*(A \cap E^c) \leq \mu^*(A).$$

■

Théorème 1.4.14 *Soit* μ^* *une mesure extérieure sur un ensemble non-vide* X*. Alors* $\mathcal{M}(\mu^*)$ *est une tribu sur* X *et la restriction de* μ^* *à* $\mathcal{M}(\mu^*)$ *est une mesure.*

Démonstration. $\phi, X \in \mathcal{M}(\mu^*)$, par l'Exemple 1.4.13. De façon immédiate, à partir de l'équation (1.5) on a $E \in \mathcal{M}(\mu^*)$ si et seulement si $E^c \in \mathcal{M}(\mu^*)$. Il reste donc à voir que $\mathcal{M}(\mu^*)$ est stable par réunion dénombrable. Commençons par l'établir pour une réunion finie. Soient $E_1, E_2 \in \mathcal{M}(\mu^*)$, pour tout $A \subset X$

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E_1) + \mu^*(A \cap E_1^c) \tag{1.7}$$

On teste la μ^*-mesurablité de E_2 par l'ensemble $A \cap E_1^c$

$$\mu^*(A \cap E_1^c) = \mu^*(A \cap E_1^c \cap E_2) + \mu^*(A \cap E_1^c \cap E_2^c). \tag{1.8}$$

En portant (1.8) dans (1.7)

$$\begin{aligned} \mu^*(A) &= \mu^*(A \cap E_1) + \mu^*(A \cap E_1^c \cap E_2) + \mu^*(A \cap E_1^c \cap E_2^c). \\ &\geq \mu^*\left[(A \cap E_1) \cup (A \cap E_1^c \cap E_2)\right] + \mu^*(A \cap E_1^c \cap E_2^c). \end{aligned}$$

Mais

$$(A \cap E_1) \cup (A \cap E_1^c \cap E_2) = A \cap [E_1 \cup (E_2 \backslash E_1)] = A \cap (E_1 \cup E_2),$$

et aussi

$$A \cap E_1^c \cap E_2^c = A \cap (E_1 \cup E_2)^c.$$

Finalement on obtient

$$\mu^*(A) \geq \mu^*\left[A \cap (E_1 \cup E_2)\right] + \mu^*\left[A \cap (E_1 \cup E_2)^c\right],$$

d'où $E_1 \cup E_2 \in \mathcal{M}(\mu^*)$.

Pour terminer la preuve de que $\mathcal{M}(\mu^*)$ est une tribu, montrons la stabilité par rapport à la réunion dénombrable. Considérons une famille $(E_n)_{n\geqslant 1}$ d'éléments de $\mathcal{M}(\mu^*)$ deux à deux disjoints (si $(A_n)_{n\geqslant 1}$ est une famille d'éléments de $\mathcal{M}(\mu^*)$, on peut toujours écrire $\cup_{n\geqslant 1} A_n = \cup_{n\geqslant 1} E_n$, avec les éléments E_n deux à deux disjoints. Voir la preuve de la Proposition 1.2.7). Pour tout $n \geqslant 1$, posons $F_n = \bigcup_{k=1}^{n} E_k$ et montrons par récurrence sur

n que pour tout partie $A \subset X$ on a

$$\mu^*(A \cap F_n) = \sum_{k=1}^{n} \mu^*(A \cap E_k). \tag{1.9}$$

La propriété est vraie au rang $n = 1$ et si l'on suppose qu'elle est vraie au rang n. Puisque $F_n \in \mathcal{M}(\mu^*)$ est une réunion finie des éléments dans $\mathcal{M}(\mu^*)$, on teste sa mesurbilité par $A \cap F_{n+1}$,

$$\mu^*(A \cap F_{n+1}) = \mu^*(A \cap F_{n+1} \cap F_n) + \mu^*(A \cap F_{n+1} \cap F_n^c), \tag{1.10}$$

d'autre part le fait que $F_{n+1} \cap F_n = F_n$ et $F_{n+1} \cap F_n^c = E_{n+1}$, l'égalité (1.10) donne

$$\begin{aligned}
\mu^*(A \cap F_{n+1}) &= \mu^*(A \cap F_n) + \mu^*(A \cap E_{n+1}) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \mu^*(A \cap E_k) + \mu^*(A \cap E_{n+1}) \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} \mu^*(A \cap E_k).
\end{aligned}$$

Maintenant si on pose $F = \bigcup_{k=1}^{+\infty} E_k$ on a $A \cap F \supset A \cap F_n$ pour tout $n \geqslant 1$. Donc d'aprés la monotonie de la mesure extérieure et (1.9) on a

$$\mu^*(A \cap F) \geq \mu^*(A \cap F_n) = \sum_{k=1}^{n} \mu^*(A \cap E_k)$$

En prenant la limite lorsque n tend vers $+\infty$, on trouve

$$\mu^*(A \cap F) \geq \sum_{k=1}^{+\infty} \mu^*(A \cap E_k)$$

Inversement, par (iii) de la Définition 1.4.7,

$$\mu^*(A \cap F) = \mu^* \left[\bigcup_{k=1}^{+\infty} (A \cap E_k) \right] \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \mu^*(A \cap E_k),$$

d'où pour tout partie $A \subset X$,

$$\mu^*(A \cap F) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mu^*(A \cap E_k). \tag{1.11}$$

On a $F_n^c \supset F^c$ pour tout $n \geqslant 1$ et

$$\begin{aligned}\mu^*(A) &= \mu^*(A \cap F_n) + \mu^*(A \cap F_n^c) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \mu^*(A \cap E_k) + \mu^*(A \cap F_n^c) \\ &\geq \sum_{k=1}^{n} \mu^*(A \cap E_k) + \mu^*(A \cap F^c),\end{aligned}$$

par le passage à la limite lorsque n tend vers $+\infty$ et par (1.11),

$$\mu^*(A) \geq \mu^*(A \cap F) + \mu^*(A \cap F^c)$$

donc $F = \bigcup_{k=1}^{+\infty} E_k \in \mathcal{M}(\mu^*)$.

La σ-additivité de μ^* sur $\mathcal{M}(\mu^*)$ résulte de la formule (1.11) en prenant pour ensemble test $A = X$. ∎

1.5 Mesure de Lebesgue sur la tribu des boréliens.

Mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$

Théorème 1.5.1 *[13]*

Il existe une unique mesure positive sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, notée λ, telle que

$$\lambda(]a, b[) = b - a$$

pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.

On l'appelle la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$

Remarques 1.5.2 *1) Il est clair que la mesure λ est σ-finie puisque*

$$\lambda([-n, n]) = 2n < +\infty \quad et \quad \mathbb{R} = \bigcup_{n=1}^{+\infty} [-n, n]$$

2) Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $\lambda(\{x\}) = 0$ et par conséquent

$$\lambda(]a,b[) = \lambda(]a,b]) = \lambda([a,b[) = \lambda([a,b]) = b-a.$$

En effet, $\{x\} = \bigcap_{n=1}^{+\infty}]x-\frac{1}{n}, x+\frac{1}{n}[$, *donc par la continuité décroissante, (2) dans le Théorème 1.4.1, on a*

$$\lambda(\{x\}) = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \lambda(]x-\frac{1}{n}, x+\frac{1}{n}[) = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{2}{n} = 0$$

On en déduit immédiatement que

Proposition 1.5.3 *Tout ensemble dénombrable D de $\mathbb{R}$ possède une mesure de Lebesgue nulle, $\lambda(D) = 0$.*

Démonstration. Puisque $D = \bigcup_{n=1, x_n \in \mathbb{R}}^{+\infty} \{x_n\}$, nous avons

$$\lambda(D) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda(\{x_n\}) = 0$$

ce qui implique que $\lambda(D) = 0$. ■

La mesure de Lebesgue possède des propriétés importantes.

Proposition 1.5.4 *[4]La mesure de Lebesgue λ est invariante par translation et invariante par symétrie. C'est-à-dire pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on a*

$$\lambda(\alpha + A) = \lambda(A) \quad et \quad \lambda(-A) = \lambda(A)$$

pour tout borélien A de $\mathbb{R}$, où $\alpha + A = \{a + \alpha, \ a \in A\}$ et $-A = \{-a, \ a \in A\}$.

Mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^m$.

Rappelons que un pavé P de $\mathbb{R}^m$ est un produit d'intervalles bornés $P = I_1 \times ... \times I_m$, où $I_j \subset \mathbb{R}$ $(j = 1, ..., m)$ est intervalle borné. La mesure du pavé P est donnée par

$$m(P) = |I_1| \times ... \times |I_m|,$$

où $|I_j|$ est la longueur du segment I_j.

Définition 1.5.5 *Pour toute partie A de $\mathbb{R}^m$, on définit*

$$\lambda^*(A) = \inf\left\{\sum_{n=1}^{+\infty} m(P_i) : A \subset \bigcup_{n=1}^{+\infty} P_i,\ P_i \text{ pavé ouvert de } \mathbb{R}^m\right\}$$

L'infimum est pris sur tous les recouvrements dénombrables de A par des pavés ouverts.

Théorème 1.5.6 *[4]On a les assertions suivantes*

i) λ^* est une mesure extérieure sur $\mathbb{R}^m$.

ii) La tribu $\mathcal{M}(\mu^*)$ contient la tribu de Borel, $\mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$.

iii) $\lambda^*(P) = m(P)$, pour tout pavé $P \subset \mathbb{R}^m$.

1.6 Exercices du chapitre 1

Exercice 1.1

1) Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de parties d'un ensemble X. Montrer que

$$\overline{\lim}\chi_{A_n} = \chi_{\overline{\lim}A_n} \quad \text{et} \quad \underline{\lim}\chi_{A_n} = \chi_{\underline{\lim}A_n}$$

2) Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $A_{2p} = A$ et $A_{2p+1} = B$, $p \in \mathbb{N}$, A et B etant deux parties données de X. Que sont $\underline{\lim}A_n$ et $\overline{\lim}A_n$?

Exercice 1.2

Soit $\mathcal{M}$ une famille de parties d'un ensenble X définie par

$$\mathcal{M} = \{A \subseteq X : A \text{ ou } A^c \text{ est dénombrable}\}$$

1) Montrer que $\mathcal{M}$ est une tribu sur X.

2) Montrer que $\mathcal{M}$ est engendrée par les singletons $\{x\}$ de X.

Exercice 1.3

1) Soient $a, b \in \mathbb{R}, a < b$. Vérifier que

$$]a, b[= \overset{\infty}{\underset{n=1}{\cup}} [a + \frac{1}{n}, b[\text{ et } [a, b[= \overset{\infty}{\underset{n=1}{\cap}}]a - \frac{1}{n}, b[$$

2) Montrer que $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ est engendrée par la famille $\mathcal{S} = \{[a, b[,\ a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$.

Exercice 1.4

Soit $\mathcal{S}$ une famille quelconque de parties d'un ensemble X et soit la famille $\mathcal{T}$ définie par

$$\mathcal{T} = \left\{ A \subset X : \exists\, (\theta_n)_{n\geq 1} \subset \mathcal{S}, \quad A \subset \overset{\infty}{\underset{n=1}{\cup}} \theta_n \right\}$$

1) Montrer que $\mathcal{T}$ est une tribu

2) Déduire que tout élément de $\sigma(\mathcal{S})$ est contenu dans une rénion dénombrable d'éléments de $\mathcal{S}$.

Exercice 1.5

Soient $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré et $A, B \in \mathcal{M}$.

1) Démontrer que $\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B)$

2) Si $\mu(A) < \infty$, déduire que $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B)$

3) Supposons que $\mu(A \cap B) < \infty$ et $\mu(A \Delta B) = 0$. Montrer que $\mu(A) = \mu(B)$.

Exercice 1.6

Soient $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré, $B \in \mathcal{M}$ et $\mu_B : \mathcal{M} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ une application définie par

$$\mu_B(A) = \mu(A \cap B), \text{ pour tout } A \in \mathcal{M}$$

Montrer que μ_B est une mesure sur X.

Exercice 1.7

Soit $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré fini tel que $\mu(X) = 1$. Montrer que si $\sum_{p=1}^{n} \mu(A_p) > n - 1$ alors $\mu(\bigcap_{p=1}^{n} A_p) > 0$ pour toute suite finie $(A_p)_{1 \leq p \leq n}$ de $\mathcal{M}$.

Exercice 1.8

Soient X un ensemble et $\mu^* : \mathcal{P}(X) \longrightarrow \mathbb{R}$ une application définie par

$$\mu^*(A) = \begin{cases} 0, \text{ si } A = \phi \\ 1 \text{ si } A \neq \phi \end{cases}$$

1) Montrer que μ^* est une mesure extérieure.

2) Montrer que les seuls ensembles μ^*-mesurable sont ϕ et X c-à-d

$$\mathcal{T}(\mu^*) = \{\phi, X\}$$

3) Vérifier le théorème de Carathéodory sur cet exemple.

Exercice 1.9

Soit μ une mesure sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ vérifiant

i) $\mu([0, 1[) = 1$

ii) $\mu(x + A) = \mu(A)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, où $(x + A)$ est l'ensemble des éléments de la forme $x + a$ tel que $a \in A$.

1) Montrer que $\mu([0, \frac{1}{n}[) = \frac{1}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ (On pourra découper $[0, 1[$ en n intervalles de longueur $\frac{1}{n}$)

2) a) Déterminer $\bigcap\limits_{n=1}^{+\infty} [0, \frac{1}{n}[$, puis utiliser la continuité décroissante de la mesure pour montrer que $\mu(\{0\}) = 0$.

b) Déduire que toute partie dénombrale de $\mathbb{R}$ est de mesure nulle.

3) Montrer que pour tout $r \in \mathbb{Q}$, $r > 0$ on a $\mu([0, r[) = r$.

4) Soit $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$. Vérifier que $[0, a[= \bigcup\limits_{n=0}^{+\infty} [0, r_n[$ où $(r_n)_n \subset \mathbb{Q}$ croissante et convergente vers a, puis utiliser la continuité croissante de la mesure pour calculer $\mu([0, a[)$.

5) Montrer que pour tout $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ on a

$$\mu([a, b[) = b - a = \mu(]a, b])$$

En déduire que μ est la mesure de Lebesgue λ.

6) Montrer que la mesure de Lebesgue est σ-finie.

Exercice 1.10

$\mathbb{R}$ est muni de la tribu Borélienne $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ et la mesure de Lebesgue λ.

Calculer la mesure des ensembles $[0, 1] \setminus \mathbb{Q}$ et A tel que $A = \bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} [n, n + \frac{1}{2^n}[$.

Exercice 1.11 (Lemme de Borel-Cantelli)

Soient $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré et $(A_n)_{n\geq 0} \subset \mathcal{M}$ telle que $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \mu(A_n) < \infty$. Montrer que $\mu(\overline{\lim} A_n) = 0$.

Chapitre 2

Fonctions mesurables.

2.1 Fonctions étagées.

Définition 2.1.1 *Soit $(X, \mathcal{M})$ un espace mesurable. La fonction numérique $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite étagée si f est une combinaison linéaire finie de fonctions caractéristiques c'est-à-dire s'il existe une famille finie $(A_i)_{1 \leq i \leq n} \subset \mathcal{M}$ et un sous-ensemble fini $\{a_1, ..., a_n\}$ de $\mathbb{R}$ tels que*

$$f = \sum_{i=1}^{n} a_i.\chi_{A_i} \tag{2.1}$$

Autrement dit si l'image $f(X)$ de f est un sous-ensemble fini $\{a_1, ..., a_n\}$ de $\mathbb{R}$.

Remarque 2.1.2 *Si on pose $A_i = f^{-1}(\{a_i\})$ pour tout $i = 1, ..., n$ on a $X = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ avec $A_i \cap A_j = \phi$ pour tout $i \neq j$. Alors toute fonction étagée f s'écrit canoniquement par (2.1) avec $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ une partition de X.*

Proposition 2.1.3 *Si $f, g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ sont deux fonctions étagées et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors $f + \lambda g$, $f.g$, $\sup(f, g)$ et $\inf(f, g)$ sont des fonctions étagées.*

Démonstration. On écrit f et g sous la forme

$$f = \sum_{i=1}^{n} a_i.\chi_{A_i} \quad \text{et} \quad g = \sum_{j=1}^{m} b_j.\chi_{B_j}.$$

Où $n, m \in \mathbb{N}$. Comme les familles $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ et $(B_j)_{1 \leq j \leq m}$ forment des partitions de X on peut écrire

$$f = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_i \chi_{A_i \cap B_j} \quad \text{et} \quad g = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} b_j \chi_{A_i \cap B_j},$$

Alors on a

$$f + g = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} (a_i + b_j) \chi_{A_i \cap B_j} \quad \text{et} \quad f.g = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} (a_i b_j) \chi_{A_i \cap B_j},$$

et aussi

$$\sup(f, g) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \sup(a_i, b_j) \chi_{A_i \cap B_j} \quad \text{et} \quad \inf(f, g) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \inf(a_i, b_j) \chi_{A_i \cap B_j}$$

■

2.2 Fonctions mesurables.

Définition 2.2.1 *Soit* $(X, \mathcal{M})$ *et* $(Y, \mathcal{N})$ *deux espaces mesurables. L'application* $f : X \longrightarrow Y$ *est dite mesurable si, pour tout* $B \in \mathcal{N}$*, l'image réciproque*

$$f^{-1}(B) = \{x \in X : f(x) \in B\}$$

appartient à $\mathcal{M}$*.*

Définition 2.2.2 *Soit* $(X, \mathcal{M})$ *un espace probabilisable, on appelle variable aléatoire toute fonction mesurable de* $(X, \mathcal{M})$ *dans* $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$*.*

Exemples 2.2.3 *(1) Toute application* $f : (X, \mathcal{P}(X)) \longrightarrow (Y, \mathcal{P}(Y))$ *est mesurable.*
(2) Si $\mathcal{M}$ *et* $\mathcal{M}'$ *sont deux tribus sur* X *alors l'identité sur* X

$$id : (X, \mathcal{M}) \longrightarrow (X, \mathcal{M}'), \ id(x) = x$$

est mesurable si et seulement si $\mathcal{M}' \subset \mathcal{M}$*.*
(3) Si $(X, \mathcal{M})$ *et* $(Y, \mathcal{N})$ *sont deux espaces mesurables et* $f : X \longrightarrow Y$ *une application constante (c-à-d. il existe* $y_0 \in Y$ *tel que pour tout* $x \in X$ *on a* $f(x) = y_0$*) alors* f *est mesurable.*
(4) Une fonction étagée f *est toujours mesurable.*
(5) Soit $(X, \mathcal{M})$ *un espace mesurable et* $A \in \mathcal{M}$*. La fonction idicatrice* χ_A *de l'ensemble* A *est une application de* X *dans* $\mathbb{R}$ *muni de la tribi borélienne* $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ *est mesurable si et seulement si* $A \in \mathcal{M}$*. Pour cette raison, les éléments de* $\mathcal{M}$ *sont dits ensembles mesurables.*

Démonstration. On démontre seulement (4) et (5). Pour (4), en effet f est une fonction de $(X, \mathcal{M})$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, alors il existe $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ une patition de X et $\{a_1, ..., a_n\} \subset \mathbb{R}$ tels que $f = \sum_{i=1}^{n} a_i . \chi_{A_i}$. Pour tout $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, on a donc

$$f^{-1}(B) = \left(\bigcup_{i; a_i \in B} A_i \right) \in \mathcal{M}.$$

Ce qui prouve que f est mesurable.

Maitenant montrons (5), d'aprés (4) si $A \in \mathcal{M}$ la fonction étagée χ_A est mesurable. Inversement, si χ_A est mesurable, alors

$$A = (\chi_A)^{-1}(\{1\}) \in \mathcal{M}$$

car $\{1\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ comme un fermé dans $\mathbb{R}$. ∎

Remarque 2.2.4 *Une application peut être mesurable par rapport à une tribu et ne pas être pour d'autres tribus. En effet, soit la tribu*

$$\mathcal{D}(\mathbb{R}) = \{A \subset \mathbb{R} : A \text{ dénombrable ou } A^c \text{ dénombrable}\}$$

l'application identique

$$id : (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$$

est evidement mesurable. Cependant

$$id : (\mathbb{R}, \mathcal{D}(\mathbb{R})) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$$

n'est pas mesurable d'aprés (2) dans l'exemple précédent car $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \not\subset \mathcal{D}(\mathbb{R})$ *comme* $[a,b] \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ *mais* $[a,b] \notin \mathcal{D}(\mathbb{R})$.

Proposition 2.2.5 *(Tribu image)*
Soit $(X, \mathcal{M})$ *un espace mesurable. Si* Y *est un ensemble quelconque. Alors on peut toujours munir* Y *d'une plus grande tribu* $\mathcal{N}$ *sur* Y *qui rende la fonction* $f : X \longrightarrow Y$ *mesurable.*

Démonstration. On pose

$$\mathcal{N} = \left\{B \subset Y : f^{-1}(B) \in \mathcal{M}\right\}. \tag{2.2}$$

On a directement, $\phi \in \mathcal{N}$ car $f^{-1}(\phi) = \phi \in \mathcal{M}$ et pour tout $B \in \mathcal{N}$ on a $f^{-1}(B)$ appartient à la tribu $\mathcal{M}$ ce qui donne

$$f^{-1}(B^c) = \left[f^{-1}(B)\right]^c \in \mathcal{M}.$$

Alors on a bien que $B^c \in \mathcal{N}$. Soit maintenant $(B_n)_{n\geq 1} \subset \mathcal{N}$ une suite de parties mesurables dans $(Y, \mathcal{N})$. Comme $f^{-1}(B_n) \in \mathcal{M}$, pour tout $n \geq 1$, on en déduit que

$$f^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n\right) = \bigcup_{n=1}^{+\infty} f^{-1}(B_n) \in \mathcal{M}.$$

Ceci signifier que $\bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n \in \mathcal{N}$ et on conclut que $\mathcal{N}$ est une tribu sur Y.
Il est clair, par construction de la tribu $\mathcal{N}$, que la fonction $f : X \longrightarrow Y$ est mesurable. Donc il reste à montrer que $\mathcal{N}$ est la plus grande tribu qui rend f mesurable. Si $\mathcal{B}$ est une tribu sur Y telle que $f : (X, \mathcal{M}) \longrightarrow (Y, \mathcal{B})$ est mesurable, alors $\mathcal{B} \subset \mathcal{N}$ car pour tout $B \in \mathcal{B}$ on a $f^{-1}(B) \in \mathcal{M}$ et donc $B \in \mathcal{N}$. ■

2.3 Caractérisation de la mesurabilité et stabilité de $\mathcal{L}^0(X)$.

Proposition 2.3.1 *(Critère de mesurabilité)*
Soit f une fonction entre deux espaces mesurables $(X, \mathcal{M})$ et $(Y, \mathcal{N})$. On suppose que $\mathcal{N}$ est engendrée par une famille $\mathcal{F}$ de parties de Y c'est-à-dire $\mathcal{N} = \sigma(\mathcal{F})$. Alors f est mesurable si et seulement si

$$f^{-1}(B) \in \mathcal{M}, \text{ pour tout } B \in \mathcal{F} \tag{2.3}$$

Démonstration. Si la fonction f est mesurable, alors la condition (2.3) est évidente. Inversement, supposons que $f^{-1}(B) \in \mathcal{M}$, pour tout $B \in \mathcal{F}$ et soit $\widetilde{\mathcal{N}}$ la tribu image de $\mathcal{M}$ par f définie par (2.2). Alors $\mathcal{F} \subset \widetilde{\mathcal{N}}$ et puisque $\mathcal{N} = \sigma(\mathcal{F})$ on a $\mathcal{N} \subset \widetilde{\mathcal{N}}$, et en particulier, f est mesurable. ■

Corollaire 2.3.2 *Soient X et Y deux espaces topologiques munis de leurs tribus boréliennes. Si $f : (X, \mathcal{B}(X)) \longrightarrow (Y, \mathcal{B}((Y))$ est continue, alors elle est mesurable.*

Remarques 2.3.3 ***(Mesurabilité d'une fonction numérique)***

1) Puisque la tribu $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ est engendrée par la famille des intervalles de $\mathbb{R}$ de la forme $]a, +\infty[$ (voir Théorème 1.2.13), alors la fonction $f : (X, \mathcal{M}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ est mesurable si et seulement si

$$f^{-1}(]a, +\infty[) \in \mathcal{M}, \text{ pour tout } a \in \mathbb{R}.$$

On note $\mathcal{L}^0(X)$ l'ensemble des fonctions $f : (X, \mathcal{M}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ numériques mesurables.

Théorème 2.3.4 *Soit $(X, \mathcal{M})$, $(Y, \mathcal{N})$ et $(Z, \mathcal{P})$ trois espaces mesurables. Si $f : X \longrightarrow Y$ et $g : Y \longrightarrow Z$ sont mesurables alors $g \circ f$ est mesurable.*

Démonstration. Pour tout $B \in \mathcal{P}$, $g^{-1}(B) \in \mathcal{N}$ car g est mesurable, et donc $f^{-1}(g^{-1}(B)) \in \mathcal{M}$ puisque f est également mesurable, donc

$$(g \circ f)^{-1}(B) = f^{-1}\left(g^{-1}(B)\right) \in \mathcal{M}.$$

ce qui prouve que $g \circ f$ est mesurable. ■

Proposition 2.3.5 *Soient $(X, \mathcal{M})$ un espace mesurable, $(Y, \mathcal{T})$ un espace topologique, $f_1, f_2 \in \mathcal{L}^0(X)$ deux applications numériques mesurables et $\Phi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow (Y, \mathcal{T})$ une application continue. Alors l'application $h : (X, \mathcal{M}) \longrightarrow (Y, \mathcal{T})$ définie par*

$$h(x) = \Phi(f_1(x), f_2(x)), \text{ pour tout } x \in X,$$

est mesurable. Autrement dit, une combinaison continue de deux applications mesurables est mesurable.

Démonstration. On peut écrire $h = \Phi \circ F$ avec $F : (X, \mathcal{M}) \longrightarrow (\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2))$ est définie par $F(x) = (f_1(x), f_2(x))$. Comme Φ est mesurable (car continue), il suffit de montrer que F est mesurable. Si I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$ on a

$$F^{-1}(I \times J) = f_1^{-1}(I) \cap f_1^{-1}(J) \in \mathcal{M}.$$

Par la Proposition 2.3.1 et comme $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ est engendrée par les rectangles de la forme $I \times J$, l'application F est mesurable. ■

Partie positive et partie négative d'une fonction numérique

A toute fonction réelle f, on peut associer deux fonctions positives, sa partie positive f_+ et sa partie négative f_-, définies respectivement par

$$f_+(x) = \sup\left(f(x), 0\right) \quad \text{et} \quad f_-(x) = \sup\left(-f(x), 0\right).$$

Les parties positive et négative sont liées à la fonction initiale par les deux relations suivantes

$$f = f_+ - f_- \quad \text{et} \quad |f| = f_+ + f_-.$$

Proposition 2.3.6 *Si f et g sont des applications numériques mesurables sur $(X, \mathcal{M})$, alors*

$$f + g, \quad fg, \quad \sup(f, g), \quad \inf(f, g), \quad f_+, \quad f_- \text{ et } \quad |f|$$

sont des applications mesurables. Autrement dit, $\mathcal{L}^0(X)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. Si f ne s'annule pas sur X, alors $\frac{1}{f}$ est mesurable.

Démonstration. Il suffit d'appliquer la Proposition 2.3.5 avec $(Y, \mathcal{T})$ =$(\mathbb{R}, |.|)$, la topologie usuelle sur $\mathbb{R}$, et $\Phi(x, y) = x + y$, xy, $\sup(x, y)$ et $\inf(x, y)$
Pour l'application $g = \frac{1}{f}$, posons $Y = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ et $\varphi : Y \longrightarrow Y$ définie par $\varphi(y) = \frac{1}{y}$. Comme f est mesurable et φ est continue alors $g = \varphi \circ f : X \longrightarrow Y$ (ou $\mathbb{R}$) est mesurable. ■

Remarque 2.3.7 *$|f|$ peut être mesurable sans que f le soit.*

Exemple 2.3.8 *Soit $A \notin \mathcal{M}$ et $f = \chi_A - \chi_{A^c}$ c'est-à-dire que*

$$f(x) = \begin{cases} 1 & si\ x \in A \\ -1 & si\ x \in A^c \end{cases}$$

Alors $|f| = 1$ est mesurable, mais f ne l'est pas car par exemple

$$\{1\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \quad et \quad f^{-1}(\{1\}) = A \notin \mathcal{M}.$$

Exercice corrigé 2.3.9 *Soit la fonction* $f : (\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ *définie par*

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{(1+x)^2} & si\ x > 0\ \ et\ x < y \leq 2x \\ -\frac{1}{(1+x)^2} & si\ x > 0\ \ et\ 2x < y \leq 3x \\ 0 & si\ x > 0\ \ et\ y \notin]x, 3x[\\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$*, on pose* $A_n = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, x < y < 2x + \frac{1}{n}\right\}$ *et*
$B_n = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0 \text{ et } 2x < y < 3x + \frac{1}{n}\right\}$.
Déterminer $A = \bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n$ *et* $B = \bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n$*. En déduire que la fonction* f *est mesurable.*

Démonstration. 1) On a $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, x < y \leq 2x\}$ et $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0 \text{ et } 2x < y \leq 3x\}$. On pose maintenant $g(x,y) = \frac{1}{(1+|x|)^2}$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. La fonction $g : (\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ est mesurable car elle est continue. On remarque maintenant que $f = g\chi_A - g\chi_B$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ les ensembles A_n et B_n sont des ouverts de $\mathbb{R}^2$ ils appartiennent donc à $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$. On en déduit que $A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ et alors les fonctions χ_A et χ_B sont mesurables (voir (5) dans l'Exemples 2.2.3). En fin la fonction f est mesurable comme somme de produits de fonctions mesurables. ∎

Rappelons que la tribu de Borel $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ sur $\overline{\mathbb{R}}$ est engendrée par les intervalles $]a, +\infty]$, $a \in \mathbb{R}$

Proposition 2.3.10 *Soit* $(f_n)_n$ *une suite d'applications mesurables de* $(X, \mathcal{M})$ *dans* $\big(\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})\big)$*. Alors les applications*

$$\sup_n f_n,\ \inf_n f_n,\ \limsup_{n \longrightarrow +\infty} f_n,\ \liminf_{n \longrightarrow +\infty} f_n : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$$

sont mesurables. De plus si la suite $(f_n)_n$ *converge simplement vers* f*, alors* f *est mesurable.*
Plus généralement, l'ensemble $\left\{x \in X : \lim_{n \longrightarrow +\infty} f_n(x) \text{ existe}\right\}$ *est mesurable.*

Démonstration. Soit $g = \sup\limits_n f_n$. Pour tout $a \in \mathbb{R}$, si $x \in g^{-1}(]a,+\infty])$ alors il existe $m \geq 1$ tel que $f_m(x) \geq a$, donc $x \in \bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} f_n^{-1}(]a,+\infty])$. Inversement, si $x \in \bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} f_n^{-1}(]a,+\infty])$, il est clair que $g(x) = \sup\limits_n f_n(x) \geq a$, d'où

$$g^{-1}(]a,+\infty]) = \bigcup_{n=1}^{+\infty} f_n^{-1}(]a,+\infty]) \in \mathcal{M}$$

Ainsi, g est mesurable. Il en va de même de $\inf\limits_n f_n = -\sup\limits_n (-f_n)$.

Par définition on a

$$\limsup_{n\longrightarrow+\infty} f_n = \inf_{n\geq 1} \sup_{k\geq n} f_k$$

$$\liminf_{n\longrightarrow+\infty} f_n = \sup_{n\geq 1} \inf_{k\geq n} f_k$$

On est donc ramené aux résultats précédents. De plus si $(f_n)_n$ converge simplement vers f, alors

$$f = \lim_{n\longrightarrow+\infty} f_n = \limsup_{n\longrightarrow+\infty} f_n = \liminf_{n\longrightarrow+\infty} f_n,$$

D'où le résultat. Finalement pour montrer la dernière affirmation, on définit l'application

$$F : (X,\mathcal{M}) \longrightarrow \left(\overline{\mathbb{R}}^2, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}^2)\right), \; F(x) = \left(\liminf_{n\longrightarrow+\infty} f_n, \limsup_{n\longrightarrow+\infty} f_n\right)$$

et on remarque que

$$\left\{x \in X : \lim_{n\longrightarrow+\infty} f_n(x) \text{ existe}\right\} = F^{-1}(\Delta)$$

où $\Delta = \left\{(x,x) : x \in \overline{\mathbb{R}}\right\}$. L'ensemble Δ est fermé alors il appartient à $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}^2)$ et donc $F^{-1}(\Delta) \in \mathcal{M}$ puisque F est mesurable. ■

Proposition 2.3.11 *Soit $(X,\mathcal{M})$ un espace mesurable. Toute application numérique mesurable positive $f : X \longrightarrow [0,+\infty]$ est limite simple d'une suite croissante de fonctions $(f_n)_n$ (mesurables) étagées.*

On donne la preuve de cette proposition se forme d'un exercice corrigé.

Exercice corrigé 2.3.12 *Pour tout $n \geq 1$, on définit la fonction étagée $\varphi_n : [0, +\infty] \longrightarrow [0, +\infty[$ par*

$$\varphi_n(t) = \begin{cases} 2^{-n}E(2^n t) & si\ 0 \leq t < n \\ n & si\ t \geq n \end{cases}$$

où $E(x)$ désigne la partie entière de $x \in \mathbb{R}$.

1) Démontrer que $0 \leq \varphi_n(t) \leq \varphi_{n+1}(t)$ pour tout $t \in [0, +\infty]$ et $n \geq 1$.

2) On pose $f_n = \varphi_n \circ f$. Vérifier que f_n est étagée et montrer que la suite $(f_n)_n$ est croissante.

3) Démontrer que si $f(x) < \infty$ alors pour n suffisament grand on a

$$f(x) - 2^{-n} \leq f_n(x) \leq f(x).$$

Conclure.

Démonstration. 1) On a trois cas

i) Pour $t \geq n+1$ (ou aussi $t = +\infty$). Alors $\varphi_{n+1}(t) = n+1 > n = \varphi_n(t)$.

ii) Pour $n \leq t < n+1$. D'aprés la croissance de la fonction partie entière on a

$$E(2^{n+1}t) \geq E(2^{n+1}n) = 2^{n+1}n$$

ce qui implique que

$$\varphi_{n+1}(t) = \frac{1}{2^{n+1}}E(2^{n+1}t) \geq n = \varphi_n(t).$$

iii) Pour $0 \leq t < n$. Puisque $2^{n+1}t \geq 2E(2^n t) \in \mathbb{N}$, On a $E(2^{n+1}t) \geq 2E(2^n t)$, alors

$$\varphi_{n+1}(t) = \frac{1}{2^{n+1}}E(2^{n+1}t) \geq \frac{1}{2^n}E(2^n t) = \varphi_n(t).$$

Donc dans tout les cas, pour tout $t \in [0, +\infty]$ et tout $n \geq 1$ on a

$$\varphi_n(t) \leq \varphi_{n+1}(t).$$

2) Il est clair que les applications φ_n sont étagées car pour tout $n \geq 1$, alors les f_n sont aussi étagées car

$$f_n(X) = \varphi_n\left(f(X)\right) = \varphi_n\left([0, +\infty]\right) \text{ est finie.}$$

D'autre part par la croissance de la suite $(\varphi_n)_n$ on peut écrire

$$f_n(x) = \varphi_n\left(f(x)\right) \leq \varphi_{n+1}\left(f(x)\right) = f_{n+1}(x)$$

pour tout $n \geq 1$ et tout $x \in X$.

3) Pour n suffisament grand choisissons $n > f(x)$, dans ce cas nous avons

$$f_n(x) = \frac{1}{2^n} E(2^n f(x)).$$

Par les propriétés de la partie entière,

$$2^n f(x) - 1 \leq E(2^n f(x)) \leq 2^n f(x),$$

donc

$$f(x) - \frac{1}{2^n} \leq f_n(x) \leq f(x).$$

Finalement, par le passage à la limite quand $n \longrightarrow +\infty$ nous concluons que $f_n \longrightarrow f$ simplement. ■

La proposition suivante généralise la proposition precedente au cas d'une application mesurable de signe quelconque.

Proposition 2.3.13 *Soient $(X, \mathcal{M})$ un espace mesurable et $f : (X, \mathcal{M}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ une fonction mesurable. Il existe alors une suite de fonctions $(f_n)_n$ (mesurables) étagées convergente simplement vers f.*

Démonstration. Les applications f^+ et f^- sont mesurables donc la Proposition 2.3.11 donne l'existence de deux suites croissantes $(h_n)_n$ et $(g_n)_n$ des applications (mesurables) étagées telles que $h_n \longrightarrow f^+$ et $g_n \longrightarrow f^-$ simplement quand $n \longrightarrow +\infty$. On pose $f_n = h_n - g_n$, de sorte que $f_n(x) \longrightarrow f^+(x) - f^-(x) = f(x)$, quand $n \longrightarrow +\infty$, pour tout $x \in X$. D'autre part, $(f_n)_n$ est étagée (voir la Proposition 2.1.3). ■

2.4 Quelques propriétés des applications mesurables.

Proposition 2.4.1 *Soient $f, g : (X, \mathcal{M}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ deux applications mesurables et $a \in \mathbb{R}$. Alors les parties suivantes*

$$\begin{aligned}
(f = a) &:= \{x \in X : f(x) = a\} \\
(f = g) &:= \{x \in X : f(x) = g(x)\} \\
(f \neq g) &:= \{x \in X : f(x) \neq g(x)\} \\
(f > g) &:= \{x \in X : f(x) > g(x)\}
\end{aligned}$$

sont mesurables, c-à-d appartiennent à $\mathcal{M}$.

Démonstration. On a directement

$$\begin{aligned}
(f = a) &= f^{-1}(\{a\}) \in \mathcal{M} \\
(f = g) &= (f - g)^{-1}(\{0\}) \in \mathcal{M} \\
(f \neq g) &= (f = g)^c \in \mathcal{M} \\
(f > g) &= (f - g)^{-1}(]0, +\infty[) \in \mathcal{M}
\end{aligned}$$

■

Propriétés vraies presque partout

Définition 2.4.2 *Soit $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré. Une propriétés $p(x)$ concernant $x \in X$ est dite vraie persque par tout si l'ensemble $\{x \in X : p(x)$ n'est pas vraie$\}$ est négligeable.*

Exemple 2.4.3 ***(Egalité presque partout)***

Si les fonctions $f, g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ sont égaux presque partout, alors il existe $A \in \mathcal{M}$ tel que

$$(f \neq g) \subset A \quad \textit{et} \quad \mu(A) = 0$$

donc $f(x) = g(x)$ pour tout $x \in A^c$ et $\mu(A) = 0$. On peut remarquer que si f et g sont mesurables, alors $(f \neq g) \in \mathcal{M}$ et donc $f = g$ presque partout si et seulement si $\mu(f \neq g) = 0$.

Théorème 2.4.4 *Soient* $(X, \mathcal{M}, \mu)$ *un espace mesuré complet et* $f, g : (X, \mathcal{M}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ *deux applications telle que* f *est mesurable et* $f = g$ *presque par tout. Alors* g *est mesurable.*

Démonstration. Il existe $A \in \mathcal{M}$ telle que $\mu(A) = 0$ et $f(x) = g(x)$ pour tout $x \in A^c$. Soit $a \in \mathbb{R}$, si on pose $(g > a) = g^{-1}(]a, +\infty[)$ on a

$$\begin{aligned}(g > a) &= (g > a) \cap (A \cup A^c)\\ &= [(g > a) \cap A] \cup [(g > a) \cap A^c]\\ &= [(g > a) \cap A] \cup [(f > a) \cap A^c].\end{aligned}$$

D'une part, puisque f est mesurable on a $(f > a) \cap A^c \in \mathcal{M}$ et d'autre part l'ensemble $(g > a) \cap A$ est négligeable car $(g > a) \cap A \subset A$ et $\mu(A) = 0$. Donc $(g > a) \cap A \in \mathcal{M}$ puisque la mesure μ est complète. On a alors $(g > a) \in \mathcal{M}$, d'où la mesurabilité de g. ■

Exercice corrigé 2.4.5 *Soient* $f, g, h : (\Omega, \mathcal{M}, \mu) \longrightarrow \mathbb{R}$ *trois fonctions quelconques. Montrer que si* $f = g$ *presque partout et* $g = h$ *presque partout alors,* $f = h$ *presque partout.*

Démonstration. Il existe $A, B \in \mathcal{M}$ tels que

$$(f \neq g) \subset A, \ (g \neq h) \subset B \quad \text{et} \quad \mu(A) = \mu(B) = 0.$$

Puisque $(f = g) \cap (g = h) \subset (f = h)$ on a

$$(f \neq h) \subset (f \neq g) \cup (g \neq h) \subset A \cup B$$

et on a $\mu(A \cup B) \leq \mu(A) + \mu(B) = 0$, d'où

$$(f \neq h) \subset A \cup B \quad \text{avec} \quad \mu(A \cup B) = 0.$$

Finalement $f = h$ presque partout. ■

2.5 Convergence p.p et convergence en mesure.

Définition 2.5.1 *Soient $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré, $f_n : X \longrightarrow \mathbb{R}$ ou $[0, +\infty]$ une suite de fonctions et $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ ou $[0, +\infty]$ une fonction. On dit que la suite $(f_n)_n$ converge presque partout vers f sur X, s'il existe $A \subset X$ négligeable tel que pour tout $x \in A^c$, la suite $(f_n(x))_n$ converge vers $f(x)$. Dans ce cas on écrit $f_n \longrightarrow f$ p.p.*

Remarques 2.5.2 *1) Si les fonctions f_n et f sont mesurables, alors la suite $(f_n)_n$ converge presque par tout vers f si*

$$\mu\left(\left\{x \in X : \lim_{n \longrightarrow +\infty} f_n(x) \neq f(x)\right\}\right) = 0.$$

2) La convergence simple implique la convergence presque partout car si $f_n \longrightarrow f$ simplement on a

$$\mu\left(\lim_{n \longrightarrow +\infty} f_n \neq f\right) = \mu(\phi) = 0$$

Exemple 2.5.3 *Soit $X = [0, 1]$, $\mathcal{M}$ est la tribu borélienne sur $[0, 1]$ muni de la mesure de Lebesgue λ et $(f_n)_n$ la suite de fonctions définie par $f_n(x) = (-x)^n$.*

Pour tout $x \in [0, 1[$ on a $\lim_{n \longrightarrow +\infty} f_n(x) = 0$ et

$$\lambda\left(\left\{x \in [0, 1] : \lim_{n \longrightarrow +\infty} f_n(x) \neq 0\right\}\right) = \lambda(\{1\}) = 0.$$

Donc $f_n \longrightarrow 0$ p.p.

Définition 2.5.4 *Soient $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré, $f_n : X \longrightarrow \mathbb{R}$ ou $[0, +\infty]$ une suite de fonctions mesurables et $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ ou $[0, +\infty]$ une fonction mesurable. On dit que $(f_n)_n$ converge en mesure vers f si pour tout $\varepsilon > 0$ on a*

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \mu\left(\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}\right) = 0$$

Remarque 2.5.5 *La convergence presque partout n'entraîne pas la convergence en mesure.*

Exemple 2.5.6 *Soit $X = \mathbb{R}$, $\mathcal{M} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $\mu = \lambda$ la mesure de Lebesgue et $f_n = \chi_{[n,n+1]}$,*

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & si\ n \leq x \leq n+1 \\ 0 & si\ x < n\ ou\ x > n+1 \end{cases},$$

il existe $n_0 = [x] + 1$ tel que pour tout $n \geq n_0$ on a $f_n(x) = 0$. Alors $(f_n)_n$ converge simplement vers 0 sur X. Ce qui donne $f_n \longrightarrow 0$ p.p.
D'autre part si on pose $\varepsilon = 1$ on a

$$\lambda\left(\{x \in X : |f_n(x) - 0| \geq 1\}\right) = \lambda\left(\left\{x \in X : \chi_{[n,n+1]} \geq 1\right\}\right) = \lambda\left([n, n+1]\right) = 1 \neq 0$$

donc f_n ne tend pas vers 0 en mesure.

Proposition 2.5.7 *[2]*
Dans un espace mesuré fini, la convergence presque partout entraîne la convergence en mesure.

Exercice corrigé 2.5.8 *Soit $X = [0, 1[$ muni de la tribu borélienne et de la mesure de Lebesgue λ. Soit la suite $(f_n)_n$ de fonctions définie par $f_n = \chi_{[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}[}$. Montrer que $f_n \longrightarrow 0$ en mesure, mais que $(f_n)_n$ ne converge pas vesr 0 presque partout.*

Démonstration. Pour tout $\alpha > 0$ on a $\{x \in X : |f_n(x) - 0| \geq \alpha\} \subset [\frac{1}{n}, \frac{2}{n}[$, donc

$$\lambda\left(\{x \in X : |f_n(x) - 0| \geq \alpha\}\right) \leq \lambda\left([\frac{1}{n}, \frac{2}{n}[\right) = \frac{1}{n} \longrightarrow 0.$$

Il s'ensuit que $f_n \longrightarrow 0$ en mesure.
D'autre part $\limsup\limits_{n \longrightarrow +\infty} f_n = 1 \neq \liminf\limits_{n \longrightarrow +\infty} f_n = 0$, alors pour tout $x \in [0, 1[$, $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} f_n(x) \neq 0$. D'où

$$\lambda\left(\left\{x \in X : \lim_{n \longrightarrow +\infty} f_n(x) \neq 0\right\}\right) = \lambda\left([0, 1[\right) = 1 \neq 0,$$

et donc $(f_n)_n$ ne peut converger presque partout vers 0. ∎

Proposition 2.5.9 *[5]*
Supposons que la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge en mesure vers f. Alors il existe une sous-suite $(f_{n_k})_k$ de $(f_n)_n$ converge vers f presque partout.

Proposition 2.5.10 *Soient* $(X, \mathcal{M}, \mu)$ *un espace mesuré,* $f_n : X \longrightarrow \mathbb{R}$ *ou* $[0, +\infty]$ *une suite de fonctions mesurables et* $f, g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ *ou* $[0, +\infty]$ *deux fonctions mesurables. Si* $f_n \longrightarrow f$ *en mesure et* $f_n \longrightarrow g$ *en mesure, alors* $f = g$ *presque partout. C'est-à-dire la limite est unique presque partout.*

Démonstration. Pour tout $n \geq 1$ on a $|f - g| \leq |f_n - g| + |f_n - f|$. Donc si $k \geq 1$ on obtient

$$\left(|f_n - g| \leq \frac{1}{2k}\right) \cap \left(|f_n - f| \leq \frac{1}{2k}\right) \subset \left(|f - g| \leq \frac{1}{k}\right)$$

et donc par passage au complémentaire,

$$\left(|f - g| > \frac{1}{k}\right) \subset \left(|f_n - g| > \frac{1}{2k}\right) \cup \left(|f_n - f| > \frac{1}{2k}\right)$$

et donc

$$\mu\left(|f - g| > \frac{1}{k}\right) \leq \mu\left(|f_n - g| > \frac{1}{2k}\right) + \mu\left(|f_n - f| > \frac{1}{2k}\right).$$

En faisant tendre n vers l'infini, on trouve $\mu\left(|f - g| > \frac{1}{k}\right) = 0$. Comme

$$(|f - g| \neq 0) = (|f - g| > 0) = \bigcup_{k=1}^{+\infty} \left(|f - g| > \frac{1}{k}\right)$$

et donc

$$\mu(f \neq g) = \mu(|f - g| \neq 0) \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \mu\left(|f - g| > \frac{1}{k}\right) = 0$$

et en fin $f = g$ presque partout. ■

2.6 Exercices du chapitre 2

Exercice 2.1

Soit $\mathcal{M}$ la famille de parties A de $\mathbb{Z}$ définies par

$$\forall p \in \mathbb{N}^* : 2p \in A \Longleftrightarrow 2p+1 \in A$$

1) Montrer que $\mathcal{M}$ est une tribu sur $\mathbb{Z}$ et que $\mathcal{M} \neq \mathcal{P}(\mathbb{Z})$.

2) Soit $\phi : (\mathbb{Z}, \mathcal{M}) \longrightarrow (\mathbb{Z}, \mathcal{M})$ définie par $\phi(n) = n + 2$.

Montrer que ϕ est bijective, mesurable mais ϕ^{-1} n'est pas mesurable.

Exercice 2.2

Montrer que si $f : (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ est dérivable alors f' est mesurable.

Exercice 2.3

1) Montrer que tout ouvert non vide de $\mathbb{R}$ est toujours de mesure de Lebesgue strictement positive.

2) Soient f et g des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et λ la mesure de Lebesgue. Montrer que $f = g$ p.p si et seulement si $f = g$.

3) Soient f et g des fonctions mesurables de $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ et δ_0 la mesure de Dirac en 0. Montrer que $f = g$ presque partout si et seulement si $f(0) = g(0)$.

Exercice 2.4

Soient $(\Omega, \mathcal{M})$ un espace mesurable et Soit f une fonction de $(\Omega, \mathcal{M})$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Montrer que la fonction f est mesurable si, et seulement si, $(f < r) \in \mathcal{M}$, pour tout $r \in \mathbb{Q}$.

Exercice 2.5

1) Soient l'espace mesuré $(X, \mathcal{M}, \mu)$ et $(A_n) \subset \mathcal{M}$ telle que $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} \mu(A_n) = 0$. Montrer que $(f_n . \chi_{A_n})$ converge en mesure vers 0 pour toute suite de fonctions mesurable (f_n).

Exercice 2.6

2) Dans l'espace mesuré $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), card)$. Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge uniformément sur $\mathbb{N}$ vers f si et seulement si elle est convergente vers f en mesure.

Exercice 2.7

Soient $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré, $(f_n)_n$, $(g_n)_n$ deux suites de fonctions mesurables de Ω dans $\mathbb{R}$. Montrer que si $(f_n)_n$ converge en mesure vers f et $(g_n)_n$ converge en mesure vers g, alors la suite $(f_n + g_n)_n$ converge en mesure vers $f + g$.

Exercice 2.8

Soient $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesurè, $(f_n)_n$ une suite de fonctions mesurables de Ω dans $\mathbb{R}$. Montrer que si $f_n \longrightarrow f$ en mesure et $f = 0$ p.p, alors $f_n^2 \longrightarrow 0$ en mesure.

Chapitre 3

Fonctions intégrables

Dans tout ce chapitre, $(X, \mathcal{M}, \mu)$ désigne un espace mesuré. Dans la suite on étudier l'intégrale de Lebesgue sur X par rapport à la mesure μ.

3.1 Intégrale d'une fonction étagée positive.

On note $\mathcal{E}_+$ l'ensemble des fonctions étagées positives mesurables de $(X, \mathcal{M})$ dans $\mathbb{R}_+$ muni de la tribu borélienne.

Définition 3.1.1 *Soit $f \in \mathcal{E}_+$, de décomposition canonique $f = \sum_{i=1}^{n} a_i.\chi_{A_i}$. On pose*

$$\int f d\mu = \sum_{i=1}^{n} a_i.\mu(A_i) \tag{3.1}$$

Cette quantité s'appelle intégrale sur X de la fonction f par rapport à la mesure μ.

L'intégrale $\int f d\mu$ est un élément de $[0, +\infty]$. Bien que les a_i soient tous réels elle peut très bien valoir $+\infty$, si pour un $a_i > 0$, le correspondant $\mu(_{A_i})$ vaut $+\infty$. Rappelons la convention $0 \times (+\infty) := 0$ qui est bien utile ici lorsque $\mu\left(f^{-1}(\{0\})\right) = +\infty$.

Exemples 3.1.2 *1) Si f est une fonction constante, alors sa décomposition canonique s'écrit $f = a\chi_X$, avec $a \geq 0$. La formule (3.1) nous donne alors*

$$\int a d\mu = a.\mu(X).$$

2) Si $f = a\chi_A$ avec $a > 0$, $A \in \mathcal{M}$ et $A \neq X$, sa décomposition canonique est $f = a\chi_A + 0\chi_{A^c}$ d'où

$$\int a.\chi_A d\mu = a.\mu(A) + 0.\mu(A^c) = a.\mu(A).$$

Remarque 3.1.3 *Le cas particulier $a = 1$, dans 2) de l'exemple précédent est d'une grande utilité car il permet d'exprimer la mesure d'un ensemble sous la forme d'une intégrale*

$$\mu(A) = \int \chi_A d\mu, \text{ pour tout } A \in \mathcal{M} \tag{3.2}$$

Le lemme suivant sera utile pour prouver quelques propriétés de l'intégrale sur $\mathcal{E}_+$.

Lemme 3.1.4 *[5]*
L'intégrale d'une fonction étagée positive f ne dépend pas de la décomposition choisie pour f. C'est-à-dire, si $a_1, ..., a_n, b_1, ..., b_m \in [0, +\infty[$ et $A_1, ..., A_n, B_1, ..., B_m \in \mathcal{M}$ avec

$$f = \sum_{i=1}^{n} a_i.\chi_{A_i} = \sum_{j=1}^{m} b_j.\chi_{B_j}.$$

Alors on a

$$\int f d\mu = \sum_{i=1}^{n} a_i.\mu(A_i) = \sum_{j=1}^{m} b_j.\mu(B_j)$$

Proposition 3.1.5 *L'intégrale sur $\mathcal{E}_+$ est homogène, additive et croissante, c'est-à-dire pour tout $f, g \in \mathcal{E}_+$ et $\alpha > 0$,*
i) $\int \alpha f d\mu = \alpha \int f d\mu$
ii) $\int (f+g) d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu$
iii) Si $f \leq g$ alors $\int f d\mu \leq \int g d\mu.$

Démonstration. i) Si $f = \sum_{i=1}^{n} a_i.\chi_{A_i}$ et $\alpha > 0$, alors $\alpha f = \sum_{i=1}^{n} \alpha a_i.\chi_{A_i}$ et l'homogénéité est évidente. Dans ce cas particulier, il convient de remarquer que si $\int f d\mu = +\infty$, on a encore $0 \times \int f d\mu = 0 = \int (0 \times f) d\mu$ grâce à la convention $0 \times (+\infty) = 0$.
ii) Soit $f = \sum_{i=1}^{n} a_i.\chi_{A_i}$ et $g = \sum_{j=1}^{m} b_j.\chi_{B_j}$, alors $f + g = \sum_{i=1}^{n} a_i.\chi_{A_i} + \sum_{j=1}^{m} b_j.\chi_{B_j}$ et donc

$$\int (f+g) d\mu = \sum_{i=1}^{n} a_i.\mu(A_i) + \sum_{j=1}^{m} b_j.\mu(B_j) = \int f d\mu + \int g d\mu$$

iii) Soit $f, g \in \mathcal{E}_+$ avec $f \leq g$ alors $g - f \in \mathcal{E}_+$ et $g = f + (g - f)$. Par ii) on a

$$\int g d\mu = \int f d\mu + \int (g-f) d\mu \geq \int f d\mu,$$

puisque $\int (g-f) d\mu \in [0, +\infty]$. ■

3.2 Intégrale d'une fonction mesurable positive, convergence monotone et lemme de Fatou.

Nous notons $\mathcal{L}^0_+$ l'ensemble des fonctions $f : X \longrightarrow [0, +\infty]$ mesurables positives.

Définition 3.2.1 *Pour $f \in \mathcal{L}^0_+$ on appelle intégrale sur X de f par rapport 'à μ l'élément de $[0, +\infty]$ noté $\int f d\mu$ et défini par*

$$\int f d\mu = \sup \left\{ \int s d\mu : s \in \mathcal{E}_+, \ s \leq f \right\}. \tag{3.3}$$

Pour $A \in \mathcal{M}$ on définit aussi

$$\int_A f d\mu := \int f \chi_A d\mu \tag{3.4}$$

Remarque 3.2.2 *Si $f \in \mathcal{E}_+$ les deux définitions de l'intégrale de f par (3.1) et par (3.3) coïncident. En effet, notons $\int^{etag} f d\mu$ l'intégrale de f au sens de (3.1) et $\int^{mes} f d\mu$ celle au sens de (3.3). Pour toute $s \in \mathcal{E}_+$ telle que $s \leq f$, on a l'inégalité $\int^{etag} s d\mu \leq \int^{etag} f d\mu$, en vertu du a Proposition 3.1.5. Par conséquent dans (3.3) la borne supérieure est atteinte pour $s = f$, ce qui implique $\int^{etag} f d\mu = \int^{mes} f d\mu$.*

Cette intégrale possède la propriété de la croissance.

Proposition 3.2.3 *Pour toutes $f, g \in \mathcal{L}^0_+$, si $f \leq g$ alors $\int f d\mu \leq \int g d\mu$.*

Démonstration. Par l'inclusion

$$\{s \in \mathcal{E}_+, \ s \leq f\} \subset \{s \in \mathcal{E}_+, \ s \leq g\}$$

et par (3.3) on trouve $\int f d\mu \leq \int g d\mu$. ■

Nous donnons maintenant le premier des grands théorèmes d'interversion limite-intégrale ($\lim \int = \int \lim$).

Théorème 3.2.4 *(de la convergence monotone ou de Beppo-Levi)*
Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ *une suite croissante dans* $\mathcal{L}^0_+$ *et soit* $f = \lim\limits_{n\longrightarrow +\infty} f_n = \sup\limits_{n\geq 1} f_n$. *Alors*

$$\int f d\mu = \lim_{n\longrightarrow +\infty} \int f_n d\mu = \sup_{n\geq 1} \int f_n d\mu$$

Démonstration. L'appartenance de f à $\mathcal{L}^0_+$ a déjà été vue (Proposition 2.3.10). Par la proposition précédente (croissance de l'intégrale), la suite $\left(\int f_n d\mu\right)_{n\geq 1}$ est croissante dans $[0, +\infty]$, donc convergente vers $L \in [0, +\infty]$

$$L := \lim_{n\longrightarrow +\infty} \int f_n d\mu = \sup_{n\geq 1} \int f_n d\mu$$

Pour tout $n \geq 1$ on a $f_n \leq f$ et par la croissance de l'intégrale on obtient $\int f_n d\mu \leq \int f d\mu$, puis en prenant le supremum sur $n \geq 1$,

$$L \leq \int f d\mu.$$

Par ailleurs, soit $s \in \mathcal{E}_+$ tel que $s \leq f$ et soit $\alpha \in]0, 1[$. On définit

$$A_n = \{x \in X : f_n(x) \geq \alpha.s(x)\} \tag{3.5}$$

Comme $A_n = (f_n - \alpha.s)^{-1}([0, +\infty])$ et la fonction $x \longrightarrow f_n(x) - \alpha.s(x)$ est mesurable alors $A_n \in \mathcal{M}$ pour tout $n \geq 1$. D'autre part, la suite $(A_n)_{n\geq 1}$ est croissante car si $x \in A_n$, alors $\alpha.s(x) \leq f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$ par croissance de $(f_n)_{n\geq 1}$, donc $x \in A_{n+1}$ et aussi on a $X = \bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} A_n$. Grâce a la définition de A_n on peut écrire une inégalité entre des fonctions mesurables positives,

$$\alpha.s.\chi_{A_n} \leq f_n \chi_{A_n} \leq f_n.$$

On en déduit par croissance de l'intégrale et (3.4),

$$\int_{A_n} (\alpha.s) d\mu \leq \int_{A_n} f_n d\mu \leq \int f_n d\mu \tag{3.6}$$

De plus, si $s = \sum_{i=1}^{m} b_i.\chi_{B_i}$, alors $s.\chi_{A_n} = \sum_{i=1}^{m} b_i.\chi_{(B_i \cap A_n)}$ donc on a

$$\int_{A_n} s d\mu = \sum_{i=1}^{m} b_i.\mu(B_i \cap A_n). \tag{3.7}$$

Pour tout $i = 1, ..., m$, la suite $(B_i \cap A_n)_{n \geq 1}$ est croissante et

$$\bigcup_{n=1}^{+\infty} B_i \cap A_n = B_i \cap \left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n \right) = B_i \cap X = B_i$$

Dans (3.7), on peut passer à la limite quand n tend vers $+\infty$, en appliquant la continuité croissante de la mesure μ (voir Théorème 1.4.1),

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \int_{A_n} s d\mu = \sum_{i=1}^{m} b_i. \left(\lim_{n \longrightarrow +\infty} \mu(B_i \cap A_n) \right) = \sum_{i=1}^{m} b_i \mu(B_i) = \int s d\mu.$$

Faisant tendre n vers l'infini dans (3.6) on obtient ainsi, pour tout $\alpha \in]0, 1[$ et tout $s \in \mathcal{E}_+$ avec $s \leq f$ on a

$$\alpha \int s d\mu \leq L. \tag{3.8}$$

Dans (3.8), on prend d'abord le sup sur $\alpha \in]0, 1[$, puis le sup sur $\{s \in \mathcal{E}_+,\ s \leq f\}$ et on trouve

$$\int f d\mu \leq L.$$

■

Corollaire 3.2.5 *Si $(f_n)_{n \geq 1}$ est décroissante dans $\mathcal{L}_+^0$ et si $\int f_0 d\mu < \infty$ alors on a*

$$\int f d\mu = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \int f_n d\mu,$$

où $f = \lim_{n \longrightarrow +\infty} f_n$.

Démonstration. En appliquant le théorème de Beppo-Levi à la suite $(g_n)_{n \geq 1}$ telle que $g_n = f_0 - f_n$. ■

Corollaire 3.2.6 *(homogénéité et additivité de l'intégrale dans $\mathcal{L}^0_+$)*
Pour toutes fonctions $f, g \in \mathcal{L}^0_+$ et toute constante $\alpha \in [0, +\infty[$,
i) $\displaystyle\int \alpha f d\mu = \alpha \int f d\mu$
ii) $\displaystyle\int (f+g) d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu$

Démonstration. i) Est une conséquence immédiate de la Définition 3.2.1 et de la Proposition 3.1.5 i)
ii) Il existent deux suites croissantes $(f_n)_{n\geq 1}$ et $(g_n)_{n\geq 1}$ de $\mathcal{E}_+$ telles que $f_n \longrightarrow f$ et $g_n \longrightarrow g$ simplement. La suite $(f_n + g_n)_{n\geq 1}$ est croissante dans $\mathcal{E}_+$ et converge simplement vers $f+g$. Or, pour tout $n \geq 1$,

$$\int (f_n + g_n) d\mu = \int f_n d\mu + \int g_n d\mu.$$

On obtient donc le résultat en passant à la limite grâce au théorème de Beppo-Levi. ■

Corollaire 3.2.7 *(Interversion série-intégrale dans $\mathcal{L}^0_+$)*
Soit $(f_k)_{k\geq 1}$ une suite de fonctions mesurables positives. La fonction $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} f_k$ est aussi dans $\mathcal{L}^0_+$ et

$$\int \left(\sum_{k=1}^{+\infty} f_k\right) d\mu = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\int f_k d\mu\right) \quad \textit{(L'égalité dans } [0,+\infty]) \tag{3.9}$$

Démonstration. Posons $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} f_k$. Les applications $x \longmapsto S_n(x)$ sont dans $\mathcal{L}^0_+$ comme somme d'un nombre fini des applications dans $\mathcal{L}^0_+$. La suite $(S_n)_{n\geq 1}$ converge et croissante (dans $[0, +\infty]$) vers S. Pour tout $n \geq 1$ on a

$$\int S_n d\mu = \sum_{k=0}^{n} \int f_k d\mu.$$

En prenant la limite quand $n \longrightarrow +\infty$ et en utilisant le théorème de Beppo-Levi, on obtient le résultat. ■

Corollaire 3.2.8 *(Lemme de Fatou)*

Si $(f_n)_{n\geq 1}$ *est une suite dans* $\mathcal{L}^0_+$, *alors*

$$\liminf_{n\longrightarrow+\infty}\int f_n d\mu \geq \int \liminf_{n\longrightarrow+\infty} f_n d\mu. \tag{3.10}$$

Démonstration. Posons $g := \liminf_{n\longrightarrow+\infty} f_n$. Par définition de la limite inférieure,

$$g = \sup_{n\geq 1}\ \inf_{k\geq n} f_k.$$

Les fonctions $g_n := \inf_{k\geq n} f_k$ appartiennent à $\mathcal{L}^0_+$ (voir Proposition 2.3.10) et la suite $(g_n)_{n\geq 1}$ converge en croissant vers g. Par le théorème de Beppo-Levi, on a donc

$$\int g_n d\mu \longrightarrow \int g d\mu = \int \liminf_{n\longrightarrow+\infty} f_n d\mu \tag{3.11}$$

D'autre part, clairement pour tout $n\geq 1$, on a $g_n \leq f_n$ et donc

$$\int g_n d\mu \leq \int f_n d\mu, \text{ pour tout } n\geq 1. \tag{3.12}$$

Nous ne savons pas si le second membre de (3.12) a une limite quand n tend vers l'infini, mais par contre sa limite inférieure existe toujours. On peut ainsi passer à la limite inférieure dans (3.12), ce qui donne par conservation de l'inégalité large,

$$\liminf_{n\longrightarrow+\infty}\int g_n d\mu \leq \liminf_{n\longrightarrow+\infty}\int f_n d\mu \tag{3.13}$$

Par (3.11), on sait que la limite inférieure du premier membre de (3.13) est en fait une limite et vaut

$$\liminf_{n\longrightarrow+\infty}\int g_n d\mu = \lim_{n\longrightarrow+\infty}\int g_n d\mu = \int \liminf_{n\longrightarrow+\infty} f_n d\mu,$$

d'ou la conclusion. ■

Lemme 3.2.9 *[12]*

Soit $f\in\mathcal{L}^0_+$ *et* $A\in\mathcal{M}$ *avec* $\mu(A)=0$. *Alors* $\int_A f d\mu = 0$

Proposition 3.2.10 *(Quelques propriétés de l'intégrale)*

Soit $f : X \longrightarrow [0, +\infty]$ une fonction mesurable positive.

1) (Inégalité de Tchebychev). Pour tout nombre réel $a > 0$ on a

$$\mu\left(\{x \in X : f(x) \geq a\}\right) \leq \frac{1}{a} \int f d\mu \tag{3.14}$$

2) $\int f d\mu = 0$ si et seulement si $f = 0$ presque partout.

3) Si $\int f d\mu < \infty$ alors $f < \infty$ presque partout.

4) Si $f, g \in \mathcal{L}_+^0$ telles que $f = g$ presque partout. Alors $\int f d\mu = \int g d\mu$.

Démonstration. 1) Considérons l'ensemble

$$A = \{x \in X : f(x) \geq a\} = f^{-1}([a, +\infty]) \in \mathcal{M}.$$

On remarque que la fonction étagée $a.\chi_A$ vérifie l'inégalité $\varphi = a.\chi_A \leq f$, en effet, si $x \in A$ on a $f(x) \geq a = \varphi(x)$ et si $x \notin A$ on a $\varphi(x) = 0 \leq f(x)$. Il résulte que

$$a.\mu(A) = \int \varphi d\mu \leq \int f d\mu.$$

2) Si $f = 0$ presque partout, alors $\mu(A) = 0$ avec $A = \{x \in X : f(x) \neq 0\}$ (donc $f(x) = 0$ pour tout $x \in A^c$). Par l'additivité de l'intégrale et le Lemme 3.2.9, on peut écrire

$$\begin{aligned} \int f d\mu &= \int f\chi_X d\mu = \int f(\chi_A + \chi_{A^c}) d\mu = \int f\chi_A d\mu + \int f\chi_{A^c} d\mu \\ &= \int_A f d\mu + \int_{A^c} f d\mu = 0 + \int_{A^c} 0 d\mu = 0. \end{aligned}$$

Inversement, supposons que $\int f d\mu = 0$. Pour tout $n \geq 1$ on pose

$$A_n = \left\{x \in X : f(x) \geq \frac{1}{n}\right\}.$$

Alors $A_n \in \mathcal{M}$ pour tout $n \geq 1$ car $A_n = f^{-1}([\frac{1}{n}, +\infty])$, la suite $(A_n)_{n \geq 1}$ est croissante et on a

$$\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n = \{x \in X : f(x) > 0\} = \{x \in X : f(x) \neq 0\}.$$

Par ailleurs, par 1), pour tout $n \geq 1$ on a

$$\mu(A_n) \leq n \int f d\mu = 0.$$

Ainsi, par la continuité croissante (voir Théorème 1.4.1), on en déduit que

$$\mu\left(\{x \in X : f(x) \neq 0\}\right) = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \mu(A_n) = 0,$$

d'où le résultat.

3) Pour tout $n \geq 1$,

$$\{x \in X : f(x) = +\infty\} \subset \{x \in X : f(x) \geq n\}.$$

Si l'intégrale de f est finie, on applique l'inégalité de Tchebychev avec $a = n \geq 1$ pour obtenir

$$\mu\{x \in X : f(x) = +\infty\} \leq \mu\{x \in X : f(x) \geq n\} \leq \frac{1}{n} \int f d\mu \longrightarrow 0.$$

Donc $\mu\{x \in X : f(x) = +\infty\} = 0$.

4) Soit $A = \{x \in X : f(x) \neq g(x)\}$. On a $\mu(A) = 0$. Il en résulte que

$$f\chi_A = 0 \text{ presque partout} \quad \text{et} \quad g\chi_A = 0 \text{ presque partout}.$$

Comme $f\chi_{A^c} = g\chi_{A^c}$, on obtient en appliquant le Lemme 3.2.9,

$$\begin{aligned}
\int f d\mu &= \int f\chi_X d\mu = \int f(\chi_A + \chi_{A^c}) d\mu = \int f\chi_A d\mu + \int f\chi_{A^c} d\mu \\
&= \int f\chi_{A^c} d\mu = \int g\chi_{A^c} d\mu = \int g\chi_A d\mu + \int g\chi_{A^c} d\mu \\
&= \int g(\chi_A + \chi_{A^c}) d\mu = \int g d\mu.
\end{aligned}$$

■

3.3 Application : Mesures à densité par rapport à une autre mesure

A partir d'une mesure et d'une fonction mesurable positive, on peut définir une autre mesure de la manière suivante.

Théorème 3.3.1 *Soient $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré et $f : X \longrightarrow [0, +\infty]$ une fonction numérique mesurable positive. Définissons la fonction d'ensembles $\nu : \mathcal{M} \longrightarrow [0, +\infty]$ par*

$$\nu(A) := \int_A f d\mu, \;\; A \in \mathcal{M} \tag{3.15}$$

Alors, ν est une mesure sur $(X, \mathcal{M})$. On dit qu'elle est de densité f par rapport à μ.

Démonstration. Calculons $\nu(\phi)$ en appliquant la définition de ν,

$$\nu(\phi) = \int_\phi f d\mu = \int f\chi_\phi d\mu = \int 0 d\mu = 0.$$

Soit $(A_n)_{n\geq 1}$ une suite dans $\mathcal{M}$, à termes deux à deux disjoints et A sa réunion. D'après Proposition 1.1.6 on a

$$\chi_A = \sum_{n=1}^{+\infty} \chi_{A_n}.$$

Par le Corollaire 3.2.7 on obtient

$$\begin{aligned}\nu\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) &= \int f\chi_A d\mu = \int \left(\sum_{n=1}^{+\infty} f\chi_{A_n}\right) d\mu \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \int f\chi_{A_n} d\mu = \sum_{n=1}^{+\infty} \nu(A_n).\end{aligned}$$

■

Exercice corrigé 3.3.2 *(Intégration par rapport à la mesure de comptage et de Dirac)*

1) Considérons $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ muni de la mesure de comptage μ et la fonction mesurable $f : \mathbb{N} \longrightarrow [0, +\infty]$. Calculer l'intégrale $\int f d\mu$.

2) Considérons l'espace mesurable $(X, \mathcal{P}(X))$ muni de la mesure de Dirac δ_a en point $a \in X$ et la fonction mesurable $f : X \longrightarrow [0, +\infty]$. Calculer l'intégrale $\int f d\delta_a$.

Démonstration. 1) Puisque $\mathbb{N} = \bigcup_{n=0}^{+\infty} \{n\}$, si ν est la mesure de densité f par rapport à μ, on a

$$\int f d\mu = \nu\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} \{n\}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{\{n\}} f d\mu = \sum_{n=0}^{+\infty} f(n).$$

2) Puisque $\delta_a(\{a\}) = 1$ et $\delta_a(\{a\}^c) = 0$, on a

$$\int f d\delta_a = \int_{\{a\}\cup\{a\}^c} f d\delta_a = \int_{\{a\}} f d\delta_a + \int_{\{a\}^c} f d\delta_a = f(a) \int_{\{a\}} d\delta_a + 0 = f(a).$$

Car $\delta_a(\{a\}^c) = 0$ implique que $\int_{\{a\}^c} f d\delta_a = 0$. ∎

Proposition 3.3.3 *(L'intégration par rapport à une mesure à densité)*
Soit ν la mesure de densité f par rapport à μ sur l'espace mesurable $(X, \mathcal{M})$. Alors pour tout $g \in \mathcal{L}_+^0$ on a

$$\int g d\nu = \int f g d\mu \tag{3.16}$$

Démonstration. On commence par vérifier (3.16) pour les fonctions indicatrices $g = \chi_A$ avec $A \in \mathcal{M}$. En effet, par (3.2) et (3.4) on a

$$\int \chi_A d\nu = \nu(A) = \int_A f d\mu = \int f \chi_A d\mu.$$

Soit maintenant $g \in \mathcal{E}_+$ une fonction étagée positive mesurable de décomposition

$$g = \sum_{i=1}^{n} a_i . \chi_{A_i}$$

En utilisant successivement la définition de $\nu(A_i)$ on en déduit

$$\int g d\nu = \sum_{i=1}^{n} a_i \nu(A_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i \int \chi_{A_i} f d\mu = \int \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{A_i} f d\mu = \int f g d\mu$$

Soit $g \in \mathcal{L}_+^0$ quelconque. Par la Proposition 2.3.11, il existe une suite $(g_n)_n$ croissante dans $\mathcal{E}_+$, convergeant vers g. Le produit fg_n est mesurable positif. La suite $(fg_n)_n$ est croissante car f est positive et $(g_n)_n$ est croissante et aussi $(fg_n)_n$ convergeant vers fg.

L'application du théorème de Beppo-Levi relativement à ν pour $(g_n)_n$ et à μ pour la suite $(fg_n)_n$ nous donne

$$\lim_{n\to+\infty} \int g_n d\nu = \int g d\nu \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} \int f g_n d\mu = \int f g d\mu. \tag{3.17}$$

Comme $g_n \in \mathcal{E}_+$, elle vérifie (3.16),

$$\int g_n d\nu = \int f g_n d\mu, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}. \tag{3.18}$$

Les convergences (3.17) permettent de passer à la limite dans (3.18) pour conclure que g vérifie (3.16). ■

Proposition 3.3.4 *[17]*
Soient $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré et $f, g \in \mathcal{L}^0_+$ deux fonctions mesurables positives. Si ν est la mesure de densité f par rapport à' μ, alors toute autre densité g de ν est égale à f μ-presque partout dans le cas ou ν est finie. Autrement dit, si

$$\int_A f d\mu = \int_A g d\mu, \text{ pour tout } A \in \mathcal{M} \quad \text{et} \quad \int f d\mu < +\infty.$$

Alors, $f = g$ μ-presque partout.

Exercice corrigé 3.3.5 *Soit la suite des fonctions $f_n : (\mathbb{R}_+, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+), \lambda) \longrightarrow \mathbb{R}_+$ définie par*

$$f_n(x) = \chi_{[0,n[}(x) \frac{1}{E(x)!},$$

où $E(x)$ désigne la partie entière de $x \in \mathbb{R}$.

1) Donner la limite simple de la suite $(f_n)_n$.

2) Calculer $\int \frac{1}{E(x)!} d\lambda(x)$.

Démonstration. 1) Puisque la suite $([0,n[)_{n\geq 1}$ est croissante et $\bigcup_{n=1}^{+\infty} [0,n[= \mathbb{R}_+$, par (1.2) on a

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} \chi_{[0,n[}(x) = \chi_{\bigcup_{n=1}^{+\infty}[0,n[}(x) = \chi_{\mathbb{R}_+}(x) = 1, \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}_+.$$

Et donc

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} f_n(x) = \frac{1}{E(x)!}$$

pour tout $x \in \mathbb{R}_+$.

2) La suite $(f_n(x))_{n\geq 1}$ est croissante pour tout $x \in \mathbb{R}_+$. Les fonctions positives $x \mapsto f_n(x)$ sont décroissant alors mesurables. D'après le théorème de Beppo-Levi on a

$$\int \frac{1}{E(x)!} d\lambda(x) = \int \lim_{n\longrightarrow+\infty} f_n(x) d\lambda(x) = \lim_{n\longrightarrow+\infty} \int f_n(x) d\lambda(x)$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} \int f_n(x) d\lambda(x) &= \int_{[0,n[} \frac{1}{E(x)!} d\lambda(x) = \int_{\overset{n-1}{\underset{k=0}{\cup}}[k,k+1[} \frac{1}{E(x)!} d\lambda(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{[k,k+1[} \frac{1}{E(x)!} d\lambda(x) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \int_{[k,k+1[} \frac{1}{k!} d\lambda = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} \lambda\left([k, k+1[\right) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!}. \end{aligned}$$

D'où

$$\int \frac{1}{E(x)!} d\lambda(x) = \lim_{n\longrightarrow+\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = e.$$

■

3.4 Intégrale d'une fonction mesurable

Soit $f : (X, \mathcal{M}, \mu) \longrightarrow \mathbb{R}$ ($f \in \mathcal{L}^0$) une fonction numérique mesurable et soient f_+ et f_- les parties positive et négative de f. Puisque $f = f_+ - f_-$ et $|f| = f_+ + f_-$ on a f est mesurable si et seulement si f_+ et f_- sont mesurables.

Définition 3.4.1 *On dit que f est intégrable par rapport à μ si*

$$\int |f| \, d\mu < \infty.$$

Dans ce cas, on pose

$$\int f d\mu = \int f_+ d\mu - \int f_- d\mu \tag{3.19}$$

On notera $\mathcal{L}^1(\mu)$ l'espace des fonctions $f : (X, \mathcal{M}, \mu) \longrightarrow \mathbb{R}$ intégrables.

Remarque 3.4.2 *Si* $\int |f|\, d\mu < \infty$, *alors comme* $f_+ \leq |f|$ *et* $f_- \leq |f|$, *on a aussi*

$$\int f_+ d\mu < \infty \quad et \quad \int f_- d\mu < \infty$$

et la définition précédente fait sens.

Donnons un premier exemple de fonction intégrable.

Exercice corrigé 3.4.3 *Soit* $f : (X, \mathcal{M}, \mu) \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction mesurable. On suppose qu'il existe une partie mesurable* $A \in \mathcal{M}$ *telle que*
i) $\mu(A) < \infty$ *et* $f(x) = 0$ *pour tout* $x \notin A$
ii) Il existe un réel $C > 0$ *tel que* $|f(x)| \leq C$ *pour tout* $x \in A$.
Montrer que $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$.

Démonstration. De i) et ii) on déduit que

$$|f| \leq C\chi_A$$

D'où

$$\int |f|\, d\mu \leq \int C\chi_A d\mu = C\mu(A) < \infty$$

Comme f est mesurable, on en déduit que $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$. ■

Proposition 3.4.4 *Soit* $f : (X, \mathcal{M}, \mu) \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ *une fonction numérique intégrable. Alors, l'ensemble*

$$A = \{x \in X : |f(x)| = +\infty\}$$

est négligeable.
En d'autres termes toute fonction intégrable $f : (X, \mathcal{M}, \mu) \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ *est égale presque partout à une fonction intégrable* $\widetilde{f} : (X, \mathcal{M}, \mu) \longrightarrow \mathbb{R}$.

Démonstration. Soit $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$. Pour tout $n \geq 1$ posons

$$A_n = \{x \in X : |f(x)| \geq n\} = |f|^{-1}([n, +\infty]) \in \mathcal{M}$$

Donc on a

$$A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \quad \text{et} \quad A_{n+1} \subset A_n, \text{ pour tout } n \geq 1$$

Et aussi la relation $\chi_{A_1} \leq |f|$ implique que

$$\mu(A_1) = \int \chi_A d\mu \leq \int |f| \, d\mu < +\infty.$$

Donc par la contonuité décroissante (Théorème 1.4.1) on obtient

$$\mu(A) = \mu(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n) = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \mu(A_n).$$

D'après l'inégalité de Tchebychev (3.14) pour tout $n \geq 1$ on a

$$\mu(A_n) = \mu(\{x \in X : |f(x)| \geq n\}) \leq \frac{1}{n} \int |f| \, d\mu = \frac{C}{n} \longrightarrow 0$$

On en déduit que

$$\mu(A) = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \mu(A_n) = 0.$$

■

Théorème 3.4.5 *Soit $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$. Alors $|f| \in \mathcal{L}^1(\mu)$ et on a*

$$\left| \int f d\mu \right| \leq \int |f| \, d\mu. \tag{3.20}$$

Démonstration. Si $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$, il résulte immédiatement de la Proposition 2.3.6 et la Définition 3.4.1 que $|f| \in \mathcal{L}^1(\mu)$. Par ailleurs, on a

$$\left| \int f d\mu \right| = \left| \int f_+ d\mu - \int f_- d\mu \right| \leq \int f_+ d\mu + \int f_- d\mu = \int (f_+ + f_-) \, d\mu,$$

et comme $|f| = f_+ + f_-$, le théorème est démontré. ■

Proposition 3.4.6 *(Quelques propriétés)*

Pour tout $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$, on pose

$$\|f\|_1 = \int |f| \, d\mu.$$

1) Si $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ avec $\|f\|_1 = 0$ alors $f = 0$ presque partout.

2) Si $f, g \in \mathcal{L}^1(\mu)$, alors $f + g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ et $\alpha f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$. Et aussi l'application $f \longmapsto \int f d\mu$ est une forme linéaire sur $\mathcal{L}^1(\mu)$. De plus,

$$\|f + g\|_1 \leq \|f\|_1 + \|g\|_1 \quad \textit{et} \quad \|\alpha f\|_1 = \alpha \|f\|_1$$

3) Si $f, g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ et $f \leq g$, alors $\int f d\mu \leq \int g d\mu$

4) Si $f, g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ et $f = g$ presque partout, alors $\int f d\mu = \int g d\mu$.

Démonstration. 1) Pour tout $n \geq 1$, posons

$$A_n = \left\{x \in X : |f(x)| \geq \frac{1}{n}\right\} = |f|^{-1}\left(\left[\frac{1}{n}, +\infty\right]\right) \in \mathcal{M}$$

La suite $(A_n)_{n\geq 1}$ est croissante avec

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A = \{x \in X : f(x) \neq 0\}$$

La continuité croissante de la mesure μ (Théorème 1.4.1) donne

$$\mu(A) = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \mu(A_n).$$

D'après l'inégalité de Tchebychev, pour tout $n \geq 1$ on a

$$\mu(A_n) \leq n \|f\|_1 = 0$$

Il s'ensuit que $\mu(A_n) = 0$ pour tout $n \geq 1$ et par conséquent

$$\mu(A) = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \mu(A_n) = 0.$$

Ceci prouve que f est nulle presque partout.

2) $f + g$ est mesurable et $|f + g| \leq |f| + |g|$ donc on a

$$\int |f + g| \, d\mu \leq \int |f| \, d\mu + \int |g| \, d\mu < \infty.$$

Ce qui implique que $f+g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ et $\|f+g\|_1 \leq \|f\|_1 + \|g\|_1$.

En outre,

$$(f+g)_+ - (f+g)_- = f+g = f_+ - f_- + g_+ - g_-$$

Donc

$$(f+g)_+ + f_- + g_- = f_+ + g_+ + (f+g)_-$$

Ainsi,

$$\int (f+g)_+ \, d\mu + \int f_- d\mu + \int g_- d\mu = \int f_+ d\mu + \int g_+ d\mu + \int (f+g)_- \, d\mu$$

Ce sont des intégrales finies donc

$$\begin{aligned} \int (f+g) \, d\mu &= \int (f+g)_+ \, d\mu - \int (f+g)_- \, d\mu \\ &= \int f_+ d\mu + \int g_+ d\mu - \int f_- d\mu - \int g_- d\mu \\ &= \left(\int f_+ d\mu - \int f_- d\mu\right) + \left(g_+ d\mu - \int g_- d\mu\right) \\ &= \int f d\mu + \int g d\mu \end{aligned}$$

D'autre part, si $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, alors αf est mesurable et

$$\int |\alpha f| \, d\mu = |\alpha| \int |f| \, d\mu < \infty$$

et donc $\alpha f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ et $\|\alpha f\|_1 = \alpha \|f\|_1$.

Si $\alpha \geq 0$,

$$\begin{aligned} \int \alpha f d\mu &= \int (\alpha f)_+ \, d\mu - \int (\alpha f)_- \, d\mu \\ &= \alpha \int f_+ d\mu - \alpha \int f_- d\mu \\ &= \alpha \int f d\mu \end{aligned}$$

Si $\alpha \leq 0$,

$$\begin{aligned} \int \alpha f d\mu &= \int (\alpha f)_+ \, d\mu - \int (\alpha f)_- \, d\mu \\ &= (-\alpha) \int f_- d\mu - (-\alpha) \int f_+ d\mu \\ &= \alpha \int f d\mu \end{aligned}$$

3) Comme pour les fonctions mesurables positives (Proposition 3.2.3).

4) Si $f = g$ presque partout, alors $f_+ = g_+$ presque par tout et $f_- = g_-$ presque partout, d'où

$$\int f_+ d\mu = \int g_+ d\mu \quad \text{et} \quad \int f_- d\mu = \int g_- d\mu$$

en vertu du Proposition 3.2.10. Il s'ensuit que $\int f d\mu = \int g d\mu$. ■

3.5 L'espace $L^1(\mu)$ des fonctions intégrables.

Soit $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré. Considérons sur $\mathcal{L}^1(\mu)$ la relation d'équivalence $\mathcal{R}$ définie par

$$f \mathcal{R} g \iff f = g \text{ presque partout.}$$

On note $L^1(\mu)$ le quotient de $\mathcal{L}^1(\mu)$ par cette relation d'équivalence. Un élément de $L^1(\mu)$ est donc une classe d'équivalence de fonctions dans $\mathcal{L}^1(\mu)$; la classe de $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ sera notée $\dot{f} \in L^1(\mu)$

$$L^1(\mu) = \mathcal{L}^1(\mu) \backslash \mathcal{R} = \left\{ \dot{f} : f \in \mathcal{L}^1(\mu) \right\}.$$

D'après la Proposition 3.4.4, toute élément de $L^1(\mu)$ est de la forme $\dot{f}$ où $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ est une fonction numérique finie partout, c'est à dire telle que $f(x) \in \mathbb{R}$ pour tout $x \in X$. On vérifie immédiatement que $L^1(\mu)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ muni de lois usuelles de classes d'équivalence.

On sait ((4) dans Proposition 3.4.6) que si $f, g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ avec $\dot{f} = \dot{g}$, alors $\int f d\mu = \int g d\mu$. On peut donc définir l'intégrale de $\dot{f} \in L^1(\mu)$ en posant

$$\int \dot{f} d\mu = \int f d\mu \quad \text{et} \quad \left\| \dot{f} \right\|_1 = \int |f| \, d\mu$$

Proposition 3.5.1 *Soit $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré. Alors*

(i) L'application $\dot{f} \longmapsto \|f\|_1$ est une norme sur $L^1(\mu)$.

(ii) L'application $\Psi : \dot{f} \longmapsto \int f d\mu$ est une forme linéaire continue sur $L^1(\mu)$ de norme ≤ 1.

Démonstration. (i) On sait (Proposition 3.4.6) que l'application $f \longmapsto \|f\|_1$ est une semi norme sur $\mathcal{L}^1(\mu)$, alors $\dot{f} \longmapsto \|f\|_1$ est une semi norme sur $L^1(\mu)$. Maintenant, si $\left\|\dot{f}\right\|_1 = 0$, donc $f = 0$ presque partout et donc $\dot{f} = \dot{0}$.
(ii) Pour tout $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ on a

$$\left|\Psi(\dot{f})\right| = \left|\int f d\mu\right| \leq \int |f|\, d\mu = \left\|\dot{f}\right\|_1$$

Ce qui prouve que l'application linéaire Ψ est continue de norme ≤ 1. ■

Remarque 3.5.2 *Dans la pratique, on commet l'abus de langage qui consiste à notés par la même lettre la fonction $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ et sa classe $\dot{f} \in L^1(\mu)$. L'intérêt est que les éléments de $\mathcal{L}^1(\mu)$ sont des fonctions (non des classes d'équivalence), mais l'intérêt de $L^1(\mu)$ est d'être' un espace vectoriel normé.*

Théorème 3.5.3 *[3]*
Soit $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré. Alors
(i) $L^1(\mu)$ est un espace de Banach pour la norme $\|\cdot\|_1$.
(ii) Les (classes de) fonctions étagées (simples) mesurables forment un sous espace vectoriel de $L^1(\mu)$ qui est dense dans $L^1(\mu)$ pour la norme $\|\cdot\|_1$.

Corollaire 3.5.4 *[3]*
Soit $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré. Si $(\dot{f}_n)_{n\geq 1}$ une suite de $L^1(\mu)$ qui converge vers $\dot{f} \in L^1(\mu)$ pour la norme $\|\cdot\|_1$. Alors, il existe une sous suite $(f_{n_k})_{k\geq 1}$ qui converge presque partout vers f.

3.6 Théorème de convergence dominée dans $L^1(\mu)$.

Théorème 3.6.1 *Soit '$(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré. Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions numériques mesurables. On suppose que*

1) $f_n \longrightarrow f$ *presque partout*

2) Il existe une fonction fixe $g : X \longrightarrow [a, +\infty[$ *intégrable telle que*

$$|f_n| \leq g \text{ presque partout} \tag{3.21}$$

Alors, f *est intégrable et* $\|f_n - f\|_1 \longrightarrow 0$ *quand* $n \longrightarrow +\infty$.

En particulier, on a

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \int f_n d\mu = \int \lim_{n \longrightarrow +\infty} f_n d\mu = \int f d\mu \tag{3.22}$$

Démonstration. Tout d'abord, comme les fonctions $x \longmapsto f_n(x)$ sont mesurables et $(f_n)_n$ convergent presque par tout vers f, la fonction f est mesurable. Par (3.21) en on déduit que $|f(x)| \leq g(x)$ pour tout presque $x \in X$. Comme $g \in \mathcal{L}^1(\mu)$, on a

$$\int |f| \, d\mu \leq \int g d\mu < \infty,$$

et par conséquent f est intégrable.

Montrons que $\|f_n - f\|_1 \longrightarrow 0$ quand $n \longrightarrow +\infty$. A cet effet, posons pour tout $k \geq 1$

$$F_k = \sup_{i,j \geq k} |f_i - f_j|$$

On définit ainsi une fonction mesurable positive, qui est intégrable car

$$|f_i - f_j| \leq |f_i| + |f_j| \leq 2g, \text{ pour tout } i, j$$

D'où $F_k \leq 2g$. Comme $g \in \mathcal{L}^1(\mu)$, alors $F_k \in \mathcal{L}^1(\mu)$ pour tout $k \geq 1$. La suite $(F_k)_k$ est une suite décroissante des fonctions positives intégrables qui converge vers 0 presque partout. En effet, puisque $f_i - f_j \longrightarrow 0$ presque par tout quand $i, j \to +\infty$ on a $F_k \longrightarrow 0$ presque partout. D'après le théorème de Beppo-Levi, $\int F_k d\mu \longrightarrow 0$ quand $k \longrightarrow +\infty$.
De la relation

$$\int |f_i - f_j| \, d\mu \leq \int F_k d\mu \longrightarrow 0, \text{ quand } k \longrightarrow +\infty,$$

on déduit que la suite $(F_k)_{k \geq 1}$ est de Cauchy dans $L^1(\mu)$, donc converge vers une fonction $g \in L^1(\mu)$. D'après le Corollaire 3.5.4, il existe une sous suite $(F_{k_\ell})_\ell$ qui converge presque partout vers g et comme $f_k \longrightarrow f$ presque partout, on en déduit que $f = g$ presque partout. Mais alors, $\|f_n - f\|_1 = \|f_n - g\|_1 \longrightarrow 0$ quand $n \longrightarrow +\infty$.

Pour le cas particulier, on a

$$\left|\int f_n d\mu - \int f d\mu\right| \leq \int |f_n - f|\, d\mu = \|f_n - f\|_1 \longrightarrow 0, \text{ quand } n \longrightarrow +\infty.$$

Ce qui achève la démonstration du théorème de convergence dominée de Lebesgue. ■

Corollaire 3.6.2 *Soit $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré. Soit $(\varphi_n)_n$ une suite de fonctions numériques intégrables. On suppose que la série de fonctions $\sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k$ converge presque partout et que les fonctions $\left|\sum_{k=1}^{n} \varphi_k\right|$ sont majorées par une fonction intégrable indépendante de n. Alors, $\sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k$ est intégrable et on a*

$$\int \left(\sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k\right) d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int \varphi_k d\mu \tag{3.23}$$

Démonstration. Il suffit d'appliquer le théorème de convergence dominée à la suite de fonctions intégrables

$$f_n = \sum_{k=1}^{n} \varphi_k$$

qui converge presque partout vers $\sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k$ et qui sont majorées en module par une fonction intégrable fixe. ■

3.7 Comparaison de l'intégrale de Lebesgue avec l'intégrale de Riemann.

Proposition 3.7.1 *[11]Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Les conditions suivantes sont équivalentes* *(i) f est Riemann intégrable sur $[a, b]$.*

(ii) f est bornée sur $[a, b]$ et l'ensemble de ses points de discontinuité est négligeable pour la mesure de Lebesgue λ.

Théorème 3.7.2 *[11]*

Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction Riemann intégrable sur $[a, b]$. Alors f est Lebesgue intégrable sur $[a, b]$ et son intégrale de Lebesgue coïncide avec son intégrale de Riemann

$$\int_{[a,b]} f d\lambda = \int_a^b f(x)dx \tag{3.24}$$

Intégrales généralisées

Soit $I = (\alpha, \beta)$ un intervalle non compact de $\mathbb{R}$ (soit I n'est pas borné, soit I est borné et non fermé). Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction et supposons que la restriction de f à tout intervalle compact $[a, b]$ de I est Riemann intégrable.

Définition 3.7.3 *Lorsque la limite*

$$\lim_{a \xrightarrow{>} \alpha, b \xrightarrow{<} \beta} \int_a^b f(x)dx$$

existe, on dit que l'intégrale $\int_I f(x)dx$ est convergente et on pose

$$\int_I f(x)dx = \lim_{a \xrightarrow{>} \alpha, b \xrightarrow{<} \beta} \int_a^b f(x)dx$$

Dans le cas contraire, on dit que l'intégrale $\int_I f(x)dx$ est divergente.

Si $\int_I |f(x)| dx$ est convergente, on dit que l'intégrale $\int_I f(x)dx$ est absolument convergente.

Le théorème suivant fait la lien entre convergence absolue de l'intégrale $\int_I f(x)dx$ et Lebesgue intégrabilité de f sur I.

Théorème 3.7.4 *Soit I un intervalle non compact de $\mathbb{R}$. Pour toute fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ dont la restriction à tout intervalle compact $[a, b] \subset I$ est Riemann intégrable, les conditions suivantes sont équivalentes* *(i) f est Lebesgue intégrable sur I.*

(ii) L'intégrale $\int_I |f(x)|\,dx$ est convergente.

Lorsque l'une de ces conditions est réalisée, on a

$$\int_I f d\lambda = \int_I f(x)dx \tag{3.25}$$

Démonstration. (i)$\Longrightarrow$(ii). Si f est Lebesgue intégrable sur I, alors $|f|$ est aussi Lebesgue intégrable sur I et pour tout intervalle $[a,b]$ inclus dans I

$$\int_a^b |f(x)|\,dx = \int_{[a,b]} |f|\,d\lambda \leq \int_I |f|\,d\lambda < +\infty,$$

d'où il résulte que $\int_I |f(x)|\,dx < \infty$.

(ii)$\Longrightarrow$(i). Posons $I = (\alpha, \beta)$ et choisisons des suites $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ de points de I tels que

$(a_n)_n$ est décroissante et $a_n \longrightarrow \alpha$

$(b_n)_n$ est croissante et $b_n \longrightarrow \beta$

$a_n \leq b_n$ pour tout $n \geq 1$.

Posons $f_n = f\chi_{[a_n,b_n]}$. Comme f est Riemann intégrable sur $[a_n, b_n]$, elle est Lebesgue intégrable sur $[a_n, b_n]$ et f_n Lebesgue intégrable sur I. Les fonctions $|f_n|$ forment une suite croissante de fonctions Lebesgue intégrables sur I qui converge simplement vers $|f|$. En outre,

$$\int_I |f_n|\,d\lambda = \int_{[a_n,b_n]} |f|\,d\lambda = \int_{a_n}^{b_n} |f(x)|\,dx \leq \int_I |f(x)|\,dx < +\infty,$$

et le théorème de Beppo-Levi prouve que $|f|$ est intégrable au sens de Lebesgue sur I.

Comme on a

$$|f_n| \leq |f|\,, \text{ pour tout } n \geq 1,$$

le théorème de convergence dominée de Lebesgue (Théorème 3.6.1) implique que f est Lebesgue intégrable sur I et que

$$\int_I f d\lambda = \lim_{n\longrightarrow+\infty} \int_I f_n d\lambda = \lim_{n\longrightarrow+\infty} \int_{a_n}^{b_n} f(x)dx = \int_I f(x)dx.$$

■

Exemple 3.7.5 *La fonction* $x \longrightarrow \frac{1}{x^\alpha}$ *est Lebesgue intégrable sur* $[a, +\infty[$ *(où* $a > 0$*) si et seulement si* $\alpha > 1$.

Démonstration. En effet, la relation

$$\int_a^n \frac{dx}{x^\alpha} = \varphi_n(t) = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha}\left(\frac{1}{n^{\alpha-1}} - \frac{1}{a^{\alpha-1}}\right) & \text{si } \alpha \neq 1 \\ \ln n - \ln a & \text{si } \alpha = 1 \end{cases}$$

montre que $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ est convergente si et seulement si $\alpha > 1$.
Il s'ensuit que la fonction $x \longrightarrow \frac{1}{x^\alpha}$ est Lebesgue intégrable sur $[a, +\infty[$ si et seulement si $\alpha > 1$. Dans ce cas on a

$$\int_{[a,+\infty[} \frac{1}{x^\alpha} d\lambda(x) = \frac{1}{(\alpha-1)a^{\alpha-1}}$$

■

Exercice corrigé 3.7.6 *Soit* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *une application continue et bornée sur* $\mathbb{R}$. *Après avoir montré son existence, calculer*

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} e^{-nx} f(x) dx \tag{3.26}$$

Démonstration. Les fonctions $x \longmapsto f_n(x) = e^{-nx} f(x)$ sont continues sur $[0, +\infty[$ donc mesurables. L'application f est bornée donc il existe $M > 0$ telle que

$$\left|e^{-nx} f(x)\right| \leq M.e^{-nx}, \text{ pour tout } x \in \mathbb{R} \text{ et tout } n \geq 1.$$

Puisque $\int_0^{+\infty} e^{-nx} < \infty$, alors $\int_0^{+\infty} |e^{-nx} f(x) dx| < \infty$ et donc la limite (3.26) existe et par le Théorème 3.7.4 on a

$$\int_0^{+\infty} e^{-nx} f(x) dx = \int_{[0,+\infty[} f_n d\lambda$$

La suite $(f_n)_n$ est convergente vers $f = 0$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \geq 1$ on a

$$\left|e^{-nx} f(x) dx\right| \leq M.e^{-x} = g(x),$$

et

$$\int_{[0,+\infty[} g d\lambda = \int_0^{+\infty} g(x)dx < \infty.$$

Donc par le théorème de convergence dominée il suit que

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-nx} f(x)dx = \lim_{n\longrightarrow+\infty} \int_{[0,+\infty[} f_n d\lambda = \int_{[0,+\infty[} f d\lambda = 0$$

■

3.8 Continuité et dérivabilité sous le signe $\int$

Soit $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré, f une fonction de $X \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On désigne par f_t, f_x les applications partielles

$$x \longmapsto f_t(x) = f(x,t) \quad \text{et} \quad t \longmapsto f_x(t) = f(x,t).$$

Nous supposerons dans tout ce paragraphe que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, la fonction f_t est intégrable

$$f_t \in L^1(\mu), \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}. \tag{3.27}$$

On définit alors une fonction $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ en posant

$$F(t) = \int f_t(x)d\mu(x) = \int f(x,t)d\mu(x) \tag{3.28}$$

Dans ce qui suit, nous nous intéresserons à la continuité et dérivabilité de la fonction F.

Théorème 3.8.1 *(Continuité sous $\int$)*
Soit $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré, et $f : X \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction vérifiant l'hypothèse (3.27) et $t_0 \in \mathbb{R}$; on suppose de plus que
(i) Pour presque partout $x \in X$, la fonction f_x est continue de la variable t au point $t_0 \in \mathbb{R}$.
(ii) Il existe $\varepsilon > 0$, et $g \in L^1(\mu)$ tels que

$$|f(x,t)| \leq g(x), \text{ pour tout } t \in]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[.$$

Alors, la fonction $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par (3.28), est continue en t_0.

Démonstration. Il suffit de montrer que $F(t_n) \longrightarrow F(t_0)$ pour toute suite $(t_n)_n$ de $]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[$ qui converge vers t_0. Posons

$$f_n(x) = f(x, t_n).$$

Pour presque partout $x \in X$, la fonction f_x est continue au point t_0 et donc

$$f_n(x) = f(x, t_n) = f_x(t_n) \longrightarrow f_x(t_0) = f(x, t_0),$$

quand $n \longrightarrow +\infty$. Par ailleurs,

$$|f_n(x)| = |f(x, t_n)| \leq g(x)$$

D'après le théorème de convergence dominée de Lebesgue (Théorème 3.6.1), on a

$$F(t_n) = \int f_n(x) d\mu(x) \longrightarrow \int f(x, t_0) d\mu(x) = F(t_0)$$

quand $n \longrightarrow +\infty$, d'où le théorème. ■

Théorème 3.8.2 *(Dérivation sous le signe $\int$)*
Soit $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré, et $f : X \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction vérifiant l'hypothèse (3.27) et $t_0 \in \mathbb{R}$; on suppose de plus qu'il existe $\varepsilon > 0$, $A \in \mathcal{M}$ et $g \in L^1(\mu)$ tels que
(i) L'application $t \mapsto f(x, t)$ est dérivable pour tout $t \in]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[$ et pour tout $x \in A^c$.
(ii) Pour tout $t \in]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[$ et pour tout $x \in A^c$ on a

$$\left| \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) \right| \leq g(x).$$

Alors, la fonction $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par (3.28), est dérivable en t_0 et

$$F'(t_0) = \int \frac{\partial f}{\partial t}(x, t_0) d\mu(x).$$

Démonstration. Soit $(t_n)_n$ une suite de $]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[$ telle que $t_n \longrightarrow t_0$ lorsque et $t_n \neq t_0$ pour tout $n \geq 1$. Soit f_n définie par

$$f_n(x) = \frac{f(x, t_n) - f(x, t_0)}{t_n - t_0}.$$

La suite $(f_n)_n$ est dans $L^1(\mu)$ et converge presque partout vers la fonction $x \longmapsto \frac{\partial f}{\partial t}(x, t_0)$ car l'application $t \longmapsto \frac{\partial f}{\partial t}(x, t)$ est continue pour tout $x \in A^c$. Par ailleurs, d'après le théorème d'accroissements finis, si $x \in A^c$ et $n \geq 1$, il existe $\theta_{x,n} \in]0, 1[$ tel que

$$f_n(x) = \frac{\partial f}{\partial t}\left(x, \theta_{x,n} t_0 + (1 - \theta_{x,n}) t_n\right)$$

et donc

$$|f_n(x)| \leq g(x), \text{ pour tout } x \in A^c \text{ et } n \geq 1.$$

D'après le théorème de convergence dominée (Théorème 3.6.1) (appliquée sur la suite $(f_n)_n$), la fonction $x \longrightarrow \frac{\partial f}{\partial t}(x, t)$ (qui est définie presque partout $x \in X$) est dans $L^1(\mu)$ et on a

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \int f_n(x) d\mu(x) = \int \frac{\partial f}{\partial t}(x, t_0) d\mu(x)$$

Ceci etant vrai pour toute suite $(t_n)_n$ dans $]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[$ telle que $t_n \longrightarrow t_0$ lorsque et $t_n \neq t_0$ pour tout $n \geq 1$, on en déduit bien que F est dérivable en t_0 et

$$F'(t_0) = \int \frac{\partial f}{\partial t}(x, t_0) d\mu(x).$$

■

3.9 Application au calcule de $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$.

D'après le Théorème 3.7.4, la fonction $t \mapsto e^{-t^2}$ est intégrable au sens de Lebesgue sur $[0, +\infty[$. Posons

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$$

et proposons nous de calculer la valeur de I. A cet effet, considérons la fonction f définie pour $x \geq 0$ par

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt^2}}{1 + t^2} dt$$

comme on a

$$\left| \frac{e^{-xt^2}}{1 + t^2} \right| \leq \frac{1}{1 + t^2}, \text{ pour tout } x, t \geq 0$$

et que la fonction $t \longmapsto \frac{1}{1+t^2}$ est Lebesgue intégrable sur $[0,+\infty[$, la fonction f est bien définie, et elle est continue en vertu du Théorème 3.8.1. Notons que l'on a

$$f(0) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} dt = \frac{\pi}{2}.$$

En outre, puisque $\frac{e^{-xt^2}}{1+t^2} \longrightarrow 0$ quand $x \longrightarrow +\infty$ pour tout $t > 0$, il résulte du théorème de convergence dominnée (Théorème 3.6.1) que $\lim_{x\longrightarrow+\infty} f(x) = 0$. Pour $x > 0$ on a

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{e^{-xt^2}}{1+t^2}\right) = \frac{-t^2 e^{-xt^2}}{1+t^2}.$$

En outre, pour $x \geq a > 0$, on a

$$\left|\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{e^{-xt^2}}{1+t^2}\right)\right| = t^2 \frac{e^{-xt^2}}{1+t^2} \leq e^{-at^2}$$

et, comme la comme fonction $t \longmapsto e^{-at^2}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$, il résulte du théorème de dérivation sous signe d'intégration que f est dérivable sur tout intervalle $]a,+\infty[$ avec $a > 0$, donc est dérivable sur $]0,+\infty[$, de dérivée

$$f'(x)) = -\int_0^{+\infty} \frac{t^2 e^{-xt^2}}{1+t^2} dt$$

On a donc

$$f(x) - f'(x)) = \int_0^{+\infty} e^{-xt^2} dt, \text{ pour } x > 0.$$

Posons $u = \sqrt{x}t$ dans la dernière, on obtient

$$\int_0^{+\infty} e^{-xt^2} dt = \frac{1}{\sqrt{x}} \int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = \frac{I}{\sqrt{x}}.$$

La fonction f est donc sulution de l'équation différentielle

$$f - f' = \frac{I}{\sqrt{x}} \tag{3.29}$$

Alors,

$$f(x) = e^x \left(C - 2I \int_0^{\sqrt{x}} e^{-t^2} dt\right), \text{ pour } x > 0,$$

et cette formule reste vraie par continuité pour $x = 0$. Puisque $f(0) = \frac{\pi}{2}$, on a $C = \frac{\pi}{2}$ et donc au total

$$f(x) = e^x \left(\frac{\pi}{2} - 2I \int_0^{\sqrt{x}} e^{-t^2} dt \right)$$

Puisque $f(x) \longrightarrow 0$ quand $x \longrightarrow +\infty$, on a nécessairement

$$\frac{\pi}{2} - 2I \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = 0,$$

sait $\frac{\pi}{2} - 2I^2 = 0$, d'où l'on tire

$$I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

3.10 Exercices du chapitre 3

Exercice 3.1

Soit l'espace mesuré $(X, \mathcal{M}, \mu)$ et soit $(A_n) \subset \mathcal{M}$ une suite croissante telle que $X = \overset{+\infty}{\underset{n=0}{\cup}} A_n$. Montrer que $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} \int_{A_n} f d\mu = \int f d\mu$ pour toute fonction réelle mesurable positive $f \in \mathcal{L}^0_+(X, \mathcal{M}, \mu)$.

Exercice 3.2

1) Soient $f \in \mathcal{L}^0([0, +\infty[, \mathcal{B}([0, +\infty[), \lambda)$ une fonction réelle mesurable et $\theta_n = f.\chi_{[0,n]}$. Vérifier que la suite de fonctions (θ_n) est croissante et déterminer $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} \theta_n$.

2) Calculer l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-E(x)} dx$.

Exercice 3.3 (Inégalité de Fatou stricte)

λ est la mesure de Lebesgue sur $X = [-1, 1]$. Soient la fonction $g = \chi_{[0,1]}$ et (f_n) la suite de fontions définie par

$$f_n(x) = \begin{cases} g(x), & \text{si } n \text{ est pair} \\ g(-x), & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

Montrer que $\liminf\limits_{n \longrightarrow +\infty} f_n = \chi_{\{0\}}$ et que $\int \left(\liminf\limits_{n \longrightarrow +\infty} f_n \right) d\lambda < \liminf\limits_{n \longrightarrow +\infty} \int f_n d\lambda$

Exercice 3.4

Soit $f_n(x) = ne^{-n|x|}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Vérifier que $f_n \longrightarrow 0$ p.p.
Est-ce que on a $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} \int f_n d\lambda = \int \lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} f_n d\lambda$?

Exercice 3.5

1) Calculer $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{\sin(\pi x)}{1+x^n} dx$

2) Soit $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. Calculer $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cos^n(\pi x) dx$

Chapitre 4

Produit d'espaces mesurés

4.1 Produit d'espaces mesurables

Définition 4.1.1 *(Tribu produit)*

Soient $(X,\mathcal{M})$ et $(Y,\mathcal{N})$ deux espaces mesurables. Un sous ensemble de $X\times Y$ de la forme $A\times B$ avec $A\in\mathcal{M}$ et $B\in\mathcal{N}$ sera appelé un rectangle mesurable.

On désignera par $\mathcal{M}\otimes\mathcal{N}$ la tribu sur $X\times Y$ engendrée par les rectangles mesurables, c'est-à-dire.

$$\mathcal{M}\otimes\mathcal{N}=\sigma\left(\mathcal{M}\times\mathcal{N}\right)=\sigma\left(\{A\times B : A\in\mathcal{M},\ B\in\mathcal{N}\}\right)$$

Proposition 4.1.2 *La tribu $\mathcal{M}\otimes\mathcal{N}$ est la plus petite tribu sur $X\times Y$ qui rende mesurable les deux projections canoniques*

$$\pi_1 : (X\times Y,\mathcal{M}\otimes\mathcal{N}) \longrightarrow (X,\mathcal{M}),\ \ \pi_1(x,y)=x$$
$$\pi_2 : (X\times Y,\mathcal{M}\otimes\mathcal{N}) \longrightarrow (Y,\mathcal{N}),\ \ \pi_2(x,y)=y$$

Démonstration. π_1 et π_2 sont mesurable car pour tout $A\in\mathcal{M}$ et $B\in\mathcal{N}$ on a

$$\pi_1^{-1}(A)=\{(x,y)\in X\times Y : x\in A\}=A\times Y\in\mathcal{M}\otimes\mathcal{N}$$

et aussi $\pi_2^{-1}(B)=X\times B\in\mathcal{M}\otimes\mathcal{N}$.

Soit $\mathcal{A}$ une tribu sur $X\times Y$ qui rende

$$\pi_1 : (X\times Y,\mathcal{A}) \longrightarrow (X,\mathcal{M}),\ \ \pi_1(x,y)=x$$
$$\pi_2 : (X\times Y,\mathcal{A}) \longrightarrow (Y,\mathcal{N}),\ \ \pi_2(x,y)=y$$

mesurables. Pour tout $A\in\mathcal{M}$ et $B\in\mathcal{N}$,

$$A\times B=(A\times Y)\cap(X\times B)=\pi_1^{-1}(A)\cap\pi_2^{-1}(B)\in\mathcal{A}$$

ce qui signifier que $\mathcal{M}\times\mathcal{N}\subset\mathcal{A}$ donc $\mathcal{M}\otimes\mathcal{N}\subset\mathcal{A}$. ∎

Exercice corrigé 4.1.3 *On veux montrer que $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)=\mathcal{B}(\mathbb{R})\otimes\mathcal{B}(\mathbb{R})$*

1) Montrer que tout ouvert de $\mathbb{R}^2$ est réunion dénombrable de produits d'intervalles ouverts *de $\mathbb{R}$. En déduire que $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$.*

2) Soient A un ouvert de $\mathbb{R}$ et $\mathcal{M}_1 = \{B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) : A \times B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)\}$. Montrer que $\mathcal{M}_1$ est une tribu sur $\mathbb{R}$ contenant les ouverts de $\mathbb{R}$. En déduire que $\mathcal{M}_1 = \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

3) Soient B un ouvert de $\mathbb{R}$ et $\mathcal{M}_2 = \{A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) : A \times B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)\}$. Montrer que $\mathcal{M}_2 = \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

4) Montrer que $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ (et donc $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2) = \mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$).

Démonstration. 1) Soit O un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Pour tout $(x_1, x_2) \in O$, il existe $r > 0$ tel que

$$]x_1 - r, x_1 + r[\times]x_2 - r, x_2 + r[\subset O$$

Comme $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, on peut trouver $y_1 \in \mathbb{Q}\cap]x_1 - r, x_1[$, $z_1 \in \mathbb{Q}\cap]x_1, x_1 + r[$, $y_2 \in \mathbb{Q}\cap]x_2 - r, x_2[$ et $z_2 \in \mathbb{Q}\cap]x_2, x_2 + r[$. On a donc $(x_1, x_2) \in]y_1, z_1[\times]y_2, z_2[\subset O$. On note alors

$$I = \{(y_1, z_1, y_2, z_2) \in \mathbb{Q}^4 :]y_1, z_1[\times]y_2, z_2[\subset O\}$$

Pour tout $(x_1, x_2) \in O$, il existe donc (y_1, z_1, y_2, z_2) tel que $(x_1, x_2) \in]y_1, z_1[\times]y_2, z_2[$. On en déduit que

$$O = \bigcup_{(y_1,z_1,y_2,z_2)\in I}]y_1, z_1[\times]y_2, z_2[$$

Comme I est dénombrable (car $\mathbb{Q}^4$ est dénombrable), on en déduit que $O \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$. On a ainsi montré que la tribu $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$ contenant tous les ouverts de $\mathbb{R}^2$, et donc contenant la tribu engendrée par les ouverts de $\mathbb{R}^2$ (c'est- à-dire $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$). Donc $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

2) $\phi \in \mathcal{M}_1$ car $\phi = A \times \phi \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$.

On montre que $\mathcal{M}_1$ est stable par passage au complémentaire. Soit $B \in \mathcal{M}_1$, on a donc $B^c \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ et $A \times B^c = A \times (\mathbb{R} \backslash B) = (A \times \mathbb{R}) \backslash (A \times B)$. L'ensemble $A \times \mathbb{R}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$, car A et $\mathbb{R}$ sont des ouverts de $\mathbb{R}$, on a donc $A \times \mathbb{R} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$. D'autre part, puisque $B \in \mathcal{M}_1$ on a $(A \times B) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$. Donc, $A \times B^c \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$. Ce qui prouve que $B^c \in \mathcal{M}_1$.

La famille $\mathcal{M}_1$ est stable par union dénombrable. En effet, si $(B_n)_n$ une suite dans $\mathcal{M}_1$

on a $A \times \left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n \right) = \bigcup_{n=1}^{+\infty} (A \times B_n) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ car $A \times B_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ pour tout $n \geq 1$. On a donc montré que $\mathcal{M}_1$ est une tribu.

Soit θ un ouvert de $\mathbb{R}$, donc $\theta \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Comme $A \times \theta$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$, on a $A \times \theta \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$. Ce qui donne $\theta \in \mathcal{M}_1$.

$\mathcal{M}_1$ est une tribu contenant les ouverts de $\mathbb{R}$, donc $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{M}_1$. En fin, $\mathcal{M}_1 = \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

3) On utilise la même méthode que pour la question précédente pour montrer que $\mathcal{M}_2$ est une tribu sur $\mathbb{R}$ contenant les ouverts de $\mathbb{R}$ et par conséquent on a $\mathcal{M}_2 = \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

4) Les deux questions précédentes affirment que si $A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ alors $A \times B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$. On a donc $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \times \mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$. On en déduit

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma \left(\mathcal{B}(\mathbb{R}) \times \mathcal{B}(\mathbb{R}) \right) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$$

Et donc, (avec la question 1) on a finalement $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$. ■

Proposition 4.1.4 *Soient $(X, \mathcal{M})$, $(Y_1, \mathcal{N}_1)$ et $(Y_2, \mathcal{N}_2)$ trois espaces mesurables et soit l'application*

$$f = (f_1, f_2) : (X, \mathcal{M}) \longrightarrow (Y_1 \times Y_2, \mathcal{N}_1 \otimes \mathcal{N}_2).$$

Alors f est mesurable si et seulement si $f_1 : (X, \mathcal{M}) \longrightarrow (Y_1, \mathcal{N}_1)$ et $f_2 : (X, \mathcal{M}) \longrightarrow (Y_2, \mathcal{N}_2)$ sont mesurable.

Démonstration. Si f est mesurable, alors $f_1 = \pi_1 \circ f$ et $f_2 = \pi_2 \circ f$ le sont aussi comme composition de fonctions mesurables (voir Théorème 2.3.4). Inversement, si f_1 et f_2 sont mesurables, alors pour tout $A_1 \in \mathcal{N}_1$ et $A_2 \in \mathcal{N}_2$ on a

$$f^{-1}(A_1 \times A_2) = f_1^{-1}(A_1) \cap f_2^{-1}(A_2) \in \mathcal{M}$$

Donc puisque $\mathcal{N}_1 \otimes \mathcal{N}_2 = \sigma(\mathcal{N}_1 \times \mathcal{N}_2)$ et d'aprés la Proposition 2.3.1, f est mesurable. ■

Définition 4.1.5 *(Les sections)*

Pour toute partie E de $X \times Y$ et tout $x \in X$, on pose

$$E_x = \{y \in Y : (x, y) \in E\}$$

On dit que E_x est la section de E selon $x \in X$. De manière analogue, on définit la section de E selon $y \in Y$ par

$$E_y = \{x \in X : (x, y) \in E\}$$

Par exemple, si $E = A \times B$ où $A \subset X$ et $B \subset Y$, pour tout $x \in X$ on a

$$E_x = \begin{cases} \phi \text{ si } x \notin A \\ B \text{ si } x \in A \end{cases}$$

Définition 4.1.6 *Soit l'application $f : X \times Y \longrightarrow Z$. Pour $x \in X$ et $y \in Y$, on définit les applications partielles $f_x : Y \longrightarrow Z$ et $f_y : X \longrightarrow Z$ par*

$$f_x(y) = f(x, y) \quad \textit{et} \quad f_y(x) = f(x, y)$$

Une propriété importante de la tribu produit $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$ est d'assurer la mesurabilité des sections et les applications partielles. Plus précisément, on a

Proposition 4.1.7 *Soient $(X, \mathcal{M})$ et $(Y, \mathcal{N})$ deux espaces mesurables.*
(i) Si $E \in \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$, alors pour tout $x \in X$ et $y \in Y$ on a $E_x \in \mathcal{N}$ et $E_y \in \mathcal{M}$.
(ii) Si l'application $f : (X \times Y, \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ est mesurable, alors les applications partielles $f_x : (Y, \mathcal{N}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ et $f_y : (X, \mathcal{M}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ sont mesurables.

Démonstration. Posons

$$\mathcal{A} = \{E \subset X \times Y : E_x \in \mathcal{N} \text{ pour tout } x \in X\}$$

Comme $(X \times Y)_x = Y \in \mathcal{N}$ pour tout $x \in X$, on a $X \times Y \in \mathcal{A}$. Si $E \in \mathcal{A}$, alors pour tout $x \in X$ on a $(E^c)_x = (E_x)^c \in \mathcal{N}$ et par conséquent $E^c \in \mathcal{A}$. En fin, soit $(E_n)_{n \geq 1}$ une suite d'éléments de $\mathcal{A}$, pour tout $x \in X$ on a

$$\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n \right)_x = \bigcup_{n=1}^{+\infty} (E_n)_x \in \mathcal{N},$$

et par conséquent $\bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n \in \mathcal{A}$. On a ainsi montré que $\mathcal{A}$ est une tribu sur $X \times Y$. En outre, si $A \in \mathcal{M}$ et $B \in \mathcal{N}$, alors pour tout $x \in X$,

$$(A \times B)_x = \begin{cases} \phi \text{ si } x \notin A \\ B \text{ si } x \in A \end{cases}$$

de sorte que $A \times B \in \mathcal{A}$. Comme $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$ est la plus petite tribu sur $X \times Y$ contenant les rectangles mesurables, on en déduit que $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N} \subset \mathcal{A}$, ce qui démontre (i).

(ii) Soit $a \in \mathbb{R}$. Comme $f : (X \times Y, \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ est mesurable, on a $f^{-1}(]a, +\infty[) \in \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$. Pour tout $x \in X$, on a en vertu de (i)

$$f_x^{-1}(]a, +\infty[) = \left(f^{-1}(]a, +\infty[)\right)_x \in \mathcal{N},$$

et par conséquent $f_x : (Y, \mathcal{N}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ est mesurable. ■

4.2 Mesure produit

On veut maintenant construire une mesure sur l'espace produit $X \times Y$ où X et Y sont des espaces mesurés.

Théorème 4.2.1 *[7]*
Soient $(X, \mathcal{M}, \mu)$ et $(Y, \mathcal{N}, \nu)$ deux espaces mesurés σ-finis.
(i) Il existe une unique mesure positive, notée $\mu \otimes \nu$, sur la tribu $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$ qui vérifier

$$\mu \otimes \nu(A \times B) = \mu(A).\nu(B) \tag{4.1}$$

quels que soient $A \in \mathcal{M}$ et $B \in \mathcal{N}$.
(ii) Pour tout $E \in \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$, les fonctions

$$\begin{array}{lcl} (X, \mathcal{M}) \longrightarrow [0, +\infty] & \textit{et} & (Y, \mathcal{N}) \longrightarrow [0, +\infty] \\ x \longmapsto \nu(E_x) & & y \longmapsto \mu(E_y) \end{array}$$

sont mesurables de plus on a

$$\mu \otimes \nu(E) = \int_X \nu(E_x) d\mu = \int_Y \mu(E_y) d\nu. \tag{4.2}$$

Corollaire 4.2.2 *Sous les hypothèses du théorème précédent, on a*

$$\int_X \left(\int_Y \chi_E(x,y) d\nu(y) \right) d\mu(x) = \mu \otimes \nu(E) = \int_Y \left(\int_X \chi_E(x,y) d\mu(x) \right) d\nu(y) \tag{4.3}$$

pour tout $E \in \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$.

Démonstration. Il est clair que pour tout $(x,y) \in X \times Y$ on a $\chi_{E_x} = \chi_E = \chi_{E_y}$ et par définition de l'intégrale on a

$$\nu(E_x) = \int_Y \chi_{E_x} d\nu \quad \text{et} \quad \mu(E_y) = \int_X \chi_{E_y} d\mu.$$

Alors d'aprés (4.2) on a

$$\mu \otimes \nu(E) = \int_X \nu(E_x) d\mu = \int_X \left(\int_Y \chi_E(x,y) d\nu(y) \right) d\mu(x)$$

et

$$\mu \otimes \nu(E) = \int_Y \mu(E_y) d\nu = \int_Y \left(\int_X \chi_E(x,y) d\mu(x) \right) d\nu(y).$$

■

Remarques 4.2.3 *1) L'hypothèse de σ-finitude est nécessaire. En effet, soit $(X, \mathcal{M}) = (Y, \mathcal{N}) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, $\mu = \lambda$ est la mesure de Lebesgue et ν la mesure de comptage (ν est non σ-finie d'après l'Exemple 1.3.8). Soit $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = y\} \in \mathcal{M} \otimes \mathcal{N} = \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$. Pour tout $x \in X$ et $y \in Y$ on a $\nu(E_x) = 1$ et $\lambda(E_y) = 0$. Or*

$$\infty = \int_{\mathbb{R}} \nu(E_x) d\lambda \neq \int_{\mathbb{R}} \lambda(E_y) d\nu = 0$$

2) La mesure produit $\mu \otimes \nu$ est σ-finie sur $(X, \mathcal{M} \otimes \mathcal{N})$. En effet, comme les espaces $(X, \mathcal{M}, \mu)$ et $(Y, \mathcal{N}, \nu)$ sont σ-finis, il existent $(E_n)_n \subset \mathcal{M}$ et $(G_n)_n \subset \mathcal{N}$ tels que $X =$

$\bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n$ *et* $Y = \bigcup_{n=1}^{+\infty} G_n$ *avec* $\mu(E_n) < \infty$ *et* $\nu(G_n) < \infty$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$. *Pour tout* $n, m \geq 1$, *on pose* $F_{n,m} = E_n \times G_m$, *de sorte que*

$$X \times Y = \bigcup_{n,m\geq 1}^{+\infty} F_{n,m} \quad et \quad \mu \otimes \nu(F_{n,m}) = \mu(E_n).\nu(G_m) < \infty,$$

pour tout $n, m \geq 1$. *Comme* $\mathbb{N}^2$ *est dénombrable, on en déduit que* $\mu \otimes \nu$ *est* σ*-finie.*

Exercice corrigé 4.2.4 *(Exemple de mesure produit)*

Soient μ *et* ν *deux mesures* σ*-finies, non nulles, sur* $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ *tel que* $\mu \otimes \nu(\Delta^c) = 0$ *où* $\Delta = \{(x, x) : x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$. *Montrer qu'il existe* $a, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *tels que*

$$\mu = \alpha\delta_a \quad et \quad \nu = \beta\delta_a,$$

où δ_a *est la mesure de Dirac en* a.

Démonstration. On remarque d'abord que Δ^c est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ donc $\Delta^c \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$. De plus on a $(\Delta^c)_y = (\Delta_y)^c = \{x\}^c$, alors par les hypothéses et Théorème 4.2.1 on a

$$\mu \otimes \nu(\Delta^c) = \int_{\mathbb{R}} \nu(\{x\}^c) d\mu = 0,$$

on déduit donc que $\nu(\{x\}^c) = 0$, pour μ-presque par tout $x \in \mathbb{R}$. Comme $\mu(\mathbb{R}) \neq 0$, il existe donc $a \in \mathbb{R}$ tel que $\nu(\{a\}^c) = 0$. Ceci donne que $\nu = \alpha\delta_a$ avec $\alpha = \nu(\{a\})$. Comme $\nu \neq 0$ on a $\alpha > 0$.

D'autre fois, grâce à le Théorème 4.2.1 on a

$$\mu \otimes \nu(\Delta^c) = \int_{\mathbb{R}} \mu(\{x\}^c) d\nu = 0$$

Comme $\nu = \alpha\delta_a$, on a donc $\mu \otimes \nu(\Delta^c) = \alpha\mu(\{a\}^c) = 0$ on déduit donc $\mu = \beta\delta_a$ avec $\beta = \mu(\{a\})$. En fin, comme $\mu \neq 0$ on a $\beta > 0$. ■

4.3 Théorèmes de Fubini et conséquences

Ces théorèmes relient l'intégrale sur la mesure produit et les intégrales itérées.

Théorème 4.3.1 *(Fubini-Tonelli)*
Soient $(X, \mathcal{M}, \mu)$ *et* $(Y, \mathcal{N}, \nu)$ *deux espaces mesurés* σ*-finis et soit* $f : (X \times Y, \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}) \longrightarrow [0, +\infty]$ *une fonction mesurable positive. Alors*
i) Les fonctions

$$\begin{array}{ll} (X, \mathcal{M}) \longrightarrow [0, +\infty] & \textit{et} \quad (Y, \mathcal{N}) \longrightarrow [0, +\infty] \\ x \longmapsto \displaystyle\int_Y f(x, y) d\nu(y) & \qquad y \longmapsto \displaystyle\int_X f(x, y) d\mu(x) \end{array}$$

sont mesurables.
ii) On a les égalités suivantes

$$\begin{aligned} \int_{X \times Y} f d(\mu \otimes \nu) &= \int_X \left(\int_Y f(x, y) d\nu(y) \right) d\mu(x) \\ &= \int_Y \left(\int_X f(x, y) d\mu(x) \right) d\nu(y) \in [0, +\infty] \end{aligned} \tag{4.4}$$

Démonstration. Pour $f = \chi_E$, avec $E \in \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$, les conclusions de i) et ii) ont été établies en ii) dans le Théorème 4.2.1 et le Corollaire 4.2.2. Pour $f : X \times Y \longrightarrow [0, +\infty]$ étagée mesurable, les résultats restent vrai par linéarité. Finalement, si $f : X \times Y \longrightarrow [0, +\infty]$ mesurable, alors par la Proposition 2.3.11 il existe une suite croissante $(f_n)_{n \geq 1}$ de fonctions étagées positives telles que

$$\lim_{n \to +\infty} f_n(x, y) = f(x, y), \text{ pour tout } (x, y) \in X \times Y.$$

Par le Théorème 3.2.4 de la convergence monotone on a

$$\int_X f(x, y) d\mu(x) = \lim_{n \to +\infty} \int_X f_n(x, y) d\mu(x),$$

pour tout $y \in Y$. Donc la fonction $y \longmapsto \displaystyle\int_X f(x, y) d\mu(x)$ est mesurable comme la limite simple d'une suite de fonctions mesurables (voir Proposition 2.3.10). Par le même raisonnement, on voit que la fonction $x \longmapsto \displaystyle\int_Y f(x, y) d\nu(y)$ est mesurable.

Les égalités (4.4) est vraie pour les fonctions f_n donc pour f par passage à la limite croissante en appliquant deux fois le Théorème 3.2.4 de la convergence monotone. ■

On passe maintenant au cas de fonctions réelles ou complexes.

Théorème 4.3.2 *[16](Fubini-Lebesgue)*
Soient $(X, \mathcal{M}, \mu)$ et $(Y, \mathcal{N}, \nu)$ deux espaces mesurés σ-finis et soit $f : (X \times Y, \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}) \longrightarrow \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ une fonction intégrable, c-à-d $f \in \mathcal{L}^1(\mu \otimes \nu)$. Alors
1) $f_x \in \mathcal{L}^1(\nu)$ pour μ-presque partout $x \in X$ et $f_y \in \mathcal{L}^1(\mu)$ pour ν-presque partout $y \in Y$.
2) La fonction $x \longmapsto \int_Y f(x,y)d\nu(y)$ est dans $\mathcal{L}^1(\mu)$ et la fonction $y \longmapsto \int_X f(x,y)d\mu(x)$ est dans $\mathcal{L}^1(\nu)$.
3) On a les égalités suivantes

$$\int_{X\times Y} fd(\mu \otimes \nu) = \int_X \left(\int_Y f(x,y)d\nu(y)\right) d\mu(x) = \int_Y \left(\int_X f(x,y)d\mu(x)\right) d\nu(y). \tag{4.5}$$

Remarque 4.3.3 *Il existe des fonctions $f : (X \times Y, \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}) \longrightarrow \mathbb{R}$ pour lesquelles les intégrales superposées*

$$\int_X \left(\int_Y f(x,y)d\nu(y)\right) d\mu(x), \quad \int_Y \left(\int_X f(x,y)d\mu(x)\right) d\nu(y) \tag{4.6}$$

ont un sens, mais qui ne sont pas intégrables (c-à-d $f \notin \mathcal{L}^1(\mu \otimes \nu)$) comme le montre l'exercice suivant

Exercice corrigé 4.3.4 *Considérons, sur le produit $]0,1[\times]0,1[$ muni de la mesure produit des mesures λ de Lebesgue sur $]0,1[$, la fonction f définie par*

$$f(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

Montrer que les intégrales (4.6) existent mais $f \notin \mathcal{L}^1(\lambda \otimes \lambda)$.

Démonstration. Pour $0 < x < 1$ on a

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)dy\right) dx = \int_0^1 \left[\frac{y}{x^2+y^2}\right]_{y=0}^{y=1} dx = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx = \frac{\pi}{4}.$$

On vérifier de même que

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)dx \right) dy = -\frac{\pi}{4}.$$

En effet, $f \notin \mathcal{L}^1(\lambda \otimes \lambda)$ car

$$\int_{]0,1[^2} f_+ dydx = \int_0^1 \left(\int_0^x \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} dy \right) dx = \int_0^1 \left[\frac{y}{x^2+y^2} \right]_{y=0}^{y=x} dx = \int_0^1 \frac{1}{2x} dx = +\infty.$$

■

La forme la plus courante du Théorème de Fubini est la suivante

Théorème 4.3.5 *Soit* $f : (X \times Y, \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}) \longrightarrow \mathbb{C}$. *Si l'un des trois nombres*

$$\int_{X\times Y} |f| \, d(\mu \otimes \nu), \quad \int_X \left(\int_Y |f| \, (x,y) d\nu(y) \right) d\mu(x), \quad \int_Y \left(\int_X |f| \, (x,y) d\mu(x) \right) d\nu(y) \tag{4.7}$$

est fini, alors il en est de même pour les deux autres. De plus on a les égalités (4.5).

Démonstration. D'aprés le Théorème 4.3.1 de Fubini-Tonelli, les trois nombres (4.7) sont égaux. Donc si l'un est fini, $f \in \mathcal{L}^1(\mu \otimes \nu)$ et le Théorème 4.3.2 de Fubini-Lebesgue donne la conclusion. ■

4.4 Exercices du chapitre 4

Exercice 4.1

Soit l'espace mesuré $(X, \mathcal{M}, \mu)$ avec $X = \{a, b, c\}$, $\mathcal{M} = \{\phi, \{a\}, \{b, c\}, X\}$ et $\mu : \mathcal{M} \longrightarrow [0, +\infty]$ est définie par

$$\mu(\phi) = \mu(\{a\}) = 0 \quad \text{et} \quad \mu(X) = \mu(\{b, c\}) = 1$$

1) Vérifier que la mesure μ complète et σ-finie

2) Dans $(X \times X, \mathcal{M} \otimes \mathcal{M}, \mu \otimes \mu)$, calculer $\mu \otimes \mu(\{a\} \times \{b, c\})$ et déterminer la section $(\{a\} \times \{b\})_x$?

Est-ce-que $\{a\} \times \{b\} \in \mathcal{M} \otimes \mathcal{M}$?

3) Déduire que la mesure produit $\mu \otimes \mu$ n'est pas complète.

Exercice 4.2

Soient $(X, \mathcal{M}, \mu)$, $(Y, \mathcal{N}, \nu)$ deux espaces mesurés σ-finis et $A \in \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$ négligeable par la mesure produit $\mu \otimes \nu$. Si A_x est la section de A en $x \in X$, montrer que $\nu(A_x) = 0$ pour μ-presque par tout $x \in X$.

Exercice 4.3

Soient $(X, \mathcal{M}, \mu)$ espace mesuré σ-fini et $f : (X, \mathcal{M}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ une application mesurable telle que $\inf\limits_{x \in X} f(x) = a \in \mathbb{R}$. On pose $\Omega = \{(x, y) \in E \times \mathbb{R} : a \leq y \leq f(x)\}$ et $\Gamma = \{(x, y) \in X \times \mathbb{R} : y = f(x)\}$ (graphe de f).

Utiliser l'application $\varphi : X \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $\varphi(x, y) = f(x) - y$ pour montrer que :

1) $\Omega, \Gamma \in \mathcal{M} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$

2) $\mu \otimes \lambda(\Omega) = \int_X (f - a) d\mu$ où λ est la mesure de Lebesgue sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

3) $\mu \otimes \lambda(\Gamma) = 0$

Exercice 4.4

1) On considère l'espace mesuré $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu)$ où μ est la mesure de comptage sur $\mathbb{N}$.

a) Montrer que si $g : (\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu) \longrightarrow (\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu)$ est une fonction mesurable, alors

$$\int_{\mathbb{N}} g d\mu = \sum_{n=0}^{+\infty} g(n)$$

b) On définit la fonction $f : (\mathbb{N}^2, \mathcal{P}(\mathbb{N}) \otimes \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu \otimes \mu) \longrightarrow (\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu)$ par

$$f(m,n) = \begin{cases} 1, \text{ si } m = n \\ -1, \text{ si } m = n+1 \\ 0, \text{ sinon} \end{cases}$$

Calculer

$$\int \left(\int f(m,n) d\mu(m) \right) d\mu(n) \quad \text{et} \quad \int \left(\int f(m,n) d\mu(n) \right) d\mu(m)$$

Déduire que la fonction f n'est pas intégrable sur $\mathbb{N}^2$.

Exercice 4.5

Soient $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré σ-fini et $f : (X, \mathcal{M}, \mu) \longrightarrow ([0, +\infty[, \mathcal{B}([0, +\infty[), \lambda)$ une fonction mesurable positive (λ est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$). Montrer que

$$\int_X f d\mu = (\mu \otimes \lambda)(A) = \int_0^{+\infty} \mu(\{x \in X : f(x) > y\}) \, dy.$$

avec $A = \{(x,y) \in X \times \mathbb{R} : 0 \leq y < f(x)\}$.

Bibliographie

[1] V. I. Bogachev, Measure theory (Volume I), Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2007.

[2] A. Bouziad et J. Calbrix, Théorie de la Mesure et de l'intégration, 185. Puli. univ. Rounen, 1993.

[3] H. Brezis, Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations, Springer New York Dordrecht Heidelberg London, 2011.

[4] T. Gallay, Théorie de la Mesure et de l'intégration, Université Joseph Fourier, Grenoble, 2009.

[5] J. Genet, Mesure et intégration (théorie élémentaire), Vuibert 1976.

[6] R. Godement, Analyse mathématique IV : Intégration et théorie spectrale, analyse harmonique, le jardin des délices modulaires, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2003.

[7] P. R. Halmos, Measure theory, Springer-Verlag New York Inc., 1974.

[8] B. Hauchecorne, Les contres exemple en Mathématiques, Ellipses Edition Marketing S.A., 2007.

[9] H. König, Measure and integration (An advanced course in basic procedures and applications), Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1997.

[10] V. Komornik, Précis d'analyse réelle : Analyse fonctionnelle, Intégrale de Lebesgue, Espaces fonctionnels, Ellipses Édition Marketing S.A., 2002.

[11] P. Krée, Intégration et théorie de la Mesure : une approche géométrique, ellipses édition marketing S.A., 1997.

[12] E. Laamri, Mesure, intégration, convolution et transformée de Fourrier des fonctions, Sciences Sup, Dunod, 2007.

[13] L. Meziani, Mesure et intégration, Université d'Alger, 1977-78.

[14] W. Rudin, Real and Complex Analysis (Third Edition), McGraw-Hill, Inc., 1987.

[15] C. Suquet, I.F.P. Cours de l'année 2003-2004, http ://math.univ-lille1.fr/suquet/ens/IFP/Cours/cours04/CoursIFP04.html

[16] C. Swartz, Measure, integration and function spaces, World scientific, Singapore-New Jersey-London-Hong Kong, 1994.

[17] A. J. Weir, Lebesgue integration and measure, Cambridge university Press, 1973

[18] J. Yeh, Real analysis (theory of measure and integration), 2nd edition, World scientific publishing, London, 2006.