Mesure et Intégration

Théorie et Techniques

A.ABDESSEMED

DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES, FACULTE DES SCIENCES EXACTES

UNIVERSITE FRERES MENTOURI CONSTANTINE

Execices corrigés et commentés

*****

Cycle de graduation-Ecoles Supérieures

UNIVERSITE FRERES MENTOURI CONSTANTINE -1-

PUBLICATION UNIVERSITE MENTOURI

CONSTANTINE -1- CAMPUS ZARZARA ALGERIE

Table des matières

Preface

Dans ce polycopié nous présentons aux étudiants de licence $L3$ de $3^{éme}$ année la théorie de la mesure et de l'intégration. Cette première version du polycopié a été élaborée avec beaucoup de détails et clarté, incluant les méthodes et techniques constructives et concises. Beaucoup de passages laissés pour compte au lecteur dans diverses références standards sur le sujet ont été développé dans ce cours. Notre raison principale dans ce contexte est de démystifier un peu pour le lecteur qui rencontre cette théorie pour la première fois, le coté purement abstrait comme il est présenté dans certaine références ; pourtant de niveau académique, cependant de notre expérience durant quelques années avec les étudiants, ces dernières restent inaccessibles, et créent ce que l'on appelle dans notre jargon « le complexe de Sésame » . Comme exemple certains recueils traitent directement le sujet d'une façon générale dans $\mathbb{R}^d$. Alors que, la présentation de la dite théorie dans $\mathbb{R}$ nécessite considération à cause de certains concepts fondamentaux de l'analyse réelle et moderne comme la théorie des ensembles, la topologie et les séries trigonométriques qui sont revues et exposés pour la première fois. Nous avons donc suivi cette ligne de direction tout en respectant le programme inhérent au module et élaboré au niveau national. Nous exposons progressivement les chapitres et sections du dit programme comme indiqué ci-dessous :

Sommaire :

Chapitre 1 : Tribus et mesures

- Rappels sur la théorie des ensembles.
- Algèbres et tribus.
- Mesures positives, probabilité.

- Propriétés des mesures, mesures extérieurs, mesures complètes.
- La mesure de Lebesgue sur la tribu des boréliens.

Chapitre 2 : Fonctions mesurables, variables aléatoires

- Fonctions étagées.
- Fonctions mesurables et variables aléatoires.
- Caractérisation de la mesurabilité.
- Convergence p.p et convergence en mesure.

Chapitre 3 : Fonctions intégrables

- Intégrale d'une fonction étagée positive.
- Intégrale d'une fonction mesurable positive.
- Intégrale d'une fonction mesurable.
- Comparaison de l'intégrale de Lebesgue avec l'intégral de Riemann.
- Mesure et densité de probabilité.
- Convergence monotone et lemme de Fatou.
- L'espace L^1 des fonctions intégrables.
- Théorème de convergence dominée dans L^1.
- Continuité et dérivabilité sous le signe somme.

Chapitre 4 : Produit d'espaces mesurés

- Mesure produit, définition.
- Théorème de Fubini et conséquences.

Le choix de deux séances de cours par semaine et d'une séance de travaux dirigés n'est pas fortuit, cela reflète le fait que le sujet que traite cette unité fondamentale indispensable est à la base et la source des fondements de l'analyse mathématique moderne qu'elle soit réelle ou fonctionnelle. Les différents aspects des options, algèbre- analyse- probabilité statistique, en dépendent principalement. Notons enfin, que ce polycopié ne représente nullement la copie élaborée et finale. Nous gardons cette tache ouverte, afin de développer progressivement ce cours avec la participation des étudiants.

A. Abdessemed
Septembre 2015.

1

Rappels sur les ensembles et applications

1.1 Préliminaires sur les concepts et définitions

Le concept d'ensemble résume en général une collection d'objets, de groupement ou de classe d'objets. Ces objets sont appelés les éléments de l'ensemble. Un ensemble E est bien défini si on a un critère claire qui permet d'affirmer si un objet a appartient ou non à E.

$$(a \in E) \vee (a \notin E)$$

Pour éviter les paradoxes de la théorie des ensembles (paradoxes de B.Russell), nous convenons qu'un être mathématique ne peut pas être à la fois un ensemble et un élément de cet ensemble, donc d'écrire $a \in a$. La collection de tous les ensembles n'est pas un ensemble. L'ensemble de tous les ensembles est une assertion paradoxale (B.Russell). Nous commençons par définir les propriétés usuelles sur les ensembles, nous avons :

$$E \subset F \Longleftrightarrow \forall x\,(x \in E \Longrightarrow x \in F)$$
$$E = F \Longleftrightarrow (E \subset F) \wedge (F \subset E)$$

$$E \neq F \Longleftrightarrow \left(E \nsubseteq F\right) \vee \left(F \nsubseteq E\right) \Longleftrightarrow \exists x\,(x \in E, x \notin F) \vee (x \in F, x \notin E)$$

Sur un ensemble E, souvent appelé **Réferenciel**, l'inclusion définie une relation d'ordre partiel. Rappelons les inclusions des ensembles usuels :

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

Le complémentaire d'une partie A de E est noté :

$$C_E A = E \diagdown A = E - A$$

on a immédiatement,

$$B=C_EA\Longleftrightarrow A=C_EB\ ;\ C_E\left(C_EA\right)=A\ ;\ C_EE=\varnothing\ ;\ C_E\varnothing=E$$

l'ensemble des parties de E est noté $\mathscr{P}(E)$. Nous convenons que les ensembles sont notés par des lettres capitales, les élément d'un ensemble par les lettres minuscules. Ne pas confondre que $\mathscr{P}(E)$ est une **classe** ou **famille** d'ensembles, c'est à dire un ensemble d'ensembles. Nous convenons particuliérement pour les classes d'ensembles de noter leurs éléments par des lettres majuscules, c'est une exeption que nous admettons. Cela nous permet de distinguer entre les classes, les éléments d'une classe et les éléments d'un élément d'une classe. Résumons cela en notant que :

$$\begin{aligned}
&[1]: A\subset E\Longleftrightarrow A\in\mathscr{P}(E)\\
&[2]: a\in E\Longleftrightarrow\{a\}\subset E\Longleftrightarrow\{a\}\in\mathscr{P}(E)\\
&[3]: \forall E\ ,\varnothing\in\mathscr{P}(E)\ ,E\in\mathscr{P}(E)
\end{aligned}$$

Pour l'intersection, on a la définition courante :

$$x\in E\cap F\Longleftrightarrow(x\in E\wedge x\in F)$$

les opérations de réunion et d'intersection sont associatives, chacune est distributive par rapport à l'autre ;

$$\begin{aligned}
A\cap(B\cup C)&=(A\cap B)\cup(A\cap C)\\
A\cup(B\cap C)&=(A\cup B)\cap(A\cup C)
\end{aligned}$$

$$A\cap A=A\ ;\ A\cap\varnothing=\varnothing\ ;\ A\cup A=A\ ;\ A\cup\varnothing=A$$

Toutes ces propriétés sont déduites à partir des définitions de l'intersection et de la réunion. On démontre aussi les propriétés suivantes, dites lois de De-Morgan,

$$\begin{aligned}
C_E(A\cup B)&=\left(C_EA\right)\cap\left(C_EB\right)\\
C_E(A\cap B)&=\left(C_EA\right)\cup\left(C_EB\right)
\end{aligned}$$

Généralement, lorsqu'on est muni d'un référentiel E, C_EA est noté CA ou simplement $\overline{A}$, les définitions deviennent,

$$E-A=E\cap C_EA=CA=\overline{A}$$

on peut aussi définir la différence entre deux ensembles E et F arbitraires, donnée par,

$$E-F=E-(E\cap F)=\{x\diagup x\in E\wedge x\notin F\}$$

donc il faut bien distinguer si on est en présence d'un référentiel ou non. Si A et B sont des éléments de $\mathscr{P}(E)$, donc en présence d'un référentiel, alors,

$$B - A = B \cap C_E A = B \cap \overline{A}$$

Soient A et B deux ensembles, le produit Cartésien de A et B est l'ensemble des couples (x, y) défini par,

$$A \times B = \{(x, y) \,/\, x \in A \wedge y \in B\}$$

dans l'ensemble $A \times B$ on a,

$$\begin{array}{c} (x, y) = (x', y') \Longleftrightarrow (x = x' \wedge y = y') \\ (x, y) \neq (x', y') \Longleftrightarrow (x \neq x' \vee y \neq y') \end{array}$$

ne pas confondre cependant, $(x, y) \in A \times B$ et $\{x, y\} \in \mathscr{P}(A \cup B)$, en général on a aussi la non commutativité du produit cartésien $A \times B \neq B \times A$. Quelques propriétés usuelles sont,

$$\begin{array}{c} (A' \subset A \wedge B' \subset B) \Longrightarrow (A' \times B' \subset A \times B) \\ (C \neq \varnothing \,,\, A \times C = B \times C) \Longrightarrow A = B \end{array}$$

$$\begin{array}{c} A \times B = \varnothing \Longleftrightarrow (A = \varnothing \vee B = \varnothing) \\ A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C) \\ A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C) \end{array}$$

de la même façon sont définis les triplets (x, y, z) et les produits à l'ordre $n \in \mathbb{N}$, de l'associativité on peut écrire,

$$A \times B \times C = (A \times B) \times C = A \times (B \times C)$$

en particulier, on a les notations, $A \times A = A^2, A \times A \times A = A^3$ et ainsi $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3, \mathbb{R}^n, n \in \mathbb{N}$. Revenons maintenant aux ensembles dans lesquels on défini aussi l'opération dite **différence symétrique**,

$$A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$$

quelques propriétés sont,

$$\begin{array}{l} [1] : A \Delta A = \varnothing \\ [2] : A \Delta B = \overline{A} \Delta \overline{B} \\ [3] : A \Delta (B \Delta C) = (A \Delta B) \Delta C \quad \text{associativité} \end{array}$$

On aura aussi besoin par la suite des réunions et intersections quelconques d'ensembles, pour simplifier nous considérons d'abords les cas finis définis par,

$$\overset{n}{\underset{i=1}{\cup}} A_i = \{x \in E / \exists i, 1 \leq i \leq n \, , x \in A_i\}$$
$$\overset{n}{\underset{i=1}{\cap}} A_i = \{x \in E / x \in A_i \, , \forall 1 \leq i \leq n\}$$

et dénombrables définis par,

$$\overset{\infty}{\underset{n=1}{\cup}} A_i = \underset{n \in \mathbb{N}^*}{\cup} A_n = \{x \in E / \exists n \in \mathbb{N}^* \, , x \in A_n\}$$
$$\overset{\infty}{\underset{n=1}{\cap}} A_i = \underset{n \in \mathbb{N}^*}{\cap} A_n = \{x \in E / \forall n \in \mathbb{N}^* \, , x \in A_n\}$$

Les propriétés de distributivité deviennent,

$$B \cap \left(\underset{n \in \mathbb{N}}{\cup} A_n \right) = \underset{n \in \mathbb{N}}{\cup} (B \cap A_n)$$
$$B \cup \left(\underset{n \in \mathbb{N}}{\cap} A_n \right) = \underset{n \in \mathbb{N}}{\cap} (B \cup A_n)$$

les lois de De-Morgan aussi,

$$\overline{\underset{n \in \mathbb{N}}{\cup} A_n} = C \left(\underset{n \in \mathbb{N}}{\cup} A_n \right) = \underset{n \in \mathbb{N}}{\cap} (C A_n) = \underset{n \in \mathbb{N}}{\cap} \overline{A_n}$$
$$\overline{\underset{n \in \mathbb{N}}{\cap} A_n} = C \left(\underset{n \in \mathbb{N}}{\cap} A_n \right) = \underset{n \in \mathbb{N}}{\cup} (C A_n) = \underset{n \in \mathbb{N}}{\cup} \overline{A_n}$$

1.2 Ensembles et applications

Soient A et B deux ensembles arbitraires, une application f de A dans B est par définition une correspondance qui à tout élément x de A fait correspondre un élément **unique** y de B. Les applications sont souvent appelées fonctions. Soit,

$$f : \begin{array}{c} E \longrightarrow F \\ x \longmapsto y = f(x) \end{array}$$

une application de E dans F et A un sous-ensemble de E. L'image de A par f est le sous-ensemble de F défini par,

$$f(A) = \{y \in F / \exists x \in A \, , \; y = f(x)\}$$
$$= \{f(x) \in F / x \in A\}$$

pour l'ensemble tout entier, $f(E)$ est appelé image de f. Si B est un sous-ensemble de F, l'image réciproque de B par f est défini par,

$$f^{-1}(B) = \{x \in E / f(x) \in B\}$$

parmi les propriétés de base des applications nous avons les suivantes,

$$\begin{aligned}
&[1] : A \subset B \Longrightarrow f(A) \subset f(B) \\
&[2] : f(A \cup B) = f(A) \cup f(B) \\
&[3] : f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B) \\
&[4] : A \subset f^{-1}(f(A))
\end{aligned} \tag{1.1}$$

cela étant pour l'image directe ; pour l'image réciproque on a,

$$\begin{aligned}
&[1] : X \subset Y \Longrightarrow f^{-1}(X) \subset f^{-1}(Y) \\
&[2] : f^{-1}(X \cup Y) = f^{-1}(X) \cup f^{-1}(Y) \\
&[3] : f^{-1}(X \cap Y) = f^{-1}(X) \cap f^{-1}(Y) \\
&[4] : f\left(f^{-1}(Y)\right) \subset Y
\end{aligned} \tag{1.2}$$

les sous-ensembles A, B, X, Y sont respectivement dans E et F. Nous laissons les démonstrations de ces propriétés comme exercices ; elles sont déduites des définitions données plus haut des images directes et réciproques. On retrouvera beaucoups de détails sur les ensembles et les applications dans les recueils standards d'analyse et d'algébre de premiére année. Une application f de E sur F est bijective si elle est a la fois surjective et injective ; dans ce cas on dit que E et F sont équipotents et possédent le même cardinal. Soit une bijection f de E sur F alors $\forall y \in F$, l'équation $f(x) = y$ admet une solution unique, de ce fait une bijection est exprimée par,

$$\forall y \in F, \exists! x \in E / y = f(x)$$

si f est une bijection alors la fonction réciproque f^{-1} existe et est aussi une bijection :

$$E \xrightarrow{f} F \ , \ F \xrightarrow{f^{-1}} E$$

$$\forall x \in E, \forall y \in F, \left(y = f(x) \Longleftrightarrow x = f^{-1}(y)\right)$$

Rappelons aussi que la composition $(g \circ f)$ de fonctions est associative mais non commutative avec la propriété suivante,

Proposition 1.2.1 *Soient f et g deux applications définies respectivement de A dans B et de B dans C, alors*

1. *Si f et g sont surjectives (resp injectives) alors $(g \circ f)$ est surjective (resp injective).*
2. *Si f et g sont des bijections alors $(g \circ f)$ est une bijection, en particulier,*

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$$

On a le diagramme,

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$$

$$A \longmapsto g \circ f \longmapsto C$$

Dans la théorie de la mesure et de l'integration on utilise souvent les familles d'ensembles finies et dénombrables, dans certaines situations on rencontre des reunions et intersections non-dénombrables. De ce fait les propriétés des applications données dans les équations 1.1 et 1.2 restent valables pour les collections arbitraires d'ensembles, finies, dénombrables ou non ; comme exemple on a,

$$[1] : f\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f(A_n)$$
$$[2] : f\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \subset \bigcap_{n\in\mathbb{N}} f(A_n)$$

et aussi,

$$[1] : f^{-1}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\right) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f^{-1}(B_n)$$
$$[2] : f^{-1}\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n\right) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} f^{-1}(B_n)$$

les suites d'ensembles $\{A_n\}$ et $\{B_n\}$ étant respectivement dans E et F. Notons aussi que les assertions strictes dans les propriétés 1.1 et 1.2 sont formelles, les identitées ou égalités sont obtenues uniquement sous certaines conditions, que nous résumons içi ;

$$[a] : \forall A \in \mathscr{P}(E),\ f^{-1}(f(A)) = A \Longleftrightarrow f \text{ est injective}$$
$$[b] : \forall B \in \mathscr{P}(F),\ f\left(f^{-1}(B)\right) = B \Longleftrightarrow f \text{ est surjective}$$
$$[c] : \forall A, B \in \mathscr{P}(E),\ f(A \cap B) = f(A) \cap f(B) \Longleftrightarrow f \text{ est injective}$$
$$[d] : \forall A \in \mathscr{P}(E),\ f\left(\overline{A}\right) = \overline{f(A)} \Longleftrightarrow f \text{ est injective}$$

Nous recommondons pour une littérature extensive sur les ensembles et applications les références standards d'algébre et analyse de premiére année.

1.3 Les limites supérieures et inférieures

On utilise souvent en théorie de la mesure et intégration les symboles $(+\infty)$ et $(-\infty)$, qui représentent des mesures infiniment grandes, orientées positivement ou négativement. On rencontre ces symboles dans les ensembles non-bornés, via l'évaluation des bornes supérieures et inférieures $\inf A$ et $\sup A$; dans les suites et series numériques divergentes et les fonctions non-bornées. En mesure on rencontre les ensembles de mesure infinie. Beaucoup de résultats fondamentaux de cette théorie restent valables pour cette classe d'objets, fonctions et ensembles, exprimant un comportement infiniment grand. Pour ces raisons la droite numérique $\mathbb{R}$ est étendue à la droite achevée $\overline{\mathbb{R}}$. Donc, $\overline{\mathbb{R}}$ est le corps totalement ordonné Archimédien et complet $\mathbb{R}$, auquel on a associé les deux élément $(+\infty)$ et $(-\infty)$, avec les propriétés suivantes,

$$[1] : \forall x \in \mathbb{R};\ -\infty < x < +\infty$$
$$[2] : \forall x \in \mathbb{R};\ x + (\pm\infty) = (\pm\infty) + x = \pm\infty$$
$$[3] : (\pm\infty) + (\pm\infty) = \pm\infty$$
$$[4] : (\pm\infty) \times (\pm\infty) = +\infty\ ,\ (\pm\infty) \times (\mp\infty) = -\infty$$
$$[5] : x.(\pm\infty) = (\pm\infty).x = \begin{cases} \pm\infty\ ,\ x > 0 \\ 0\ ,\ x = 0 \\ \mp\infty\ ,\ x < 0 \end{cases}$$

dans la relation $[5]$ la définition de $(\pm\infty).x = 0$ pour $x = 0$ est donnée dans le sense algébrique et non analytique ! nous reviendrons sur ce détail au fur et à mesure que nous avonçons dans nôtre étude. La droite achevée $\overline{\mathbb{R}}$ est muni de la topologie ordinaire définie par les ouverts de la forme $[-\infty, a[\ ,\ ]a, b[\ ,\ ]b, +\infty]$ et de leurs réunions. Cette dernière induit sur $\mathbb{R}$ la topologie ordinaire définie par les ouverts de la forme $]-\infty, a[\ ,\ ]a, b[\ ,\ ]b, +\infty[$ et de leurs réunions, finies dénombrables ou non. Formellement on écrit,

$$\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty] = \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}\ ;\ [a, +\infty] = [a, +\infty[\cup \{+\infty\}$$

D'aprés ces définitions une suite numérique $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ **monotone** dans $\overline{\mathbb{R}}$ est convergente. D'aprés les résultats classiques sur les suites, on peut écrire,

$$[a] : \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \text{ croissante} \Longrightarrow \lim_{n\longrightarrow\infty} x_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} (x_n) = l\ ,\ l \in \overline{\mathbb{R}}$$
$$[b] : \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \text{ décroissante} \Longrightarrow \lim_{n\longrightarrow\infty} x_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} (x_n) = l'\ ,\ l' \in \overline{\mathbb{R}}$$

les propriétés $[a]$ et $[b]$ expriment la convergence dans $\overline{\mathbb{R}}$.

Définition 1.3.1 *Soit $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbb{R}$, la limite supérieure de $\{x_n\}$ notée $\overline{\lim} x_n$ est définie par :*

$$\overline{\lim} x_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} \left(\sup_{k\geq n} (x_k) \right)$$

Si on pose,

$$y_n = \sup_{k\geq n} (x_k) \ , \ n \in \mathbb{N}$$

alors $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathbb{R}$; nous savons que,

$$A \subseteq B \Longrightarrow \sup A \leq \sup B$$

de cette propriété nous déduisons que $\{y_n\}$ est une suite décroissante dans $\mathbb{R}$. D'aprés ce qui précéde elle est convergente dans $\overline{\mathbb{R}}$, donc, $\overline{\lim} x_n$ existe et $\overline{\lim} x_n \in \overline{\mathbb{R}}$. De la même façon, nous avons :

Définition 1.3.2 *La limite inférieure de $\{x_n\}$ notée par $\underline{\lim} x_n$ est définie par :*

$$\underline{\lim} x_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} \left(\inf_{k\geq n} (x_k) \right)$$

Si on pose,

$$z_n = \inf_{k\geq n} (x_k) \ , \ n \in \mathbb{N}$$

alors $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathbb{R}$; comme,

$$A \subseteq B \Longrightarrow \inf A \geq \inf B$$

pour ce cas on déduit que $\{z_n\}$ est une suite croissante dans $\mathbb{R}$, en particulier elle est convergente dans $\overline{\mathbb{R}}$; d'où $\underline{\lim} x_n$ existe dans la droite achevée et $\underline{\lim} x_n \in \overline{\mathbb{R}}$. On peut résumer cela en écrivant,

$$\overline{\lim} x_n = \lim_{n\longrightarrow\infty} y_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} y_n$$
$$\underline{\lim} x_n = \lim_{n\longrightarrow\infty} z_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} z_n$$

Exemple 1.3.1 *soit la suite définie par $x_n = \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)$, $n \in \mathbb{N}$. un calcul directe donne :*

$$y_n = \sup_{k\geq n} (x_k) = 1 \ , \forall n \in \mathbb{N} \Longrightarrow \overline{\lim} x_n = \lim_{n\longrightarrow\infty} y_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} y_n = 1$$

de même,

$$z_n = \inf_{k\geq n} (x_k) = -1 \ , \forall n \in \mathbb{N} \Longrightarrow \underline{\lim} x_n = \lim_{n\longrightarrow\infty} z_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} z_n = -1$$

Etablissons maintenant les quelques propriétés usuelles des limites supérieure et inférieure ;

Proposition 1.3.1 *Soit* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$, *une suite numérique, alors :*

$$\underline{\lim} x_n \leq \overline{\lim} x_n$$

Preuve. Pour tout $n, m \in \mathbb{N}$, soit $k_0 \geq \max(n, m)$, alors,

$$x_{k_0} \leq \sup_{k\geq m}(x_k)$$

et

$$x_{k_0} \geq \inf_{k\geq n}(x_k)$$

d'où,

$$\forall n, m \in \mathbb{N};\ \exists k_0 \geq \max(n, m) \,/\, \inf_{k\geq n}(x_k) \leq x_{k_0} \leq \sup_{k\geq m}(x_k)$$

nous déduisons,

$$\forall n, m \in \mathbb{N};\ \inf_{k\geq n}(x_k) \leq \sup_{k\geq m}(x_k)$$

pour l'indice $n \in \mathbb{N}$ fixé, on a alors, de la définition de la borne inférieure,

$$\inf_{k\geq n}(x_k) \leq \sup_{k\geq m}(x_k) \ ,\ \forall m \in \mathbb{N}$$

$$\Longrightarrow \inf_{k\geq n}(x_k) \leq \inf_{m\in\mathbb{N}}\left(\sup_{k\geq m}(x_k)\right)$$

l'indice $n \in \mathbb{N}$ étant arbitraire, alors,

$$\inf_{k\geq n}(x_k) \leq \overline{\lim} x_n \ ,\ \forall n \in \mathbb{N}$$

d'une maniére similaire, de la définition de la borne supérieure on obtient,

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\left(\inf_{k\geq n}(x_k)\right) \leq \overline{\lim} x_n$$

ce qui établi le résultat. ■

Proposition 1.3.2 *Soient* $\{x_n\}$ *et* $\{y_n\}$ *deux suites dans* $\mathbb{R}$, *alors :*

1. $\overline{\lim} x_n = -\underline{\lim}(-x_n)$
2. $\underline{\lim} x_n + \underline{\lim} y_n \leq \underline{\lim}(x_n + y_n)$
3. $\overline{\lim}(x_n + y_n) \leq \overline{\lim} x_n + \overline{\lim} y_n$

Preuve. Des relations usuelles suivantes sur les bornes sup et inf,

$$\sup_{k\geq n}(-x_k) = -\inf_{k\geq n}(x_k) \Longleftrightarrow \inf_{k\geq n}(-x_k) = -\sup_{k\geq n}(x_k)$$

nous déduisons,

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\left(\inf_{k\geq n}(-x_k)\right) = \sup_{n\in\mathbb{N}}\left(-\sup_{k\geq n}(x_k)\right) = -\inf_{n\in\mathbb{N}}\left(\sup_{k\geq n}(x_k)\right)$$
$$\Longrightarrow \overline{\lim} x_n = -\underline{\lim}(-x_n)$$

cela établi $[1]$, la démonstration de la propriété $[2]$ repose sur la caractérisation de la borne supérieure, nous la laissons comme exercice parmi la collection des exercices à traiter ; pour $[3]$ en utilisant les relations $[1]$ et $[2]$ nous avons,

$$\underline{\lim}(-x_n) + \underline{\lim}(-y_n) \leq \underline{\lim}(-x_n - y_n) \Longrightarrow$$
$$-\underline{\lim}(-x_n) - \underline{\lim}(-y_n) \geq -\underline{\lim}(-x_n - y_n) \Longrightarrow$$
$$\overline{\lim} x_n + \overline{\lim} y_n \geq \overline{\lim}(x_n + y_n)$$

la preuve est compléte. ■

Comme pour les bornes supérieure et inférieure, la caractérisations des limites supérieure et inférieures existe aussi, nous avons les résultas suivants,

Proposition 1.3.3 (caractérisation de la limite supérieure) *Soit* $\{x_n\} \subset \mathbb{R}$ *une suite réelle et* $l \in \mathbb{R}$, *alors :*

$$\overline{\lim} x_n = l \Longleftrightarrow \begin{cases} [\mathbf{a}] : \forall\varepsilon > 0, \exists n \in \mathbb{N} / \forall k \in \mathbb{N}, k \geq n \Longrightarrow x_k < l + \varepsilon \\ [\mathbf{b}] : \forall\varepsilon > 0, \forall n \in \mathbb{N}, \exists k \in \mathbb{N}, \ k \geq n \ / \ x_k > l - \varepsilon \end{cases}$$

Preuve. Necessité, assumons que, $\overline{\lim} x_n = l$, alors :

$$\inf_{n\in\mathbb{N}}(y_n) = l \ \text{ avec } \ y_n = \sup_{k\geq n}(x_k)$$

de la caractérisation de la borne inférieure, on a,

$$\forall\varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} / \ l \leq y_{n_0} < l + \varepsilon$$
$$\Longrightarrow \sup_{k\geq n_0}(x_k) < l + \varepsilon \Longrightarrow \forall k \geq n_0, \ x_k < l + \varepsilon$$

donc,

$$\forall\varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \ \forall k \geq n_0 \Longrightarrow x_k < l + \varepsilon$$

cela établit $[\mathbf{a}]$, d'autre part,

$$\begin{aligned} \inf_{n\in\mathbb{N}} (y_n) = l &\Longrightarrow \forall \varepsilon > 0, \forall n \in \mathbb{N},\ y_n > l - \varepsilon \\ &\Longrightarrow \sup_{k\geq n} (x_k) > l - \varepsilon \Longrightarrow \exists k \geq n \text{ telque } x_k > l - \varepsilon \end{aligned}$$

et $[\mathbf{b}]$ est déduite. Réciproquement, d'aprés la propriété $[\mathbf{a}]$, on a :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ telque } y_{n_0} = \sup_{k\geq n_0} (x_k) < l + \varepsilon$$

nous déduisons,

$$\inf_{n\in\mathbb{N}} \left(\sup_{k\geq n} (x_k) \right) \leq \sup_{k\geq n_0} (x_k) \Longrightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \overline{\lim} x_n < l + \varepsilon$$

epsilon étant arbitraire, un passage à la limite donne,

$$\overline{\lim} x_n \leq l$$

ensuite à partir de $[\mathbf{b}]$ on a,

$$\begin{aligned} &\forall \varepsilon > 0, \forall n \in \mathbb{N},\ \exists k \geq n /\ x_k > l - \varepsilon \\ &\Longrightarrow \forall \varepsilon > 0, \forall n \in \mathbb{N},\ \sup_{k\geq n} (x_k) > l - \varepsilon \end{aligned}$$

finalement, de la définition de la borne supérieure on déduit,

$$\forall \varepsilon > 0,\ \inf_{n\in\mathbb{N}} \left(\sup_{k\geq n} (x_k) \right) > l - \varepsilon$$

epsilon étant arbitraire, alors :

$$\overline{\lim} x_n \geq l$$

cela achéve la démonstration. ■

De la même manière, nous avons la caractérisation de la limite inférieure que nous proposons comme exercice.

Proposition 1.3.4 (caractérisation de la limite inférieure) *Soit* $\{x_n\} \subset \mathbb{R}$ *une suite réelle et* $l \in \mathbb{R}$, *alors :*

$$\underline{\lim} (x_n) = l \Longleftrightarrow \begin{cases} [\mathbf{a}] : \forall \varepsilon > 0, \exists n \in \mathbb{N} / \forall k \in \mathbb{N}, k \geq n \Longrightarrow x_k > l - \varepsilon \\ [\mathbf{b}] : \forall \varepsilon > 0, \forall n \in \mathbb{N},\ \exists k \in \mathbb{N}\ ,\ k \geq n \ /\ x_k < l + \varepsilon \end{cases}$$

Preuve. Exercice. ∎

Maintenant, moyennant les résultats précédents Prop1.3.3 et Prop1.3.4 on démontre le résultat fondamental suivant ; que pour les suites convergentes dans $\mathbb{R}$ les limites supérieure et inférieure existent et sont en effet identiques.

Proposition 1.3.5 *Soit $\{x_n\}$ une suite numérique donnée, alors :*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = l \text{ , } l \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow \overline{\lim} x_n = \underline{\lim}\left(x_n\right) = l$$

Preuve. Nécessité, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l$ implique ,

$$\begin{aligned}
&\forall \varepsilon > 0, \exists n \in \mathbb{N} \diagup \forall k \geq n \Longrightarrow \left|x_k - l\right| < \varepsilon \\
&\quad \Longrightarrow l - \varepsilon < x_k < l + \varepsilon \\
&\quad \Longrightarrow l - \varepsilon < \inf_{k\geq n}\left(x_k\right) \leq \sup_{k\geq n}\left(x_k\right) < l + \varepsilon \\
&\quad \Longrightarrow \forall \varepsilon > 0,\ l - \varepsilon < \sup_{\mathbb{N}}\left(\inf_{k\geq n}\left(x_k\right)\right) \leq \inf_{\mathbb{N}}\left(\sup_{k\geq n}\left(x_k\right)\right) < l + \varepsilon
\end{aligned}$$

dans la derniére ligne nous avons utilisé Prop1.3.1, un passage à la limite quand $\varepsilon \longrightarrow 0$ donne alors l'égalité. Réciproquement, assumons que $\overline{\lim} x_n = \underline{\lim}\left(x_n\right) = l$, d'aprés les Prop1.3.3 et Prop1.3.4 de caractérisation on a,

$$\begin{aligned}
\overline{\lim} x_n = l &\Longrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \diagup \forall k \geq n_0 \Longrightarrow x_k < l + \varepsilon \\
\underline{\lim} x_n = l &\Longrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_1 \in \mathbb{N} \diagup \forall k \geq n_1 \Longrightarrow x_k > l - \varepsilon
\end{aligned}$$

et en résumé,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_2 = \max\left(n_0, n_1\right) \in \mathbb{N} \diagup \forall k \geq n_2 \Longrightarrow \left|x_k - l\right| < \varepsilon$$

cela exprime la convergence de $\{x_n\}$ et $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l$. ∎

1.4 Les limites sup et inf des suites de fonctions

Considérons le couple d'objets (X, τ), l'ensemble X étant arbitraire et τ une topologie définie sur X, le couple (X, τ) est appelé espace topologique. Une topologie τ est par définition une famille ou classe d'ensembles incluse dans $\mathscr{P}(X)$, stable pour les intersections finies et les réunions finies dénombrables ou non. Les éléments de la classe τ qui sont des sous-ensembles de X sont par définition appelés ensembles ouverts de X. Nous ne ferons point de l'analyse situs ou topologie comme cette théorie le demande pour rester dans le programme de licence de

LMD. Cependant, certains concepts de base et fondamentaux de topologie sont indispensables pour la théorie de la mesure et de l'intégration. Nous introduirons ces derniers au fur et à mesure que nous avonçons dans nôtre analyse. Moyennant l'exemple concret de la topologie ordinaire définie sur la droite réelle $\mathbb{R}$ que nous définirons plus loin et que nous utiliserons souvent ; les définitions abstraites et formelles des concepts topologiques deviennent de ce fait beaucoup plus souples et intelligibles.

Définition 1.4.1 *Soit (X, τ) un espace topologique et $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions réelles définies sur X. La limite supérieure est définie par la fonction $f(x) = \overline{\lim} f_n(x)$ et la limite inférieure de $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par $g(x) = \underline{\lim} f_n(x)$.*

Soit maintenant la fonction,

$$f : \begin{array}{l} X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}} \\ x \longmapsto f(x) \end{array}$$

Pour tout voisinage ouvert U de x_0, on considére le voisinage ouvert perforé $U \setminus \{x_0\} \subset X$. On définit ensuite les éléments réels :

$$M(U \setminus \{x_0\}) = \sup\{f(x) \; ; x \in U \setminus \{x_0\}\}$$
$$m(U \setminus \{x_0\}) = \inf\{f(x) \; ; x \in U \setminus \{x_0\}\}$$

Définition 1.4.2 *Les limites supérieures et inférieures de la fonction f au point $x_0 \in X$ sont définies par,*

$$\overline{\lim_{x\to x_0}} f(x) = \inf\{M(U \setminus \{x_0\}) \; ; U \in \mathcal{V}(x_0)\}$$
$$\underline{\lim}_{x\to x_0} f(x) = \sup\{m(U \setminus \{x_0\}) \; ; U \in \mathcal{V}(x_0)\}$$

Telque $\mathcal{V}(x_0)$ est la famille de tous les voisinages ouverts du point x_0 dans l'espace topologique X. Dans le cas concret de $X = \mathbb{R}$, l'ensemble des réels est muni de la topologie usuelle (ordinaire), dans laquelle la base de voisinages ouverts d'un point $x_0 \in \mathbb{R}$ est donnée par,

$$\mathcal{V}(x_0) = \{U_r \; ; \; r > 0\}$$

où U_r sont les voisinages ouverts de x_0 définis par les intervalles ouverts,

$$U_r = U_r(x_0) = \left\{x \in \mathbb{R} \,/\, |x - x_0| < r\right\}, \; r > 0$$

Dans ce cas les limites supérieures et inférieures sont données par,

$$\overline{\lim_{x\to x_0}} f(x) = \inf_{r>0}\left(\sup_{0<|x-x_0|<r} f(x)\right)$$
$$\underline{\lim_{x\to x_0}} f(x) = \sup_{r>0}\left(\inf_{0<|x-x_0|<r} f(x)\right)$$

quelques propriétés sont les suivantes,

Proposition 1.4.1 *Nous avons les relations suivantes,*

$$[\mathbf{i}] : \underline{\lim_{x\to x_0}} f(x) \leq \overline{\lim_{x\to x_0}} f(x)$$
$$[\mathbf{ii}] : \lim_{x\to x_0} f(x) = l \ ;\ l \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow \underline{\lim_{x\to x_0}} f(x) = \overline{\lim_{x\to x_0}} f(x) = l$$

Preuve. Exercice. ■

De cette proposition nous déduisons ainsi que,

Corollaire 1.4.1 *La fonction $f(x)$ est continue au point $x_0 \in X$ si et seulement si,*

$$\underline{\lim_{x\to x_0}} f(x) = \overline{\lim_{x\to x_0}} f(x) = f(x_0)$$

Preuve. Directe de Prop1.4.1. ■

Donc les limites supérieures et inférieures d'une fonction en un point sont liés au comportement continu ou non de cette fonction en ce point. Nous aurons par la suite besoin de la notion d'enveloppe supérieure et inférieure d'une fonction, que nous définissons par,

Définition 1.4.3 *Soit l'application $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ et $x_0 \in [a,b]$, l'enveloppe supérieure de f est la fonction $\theta(x_0)$ définie par,*

$$\theta(x_0) = \inf_{r>0}\left(\sup_{|x-x_0|<r} f(x)\right)$$

et l'enveloppe inférieure est la fonction $\varphi(x_0)$ définie par,

$$\varphi(x_0) = \sup_{r>0}\left(\inf_{|x-x_0|<r} f(x)\right)$$

Dans cette définition, les bornes supérieure et inférieure sont étendues aux voisinages ouverts $U_r(x_0)$ non perforés. Quelques propriétés de ces enveloppes sont données dans la proposition suivante,

Proposition 1.4.2 *Soit* $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *alors,*

$$[\mathbf{i}] : \forall x \in [a,b],\ \varphi(x) \leq f(x) \leq \theta(x)$$
$$[\mathbf{ii}] : \varphi(x) = \theta(x) \Longleftrightarrow \lim_{y \to x} f(y) = f(x)$$

Preuve. Notons en premier lieu que,

$$\inf_{|y-x|<r} f(y) \leq f(x)\ , \forall r > 0,\ \forall x \in [a,b]$$

en particulier,

$$\sup_{r>0}\left(\inf_{|x-x_0|<r} f(x)\right) \leq f(x)\ , \forall x \in [a,b]$$

d'où,

$$\varphi(x) \leq f(x)\ , \forall x \in [a,b]$$

le résultat pour $f(x) \leq \theta(x)$ est identique. Pour la propriété $[\mathbf{ii}]$, soit,

$$\varphi(x) = \sup\left(\inf_{|y-x|<r} f(y)\right)$$

étant donné que,

$$\inf_{|y-x|<r} f(y) = \min\left(f(x), \inf_{0<|y-x|<r} f(y)\right) \tag{1.3}$$
$$\Longrightarrow \varphi(x) = \min\left(f(x), \underline{\lim}_{y \to x} f(y)\right)$$

et d'une manière similaire,

$$\theta(x) = \max\left(f(x), \overline{\lim}_{y \to x} f(y)\right) \tag{1.4}$$

assumons maintenant que,

$$\varphi(x) = \theta(x)$$

des relations min et max obtenues plus haut nous aurons,

$$\overline{\lim}_{y \to x} f(y) \leq \theta(x) = \varphi(x) \leq \underline{\lim}_{y \to x} f(y)$$

en utilisant le $[\mathbf{i}]$ de la Prop1.4.1 nous obtenons alors,

$$\overline{\lim_{y\to x}} f(y) = \underline{\lim_{y\to x}} f(y) = \theta(x) = \varphi(x)$$

cependant d'aprés le $[\mathbf{i}]$ de cette proposition,

$$\theta(x) = \varphi(x) \Longrightarrow \theta(x) = \varphi(x) = f(x)$$

nous concluons donc,

$$\overline{\lim_{y\to x}} f(y) = \underline{\lim_{y\to x}} f(y) = f(x)$$

d'aprés le corollaire Cor1.4.1, la fonction $f(y)$ est continue au point $x \in [a,b]$, en particulier

$$\lim_{y\to x} f(y) = f(x)$$

Réciproquement, assumons que, $\lim_{y\to x} f(y) = f(x)$ d'aprés le même corollaire Cor1.4.1,

$$\overline{\lim_{y\to x}} f(y) = \underline{\lim_{y\to x}} f(y) = f(x)$$

alors en revenant aux equations 1.3 et 1.4 plus haut, nous déduisons clairement,

$$\theta(x) = \varphi(x) = f(x)$$

est la preuve est compléte. ■

Définition 1.4.4 (notion de Baire) *Soit X un espace topologique et $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$, on dit que f est semi-continue supérieurement au point $x_0 \in X$ si :*

$$\overline{\lim_{x\to x_0}} f(x) = f(x_0)$$

elle est semi-continue inférieurement au point $x_0 \in X$ si :

$$\underline{\lim_{x\to x_0}} f(x) = f(x_0)$$

1.5 Exercices

Exercice 1.5.1 *Etablir les propriétés suivantes sur la différence sumétrique,*

$$[1] : A\Delta A = \varnothing$$
$$[2] : A\Delta B = \overline{A}\Delta\overline{B}$$
$$[3] : A\Delta(B\Delta C) = (A\Delta B)\Delta C \quad \textit{associativité}$$

Exercice 1.5.2 *Démontrer les propriétes suivantes des images directes et réciproques des applications,*

$$\begin{aligned}
&[1] : A \subset B \Longrightarrow f(A) \subset f(B)\\
&[2] : f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)\\
&[3] : f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)\\
&[4] : A \subset f^{-1}(f(A))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&[1'] : X \subset Y \Longrightarrow f^{-1}(X) \subset f^{-1}(Y)\\
&[2'] : f^{-1}(X \cup Y) = f^{-1}(X) \cup f^{-1}(Y)\\
&[3'] : f^{-1}(X \cap Y) = f^{-1}(X) \cap f^{-1}(Y)\\
&[4'] : f\left(f^{-1}(Y)\right) \subset Y
\end{aligned}$$

Dans le td

Exercice 1.5.3 *Pour les identités strictes, monter que ;*

$$\begin{aligned}
&[a] : \forall A \in \mathcal{P}(E),\ f^{-1}(f(A)) = A \Longleftrightarrow f \text{ est injective}\\
&[b] : \forall B \in \mathcal{P}(F),\ f\left(f^{-1}(B)\right) = B \Longleftrightarrow f \text{ est surjective}\\
&[c] : \forall A, B \in \mathcal{P}(E),\ f(A \cap B) = f(A) \cap f(B) \Longleftrightarrow f \text{ est injective}\\
&[d] : \forall A \in \mathcal{P}(E),\ f\left(\overline{A}\right) = \overline{f(A)} \Longleftrightarrow f \text{ est injective}
\end{aligned}$$

Exercice 1.5.4 *Soit $f : E \longrightarrow F$ une application ; $\{A_i\}_{i\in I}$ et $\{B_i\}_{i\in I}$ des familles indexées respectivement d'éléments de $\mathcal{P}(E)$ et $\mathcal{P}(F)$; établir les propriétés suivantes :*

$$\begin{aligned}
&[1] : f\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \bigcup_{i\in I} f(A_i) \quad ; \quad f\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \subset \bigcap_{i\in I} f(A_i)\\
&[2] : f^{-1}\left(\bigcup_{i\in I} B_i\right) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(B_i) \quad ; \quad f^{-1}\left(\bigcap_{i\in I} B_i\right) = \bigcap_{i\in I} f^{-1}(B_i)\\
&[3] : A - \bigcap_{i\in I} B_i = \bigcup_{i\in I}(A - B_i) \quad ; \quad A - \bigcup_{i\in I} B_i = \bigcap_{i\in I}(A - B_i)\ ,\ A \in \mathcal{P}(E)\\
&[4] : f\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) = \bigcap_{i\in I} f(A_i) \Longleftrightarrow f \text{ est injective.}
\end{aligned}$$

Exercice 1.5.5 *Soit A un ensemble arbitraire appartenant à $\mathcal{P}(E)$. La fonction caractéristique de A est l'application $\chi_A : E \longrightarrow \{0,1\}$ définie par :*

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 \ , \ x \in A \\ 0 \ , \ x \notin A \end{cases}$$

Etablir alors les relations suivantes :

$$[a] : A \subseteq B \Longrightarrow \chi_A \leq \chi_B \ ; \ \ \chi_A = \chi_B \Longleftrightarrow A = B$$
$$[b] : \chi_A + \chi_{\overline{A}} = 1 \ ; \ \ \chi_{A\cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_A\chi_B$$
$$[c] : \chi_{\underset{i\in I}{\cap} A_i} = \prod_{i\in I} \chi_{A_i} \text{ déterminer ensuite } \chi_{\underset{i\in I}{\cup} A_i}$$
$$[d] : \chi_{A\Delta B} = \chi_A + \chi_B - 2\chi_A\chi_B$$

Exercice 1.5.6 *Démontrer les inégalités suivantes, $\{x_n\}$ et $\{y_n\}$ étant des suites réelles arbitraires :*

1. $\underline{\lim} x_n + \underline{\lim} y_n \leq \underline{\lim}\,(x_n + y_n)$
2. $\underline{\lim}\,(x_n + y_n) \leq \overline{\lim} x_n + \underline{\lim} y_n \leq \overline{\lim}\,(x_n + y_n)$
3. $\overline{\lim}\,(x_n + y_n) \leq \overline{\lim} x_n + \overline{\lim} y_n$

Exercice 1.5.7 *Soit $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}^*} \in \mathscr{P}(E)$ une suite dénombrables de sous-ensembles de E, on défini les limites supérieure et inférieure de la suite $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ par :*

$$\overline{\lim} A_n = \underset{n\geq 1}{\cap} \left(\underset{m\geq n}{\cup} A_m \right) \ \ \text{et} \ \ \underline{\lim} A_n = \underset{n\geq 1}{\cup} \left(\underset{m\geq n}{\cap} A_m \right)$$

Montrer alors les propriétés suivantes :

$$(1) : \underline{\lim} A_n \subseteq \overline{\lim} A_n$$
$$(2) : \underline{\lim} A_n \cap \overline{\lim} B_n \subset \overline{\lim} A_n \cap \overline{\lim} B_n$$
$$(3) : \underline{\lim} A_n \cap \overline{\lim} B_n \subset \overline{\lim}\,(A_n \cap B_n)$$

2 Les algèbres d'ensembles et la tribu Borélienne

D'abords nous commençons par définir et étudier les algèbres d'ensembles qui sont des classes ou familles d'ensembles muni de structure algèbrique, ensuite nous revenons à la topologie que nous avons déjas défini, qui est une structure analytique, pour enfin les associer dans la définition de la tribu Borélienne.

2.1 Les algèbres d'ensembles

Soit X un ensemble quelconque et $\mathscr{P}(X)$ l'ensemble des parties de X. Soit Σ une famille **non-vide** $\Sigma \neq \varnothing$ de sous-ensembles de X, autrement dit Σ est une classe d'ensembles qui verifie $\Sigma \subset \mathscr{P}(X)$.

Définition 2.1.1 *On dit que $\Sigma \neq \varnothing$ est une algèbre d'ensembles sur X si on a les propriétés,*

1. $\forall A \in \Sigma, \forall B \in \Sigma \Longrightarrow A \cup B \in \Sigma$
2. $\forall A \in \Sigma \Longrightarrow CA \in \Sigma$

Le complémentaire étant relativement à l'ensemble référenciel X, rappelons dans ce cas les notations,

$$C_X A = CA = \overline{A}\,,\ C_B A = B - A = B \cap \overline{A}$$

on démontre aisément les propriétés suivantes,

Proposition 2.1.1 *Soit Σ une algèbre sur X, alors :*

$$[1] : \{\varnothing\} \in \Sigma,\ X \in \Sigma$$
$$[2] : E_1, E_2, ...E_n \in \Sigma \Longrightarrow \bigcup_{i=1}^{n} E_i \in \Sigma\ ,\ n \in \mathbb{N}$$
$$[3] : E_i \in \Sigma\ , 1 \leq i \leq n \Longrightarrow \bigcap_{i=1}^{n} E_i \in \Sigma$$
$$[4] : E_1 \in \Sigma \text{ et } E_2 \in \Sigma \Longrightarrow E_1 - E_2 \in \Sigma$$

Preuve. $[1]$:sachant que $\Sigma \neq \varnothing$, alors,

$$\exists A \in \Sigma \Longrightarrow CA \in \Sigma \Longrightarrow A \cup CA = X \in \Sigma$$

encore Σ étant une algèbre,

$$X \in \Sigma \Longrightarrow CX = \varnothing \in \Sigma$$

$[2]$:c'est une réunion finie, on raisonne par induction sur l'indice $i \in \mathbb{N}, 1 \leq i \leq n$.

$$\bigcup_{i=1}^{n} E_i \in \Sigma$$

$[3]$:D'aprés les lois de De-Morgan,

$$\bigcap_{i=1}^{n} E_i = C\left(\bigcup_{i=1}^{n} CE_i\right) = \overline{\bigcup_{i=1}^{n} \overline{E_i}}$$

donc,

$$\bigcup_{i=1}^{n} E_i \in \Sigma \Longrightarrow \bigcap_{i=1}^{n} E_i \in \Sigma$$

$[4]$:par définition $E_1 - E_2 = E_1 \cap CE_2$, la famille Σ étant fermé sous les intersections finies d'aprés $[3]$, on a bien $E_1 - E_2 \in \Sigma$. ■

Les algèbres d'ensembles sont des classes ou familles **non-vides** d'ensembles femées sous les opérations de réunions, d'intersections finies et de complémentation.

Proposition 2.1.2 *Soit $\mathscr{C}$ une famille de sous-ensembles de X, $\mathscr{C} \subset \mathscr{P}(X)$, alors il existe une algèbre d'ensembles Σ sur X, contenant la famille $\mathscr{C}$ telque Σ soit la plus petite algèbre contenant la famille $\mathscr{C}$.*

Preuve. considerons la famille de toutes les algèbres qui contiennent la classe $\mathscr{C}$, notons la par $\mathscr{W}$, la famille $\mathscr{W}$ est non vide elle contient au moins $\mathscr{P}(X)$, $\mathscr{P}(X) \in \mathscr{W}$. Définissons ensuite la classe Σ par,

$$\Sigma = \bigcap_{\omega \in \mathscr{W}} \omega$$

la famille Σ est définie comme étant l'intersection de toutes les algèbres contenant la classe $\mathscr{C}$. Vérifions que Σ est une algèbre, clairement :

$$\forall A \in \Sigma, \forall B \in \Sigma \Longrightarrow A \in \omega \wedge B \in \omega, \ \forall \omega \in \mathscr{W}$$

les classes ω étant des algèbres, alors,

$$A \cup B \in \omega, \ \forall \omega \in \mathscr{W} \Longrightarrow A \cup B \in \Sigma$$

un raisonnement similaire implique,

$$\forall A \in \Sigma \Longrightarrow CA = \overline{A} \in \Sigma$$

ainsi, Σ est une algèbre et par définition, c'est la plus petite algèbre contenant la famille $\mathscr{C}$. Autrement dit, si ω est une algèbre qui contient $\mathscr{C}$, alors $\omega \in \mathscr{W}$, et comme,

$$\bigcap_{\omega \in \mathscr{W}} \omega \subseteq \omega$$

alors nécessairement,

$$\Sigma \subseteq \omega$$

■

Définition 2.1.2 *La plus petite algèbre contenant la famille $\mathscr{C}$ est appelée, l'algèbre engendrée par la famille $\mathscr{C}$.*

Ainsi les algèbres d'ensembles sont à la base des classes arbitraires d'ensembles munies de structure élémentaire d'algèbre, cette derniére nous permet de manipuler les ensembles ou de faire du calcul **Booléen** par l'intermédiaire des opérations booléennes de réunion, intersection et complémentation, tout en gardant la nature interne des opérations. Autrement dit de manipuler les objets et en créer d'autres qui restent encore des éléments de la même classe. Nous verrons par la suite qu'il y a des classes d'ensembles qui ne sont pas des algèbres, comme par exemple une topologie τ, d'autres classes importantes dans nôtre analyse, que nous verrons plus loin ne possédent pas de structure d'algèbre ; de ce fait l'introduction du concept d'algèbre engendré par une classe devient important dans cette direction. Un résultat classique dont nous aurons besoin par la suite est le suivant.

Proposition 2.1.3 *Soit Σ une algèbre d'ensembles sur X, et $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite d'éléments de Σ. Alors il existe une suite $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ d'éléments de Σ deux à deux disjoints tel que,*

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

Preuve. Notons que, généralement les réunions dénombrables d'éléments de Σ ne sont pas nécessairement des éléments de Σ. Maintenant, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ posons,

$$B_1 = A_1,\ B_2 = A_2 \cap CA_1,\ B_3 = A_3 \cap CA_2 \cap CA_1$$

et par induction,

$$B_n = A_n \cap CA_{n-1} \cap CA_{n-2} \cap \ldots \cap CA_2 \cap CA_1$$

notons de la construction des B_n que nous avons,

$$B_n \in \Sigma,\ B_n \subseteq A_n \quad , \forall n \in \mathbb{N}^*$$

en particulier,

$$\overset{\infty}{\underset{n=1}{\cup}} B_n \subseteq \overset{\infty}{\underset{n=1}{\cup}} A_n$$

on a aussi, $\forall m, n \in \mathbb{N}^*;\ m \neq n$ et $m < n$,

$$B_n \cap B_m \subseteq A_m \cap B_n = A_m \cap A_n \cap CA_{n-1} \cap \ldots \cap CA_m \cap \ldots \cap CA_2 \cap CA_1 = \varnothing$$

on a le même raisonnement lorsque $m > n$. Les éléments B_n sont donc deux à deux disjoints,

$$\forall i, j \in \mathbb{N}^*,\ i \neq j \Longrightarrow B_i \cap B_j = \varnothing$$

Finalement, montrons que $\overset{\infty}{\underset{n=1}{\cup}} A_n \subseteq \overset{\infty}{\underset{n=1}{\cup}} B_n$, soit :

$$x \in \overset{\infty}{\underset{n=1}{\cup}} A_n$$

$$\Longrightarrow \exists n \in \mathbb{N}^* / x \in A_n$$

il est possible cependant que x appartienne à plusieurs A_n, pour cette raison posons,

$$n_0 = \min\left\{n \in \mathbb{N}^* / x \in A_n\right\}$$

cela implique,

$$x \in A_{n_0} \text{ et } x \notin A_{n_0-1},\ x \notin A_{n_0-2},\ \ldots, x \notin A_1$$

car sinon, si $x \in A_{n_0}$ et x appartient à l'un des A_{n_0-p}, cela contredirais la définition de n_0 comme étant le plus petit. En conclusion,

$$x \in A_{n_0} \cap CA_{n_0-1} \cap CA_{n_0-2} \cap\ \ldots \cap CA_1 = B_{n_0} \Longrightarrow x \in \underset{n \in \mathbb{N}^*}{\cup} B_n$$

cela achéve la démonstration. ■

2.2 Les tribus ou $\sigma-$algèbres

Jusqu'içi nous avons considéré un calcul booléen sur les ensembles en traitant les combinaisons d'ordre finies sur les éléments d'une algèbre exprimées par des réunions, intersections et complémentation d'ordre fini. cela étant au moins du point de vue algèbrique, mais du point de vue analytique cela est insuffisant, en raison des procédés et processus de prolongement analytiques et passages aux limites, qui requièrent des étapes d'ordre non fini et dénombrables parfois même de la puissance du continu non-dénombrable. Pour cela on introduit les classes dites Tribus ou $\sigma-$algèbres.

Définition 2.2.1 *La Tribu ou $\sigma-$algèbre Σ est une algèbre d'ensembles qui posséde la propriété d'additivité dénombrable,*

$$\forall \left\{A_n\right\}_{n\in\mathbb{N}^*} \in \Sigma \Longrightarrow \overset{\infty}{\underset{n=1}{\cup}} A_n \in \Sigma$$

De cette définition, on déduit aussi pour les intersections dénombrables,

$$\forall \left\{A_n\right\}_{n\in\mathbb{N}^*} \in \Sigma \Longrightarrow \overset{\infty}{\underset{n=1}{\cap}} A_n = C\left(\overset{\infty}{\underset{n=1}{\cup}} CA_n\right) \in \Sigma$$

les $\sigma-$algèbres sont donc des algèbres fermées ou stables sous les réunions, intersections dénombrables et la complémentation.

Exemple 2.2.1 *On a les exemples suivants,*

1. *L'ensemble des parties de X, $\mathscr{P}(X)$ est une $\sigma-$algèbre sur X, dite $\sigma-$algèbre triviale.*
2. *Si $X=\mathbb{N}^*$ et $\Sigma=\{\varnothing,\mathbb{N}^*,\{1,3,5,7,...\},\{2,4,6,8,...\}\}$ est une $\sigma-$algèbre sur $\mathbb{N}^*$.*
3. $\forall A\in\mathscr{P}(X)$, $\Sigma=\left\{\varnothing,X,A,\overline{A}\right\}$ *est une $\sigma-$algèbre sur X.*
4. *La classe ou famille τ des ouverts d'un espace topologique (X,τ) n'est pas une algèbre, (dites pourquoi ?).*

Proposition 2.2.1 *Soit $\mathscr{C}$ une famille de sous-ensembles de X, $\mathscr{C}\subset\mathscr{P}(X)$. Alors il existe une $\sigma-$algèbre d'ensembles Σ sur X, contenant la famille $\mathscr{C}$ telque Σ soit la plus petite $\sigma-$algèbre contenant la famille $\mathscr{C}$.*

Preuve. Identique à Prop2.1.2 pour les algèbres. ■

Définition 2.2.2 *La plus petite $\sigma-$algèbre contenant la famille $\mathscr{C}$ est appelée, la $\sigma-$algèbre engendrée par la famille $\mathscr{C}$.*

Les notations usuelles des algèbre et $\sigma-$algèbre engendrées par une famille $\mathscr{C}\subset\mathscr{P}(X)$ sont,

$$\mathscr{A}(\mathscr{C}) \text{ et } \sigma(\mathscr{C})$$

2.3 La tribu Borélienne

Soit X un espace topologique muni de la topologie τ, que l'on note par (X,τ) ou (X,τ_X). Rappelons que, une topologie τ_X sur X est une collection ou famille d'éléments de $\mathscr{P}(X)$ stable sous les réunions arbitraires dénombrables ou non et les intersections finies, les élément de la classe τ_X sont appelés les ensembles ouverts de l'espace topologique X. Une topologie n'est pas une algèbre et réciproquement. La topologie n'est pas fermée pour la complémentation, l'algèbre n'est pas fermée pour les réunions dénombrables.

Définition 2.3.1 *La Tribu Borélienne sur X, notée $\mathfrak{B}(X)$ est la $\sigma-$algèbre engendrée par la famille τ_X des ensembles ouverts de l'espace topologique X, on peut écrire,*

$$\mathfrak{B}(X)=\sigma(\tau_X)$$

Dans un espace topologique (X,τ_X) le complémentaire d'un ensemble ouvert $\mathscr{O}\in\tau_X$ est appelé ensemble fermé de X, noté $\mathscr{F}\in\mathscr{P}(X)$. De ce fait nous avons la propriété suivante sur l'identité des $\sigma-$algèbres engendrées par les classes des ouverts et des ensembles fermés d'un espace (X,τ_X).

Proposition 2.3.1 *La tribu Borélienne et la $\sigma-$algèbre engendrée par la famille des ensembles fermés de (X,τ_X) sont identiques.*

Preuve. Notons par τ_X et τ_X^c respectivement les familles d'ensembles ouverts et fermés de l'espace (X,τ_X), montrons que,

$$\tau_X^c\subset\sigma(\tau_X)$$

soit $F\in\tau_X^c$ un ensemble fermé, alors :

$$CF\in\tau_X\Longrightarrow CF\in\sigma(\tau_X)$$

la classe $\sigma(\tau_X)$ étant une algèbre, cela implique,

$$C(CF)=F\in\sigma(\tau_X)$$

d'où,

$$\tau_X^c\subset\sigma(\tau_X)$$

de cette inclusion, moyennant le fait que $\sigma(\tau_X^c)$ est la plus petite $\sigma-$algèbre contenant la famille τ_X^c, on a alors nécessairement,

$$\sigma(\tau_X^c)\subseteq\sigma(\tau_X)$$

de la même façon, on démontre pour la famille τ_X que,

$$\tau_X \subset \sigma\left(\tau_X^c\right)$$

étant donné que $\sigma\left(\tau_X\right)$ est la plus petite, on déduit alors ;

$$\sigma\left(\tau_X\right) \subseteq \sigma\left(\tau_X^c\right)$$

et l'identité est établie. ■

On résume donc en écrivant :

$$\mathfrak{B}(X) = \sigma\left(\tau_X\right) = \sigma\left(\tau_X^c\right)$$

que la tribu borélienne ou les tribus engendrées par les ouverts ou fermés d'un espace topologique sont identiques, selon les problémes posés et les applications en main on considére la tribu adéquate pour représenter la tribu Borélienne.

Définition 2.3.2 (concepts de Haussdorf) *Soit $\left(X, \tau_X\right)$ un espace topologique muni de la topologie τ_X, un sous-ensemble $E \in \mathscr{P}(X)$ est dit du type $\mathscr{G}_\delta$ si,*

$$E = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathscr{O}_n$$

où $\left\{\mathscr{O}_n\right\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite dénombrable d'ouverts de τ_X. Il est dit du type $\mathscr{F}_\sigma$ si,

$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathscr{F}_n$$

où $\left\{\mathscr{F}_n\right\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont des ensembles fermés de X, $\mathscr{F}_n \in \tau_X^c$.

D'aprés la définition, les ensembles du type $\mathscr{G}_\delta$ et $\mathscr{F}_\sigma$ sont des ensembles boréliens appartenant à la tribu Borélienne $\mathfrak{B}(X)$. Notons que, le complémentaire d'un $\mathscr{G}_\delta$ est un $\mathscr{F}_\sigma$ et réciproquement. De cette manière on peut définir par induction les ensembles suivants,

$$\mathscr{F}_{\sigma\delta} = \text{intersection dénombrable d'éléments du type } \mathscr{F}_\sigma$$
$$\mathscr{G}_{\delta\sigma} = \text{réunion dénombrable d'éléments du type } \mathscr{G}_\delta$$

et ainsi par induction les ensembles dy type,

$$\mathscr{F}_{\sigma\delta\sigma}\,, \mathscr{G}_{\delta\sigma\delta}\,, \mathscr{F}_{\sigma\delta\sigma\delta}\,, \mathscr{G}_{\delta\sigma\delta\sigma}\,, \ldots$$

ce sont tous des Boréliens appartenant à $\mathfrak{B}(X)$. Comme cas concret, prenons l'espace topologique $\left(\mathbb{R}, \tau_{\mathbb{R}}\right)$ muni de la topologie dite ordinaire ou usuelle. Soit

$x_0 \in \mathbb{R}$ un point de $\mathbb{R}$, rappelons que la boule ouverte que nous avons défini dans la section(?) et noté $U_r\left(x_0\right)$, de centre x_0 et de rayon $r > 0$ est l'ensemble,

$$B_r\left(x_0\right) = \left\{x \in \mathbb{R} / \ \left|x - x_0\right| < r\right\}$$

Dans l'espace $\mathbb{R}$ qui est une droite, $B_r\left(x_0\right)$ est un intervalle ouvert $B_r\left(x_0\right) = \left]x_0 - r, x_0 + r\right[$, $r > 0$. Un ensemble $\mathscr{V} \subseteq \mathbb{R}$ est dit ouvert si,

$$\forall x \in \mathscr{V},\ \exists r > 0 / B_r(x) \subseteq \mathscr{V}$$

c'est exactement cette famille $\mathscr{V}$ qui définie la topologie $\tau_{\mathbb{R}}$ de $\mathbb{R}$.

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ et V un sous-ensemble de $\mathbb{R}$, on dit que V est un voisinage ouvert de x_0 que l'on note $V\left(x_0\right)$ si,

$$\exists B_r\left(x_0\right),\ r > 0 / B_r\left(x_0\right) \subseteq V\left(x_0\right)$$

Un résultat fondamental qui nous donne les **Bases** d'ouverts dénombrables pour la topologie usuelle $\tau_{\mathbb{R}}$ de $\mathbb{R}$ est le théorème de Lindelöf suivant,

Théorème 2.3.1 (Lindelöf) *Soit $\left\{O_\alpha\right\}_{\alpha \in \Lambda}$ une famille arbitraire d'ouverts de $\mathbb{R}$ (non-dénombrable), alors il existe une famille dénombrable d'ouverts O_n deux à deux disjoints tel que,*

$$\bigcup_{\alpha \in \Lambda} O_\alpha = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} O_n$$

Preuve. a faire ! ■

QUELQUE REMARQUES ET COMMENTAIRES !

Rajoutons que dans $\mathbb{R}$, les ensembles fermés $F \in \tau_{\mathbb{R}}^c$ sont les parties de $\mathbb{R}$ dont le complémentaire est un ouvert. Dans l'espace topologique $\mathbb{R}$ (c'est aussi un espace métrique muni d'une distance) la tribu Borélienne est notée, $\mathfrak{B}_{\mathbb{R}}$ on écrit alors,

$$\mathfrak{B}(\mathbb{R}) = \sigma\left(\tau_{\mathbb{R}}\right) = \mathfrak{B}_{\mathbb{R}}$$

Exemple 2.3.1 *Dans $\mathbb{R}$ les intervalles possédent les propriétés suivantes,*

$$[1] :]a, b[= \bigcup_{n=1}^{\infty} \left[a + \frac{1}{n}, b - \frac{1}{n}\right] \in \mathscr{F}_\sigma$$
$$[2] : [a, b[= \bigcap_{n=1}^{\infty} \left]a - \frac{1}{n}, b\right[\in \mathscr{G}_\delta$$
$$[3] : [a, b] = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left]a - \frac{1}{n}, b + \frac{1}{n}\right[\in \mathscr{G}_\delta$$

Ces exemples montrent que la réunion dénombrable d'ensembles fermés n'est pas nécessairement un fermé, et l'intersection dénombrable d'ensembles ouverts n'est pas nécessairement un ouvert. Nous démontrerons ces résultats dans les exercices.

Remarque 2.3.1 *Rappelons les concepts suivants, soit X un ensemble quelconque,*

1. *Une topologie τ_X est une collection ou famille d'éléments de $\mathscr{P}(X)$ stable sous les réunions arbitraires et les intersections finies on écrit,*

$$[\mathbf{i}] : \forall \{O_\alpha\}_\Lambda \in \tau_X \Longrightarrow \bigcup_{\alpha\in\Lambda} O_\alpha \in \tau_X$$
$$[\mathbf{ii}] : \forall \{O_i\}_{1\leq i\leq n} \in \tau_X , n \in \mathbb{N} \Longrightarrow \bigcap_{i=1}^{n} O_n \in \tau_X$$

le sous ensemble des indices $\Lambda \subset \mathbb{R}$ est un ensemble dénombrable ou non, la famille indexée $\{O_\alpha\}_\Lambda$ est donc arbitraire dénombrable ou non. Pour les intersections $n \in \mathbb{N}$ exprime qu'elles sont d'ordre fini, les éléments d'une topologie τ_X, $O \in \tau_X$ sont appelés les ensembles ouverts de X. Une topologie n'est pas une algébre et réciproquement, nous avons déja justifié cela dans la paragraphe de la section (?).

2. *Un espace topologique (X, τ_X) est dit* ***Séparable*** *s'il admet une* ***Base d'ouverts*** *dénombrable ; autrement dit il existe une classe dénombrable d'ouverts $\mathscr{O} \subset \tau_X$ telque tout élément de τ_X est une réunion d'éléments de $\mathscr{O}$. Comme exemple $(\mathbb{R}, \tau_\mathbb{R})$ est un espace séparable, c'est une déduction du théorème de Lindelöf2.3.1.*

De ce fait on démontre aussi que la tribu Borélenne $\mathfrak{B}_\mathbb{R}$ est séparable, puisqu'elle est aussi engendrée par une famille dénombrable $\mathscr{I}_\mathbb{Q}$ d'intervalles ouverts à extrémités rationnelles, formellement on a alors,

$$\mathfrak{B}_\mathbb{R} = \mathfrak{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\tau_\mathbb{R}) = \sigma\left(\mathscr{I}_\mathbb{Q}\right)$$

Théorème 2.3.2 *La $\sigma-$algébre engendrée par la famille dénombrable $\mathscr{I}_\mathbb{Q}$ d'intervalles ouverts à extrémités rationnelles est identique à la tribu Borélenne,*

$$\mathfrak{B}_\mathbb{R} = \mathfrak{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\tau_\mathbb{R}) = \sigma\left(\mathscr{I}_\mathbb{Q}\right)$$

Preuve. A FAIRE. ■

Comme conséquence du Théorème2.3.2, on a la proposition suivante,

Proposition 2.3.2 *Nous avons les identités suivantes,*

$$\mathfrak{B}_\mathbb{R} = \sigma\left(\{[a, +\infty[\ , a \in \mathbb{Q}\}\right) = \sigma\left(\{]-\infty, a]\ , a \in \mathbb{Q}\}\right)$$

Preuve. La collection $\{[a,+\infty[\ ,a\in\mathbb{Q}\}\subset\tau_{\mathbb{R}}$ est la classe des intervalles semi-infinis du type $[a,+\infty[$ où l'éxtrémité a parcours les rationnels $\mathbb{Q}$, idem pour $\{]-\infty,a]\ ,a\in\mathbb{Q}\}$. Notons que :

$$\mathcal{J}_{\mathbb{Q}}=\{]a,b[\ ,a,b\in\mathbb{Q},a<b\}$$

du théorème2.3.2,

$$\mathfrak{B}_{\mathbb{R}}=\sigma\left(\mathcal{J}_{\mathbb{Q}}\right)$$

maintenant,

$$]a,b[=]a,+\infty[\cap C([b,+\infty[)$$

avec,

$$]a,+\infty[=\bigcup_{n\geq1}\left[a+\frac{1}{n},+\infty\right[$$

nous déduisons pour la famille $\mathcal{J}_{\mathbb{Q}}$ que,

$$\mathcal{J}_{\mathbb{Q}}\subset\sigma\left(\{[a,+\infty[\ ,a\in\mathbb{Q}\}\right)$$

comme $\sigma\left(\mathcal{J}_{\mathbb{Q}}\right)$ est la plus petite cela implique,

$$\sigma\left(\mathcal{J}_{\mathbb{Q}}\right)\subseteq\sigma\left(\{[a,+\infty[\ ,a\in\mathbb{Q}\}\right)$$

réciproquement, les intervalles $[a,+\infty[\ ,a\in\mathbb{Q}$ sont des ensembles fermés de $\mathbb{R}$, donc d'aprés Prop2.3.1,

$$\{[a,+\infty[\ ,a\in\mathbb{Q}\}\subset\mathfrak{B}_{\mathbb{R}}$$

d'où,

$$\sigma\left(\{[a,+\infty[\ ,a\in\mathbb{Q}\}\right)\subseteq\mathfrak{B}_{\mathbb{R}}$$

en conclusion on a bien,

$$\mathfrak{B}_{\mathbb{R}}=\sigma\left(\{[a,+\infty[\ ,a\in\mathbb{Q}\}\right)$$

même démonstration pour $\sigma\left(\{]-\infty,a]\ ,a\in\mathbb{Q}\}\right)$. ■

Remarque 2.3.2 *Remarquons que la tribu Borélienne $\mathfrak{B}_{\mathbb{R}}$ n'est pas identique à $\mathcal{P}(\mathbb{R})$, on a une stricte inclusion $\mathfrak{B}_{\mathbb{R}}\subset\mathcal{P}(\mathbb{R})$, car sinon, $\mathfrak{B}_{\mathbb{R}}$ devient la $\sigma-$algébre grossiére et triviale $\mathcal{P}(\mathbb{R})$. On démontre que,*

$$Card\,\mathfrak{B}_{\mathbb{R}}=\sharp\mathfrak{B}_{\mathbb{R}}=2^{\aleph_0}=c$$

qui est la puissance du continu, alors que,

$$Card\,\mathcal{P}(\mathbb{R})=\sharp\mathcal{P}(\mathbb{R})=2^{c}$$

qui est la puissance du transfini, donc :

$$\mathfrak{B}_{\mathbb{R}}\neq\mathcal{P}(\mathbb{R})$$

on en déduit qu'il existe des sous-ensembles de $\mathbb{R}$ qui ne sont pas des Boréliens.

2.4 Exercices

Exercice 2.4.1 *:*

1. *Montrer que :*

$$\mathscr{A}(\{A\}) = \mathscr{A}\left(\left\{\overline{A}\right\}\right) \;\; ; \;\; \mathscr{A}\left(\left\{A_1,\overline{A}_2\right\}\right) = \mathscr{A}\left(\left\{\overline{A}_1,A_2\right\}\right)$$

2. *Généraliser la propriété aux familles indexées* $F_1 = \{A_i\}_{i\in I}$ *et* $F_2 = \left\{\overline{A}_i\right\}_{i\in I}$ *:*

$$\{A_i\}_{i\in I} \in \mathscr{P}(X) \Longrightarrow \mathscr{A}(F_1) = \mathscr{A}(F_2)$$

Exercice 2.4.2 *Déterminer les algébres engendrées suivantes :*

$$\mathscr{A}(\{A\}), \mathscr{A}\left(\left\{A,\overline{A}\right\}\right), \mathscr{A}(\{A_1,A_2\}), \mathscr{A}\left(\left\{A_1,A_2,\overline{A}_1\right\}\right), \mathscr{A}\left(\left\{A_1,A_2,\overline{A}_2\right\}\right)$$
$$\mathscr{A}\left(\left\{A_1,\overline{A}_2,\overline{A}_1\right\}\right), \mathscr{A}\left(\left\{\overline{A}_1,A_2,\overline{A}_1\right\}\right), \mathscr{A}(\{A_1,A_2,A_3\}),$$

où $A \in \mathscr{P}(X)$, $\{A_i\}_{1\le i\le 3} \subset \mathscr{P}(X)$.

Exercice 2.4.3 *:*

1. *Soient* F_1 *et* F_2 *deux classes de* $\mathscr{P}(X)$, *montrer que* $\sigma(F_1\cap F_2) \subset \sigma(F_1) \cap \sigma(F_2)$.
2. *Soit* X' *un sous-ensemble de* X, *soit* $\sum$ *une* σ*-algébre sur* X, *montrer que* $\sum \cap X'$ *est une* σ*-algébre sur* X'.
3. *Montrer que pour toute classe* $\Omega \subset \mathscr{P}(X)$, $\sigma(\Omega\cap X') = \sigma(\Omega)\cap X'$, $\forall X' \in \mathscr{P}(X)$.

Exercice 2.4.4 *Dans* $\mathbb{R}$ *les intervalles possédent les propriétés suivantes, à justifier,*

$$[1] :]a,b[= \bigcup_{n=1}^{\infty}\left[a+\frac{1}{n}, b-\frac{1}{n}\right] \in \mathscr{F}_\sigma$$
$$[2] : [a,b[= \bigcap_{n=1}^{\infty}\left]a-\frac{1}{n}, b\right[\in \mathscr{G}_\delta$$
$$[3] : [a,b] = \bigcap_{n=1}^{\infty}\left]a-\frac{1}{n}, b+\frac{1}{n}\right[\in \mathscr{G}_\delta$$

Exercice 2.4.5 *Etablir que les* σ*-algébres engendrées par les classes suivantes de sous-ensembles de* $\mathbb{R}$ *sont toutes identiques à la tribu Borélienne* $\mathfrak{B}_{\mathbb{R}}$ *:*

$$[1] : \mathscr{C}_1 = \{]a,b[\; ; \; a,b\in\mathbb{R}\}, [2] : \mathscr{C}_2 = \{[a,b] \; ; \; a,b\in\mathbb{R}\}$$
$$[3] : \mathscr{C}_3 = \{]a,b] \; ; \; a,b\in\mathbb{R}\}, [4] : \mathscr{C}_1 = \{]a,+\infty[\; ; \; a,b\in\mathbb{R}\}$$

Exercice 2.4.6 (Lemme de Transport) *;*

1. *Soit* X *un réferentiel,* $\sum_1$ *une* σ*-algébre sur* X*. Soit* $f : X \longrightarrow Y$ *une application, où* Y *est arbitraire, montrer que la classe définie par :* $\sum_2 = \left\{E \subseteq Y \diagup f^{-1}(E) \in \sum_1\right\}$ *est une* σ*-algébre sur* Y*.*
2. *Soit* $\Omega \subset \mathscr{P}(Y)$ *une classe arbitraire de sous-ensembles de* Y *et* $f : X \longrightarrow Y$ *une application. Etablir le lemme de transport exprimé par la propriété suivante :*
$$f^{-1}(\sigma(\Omega)) = \sigma\left(f^{-1}(\Omega)\right)$$
(ind : utiliser (1))

3

Théorie de la Mesure

FAIRE UNE PETITE INTRODUCTION.

3.1 Les espaces et les fonctions mesurables

Nous commençons par définir les concepts d'espace et fonction mesurable, puis donner en détail les propriétés fondamentales qui leurs sont associées.

Définition 3.1.1 *On appelle espace mesurable tout couple (X,Σ) où Σ est une $\sigma-$algèbre sur l'ensemble X. Les éléments de la $\sigma-$algèbre sont appelés ensembles mesurables.*

On a comme exemple les espaces mesurables $(X,\mathscr{P}(X))$ où $\mathscr{P}(X)$ est la $\sigma-$algèbre grossiére, $(\mathbb{R},\mathfrak{B}_{\mathbb{R}})$ où $\mathfrak{B}_{\mathbb{R}}$ est la tribu borélienne. Considérons (X,Σ) un espace mesurable et (Y,τ_Y) un espace topologique, soit l'application $f : X \longrightarrow Y$ on définit alors les fonctions mesurables par,

Définition 3.1.2 *L'application $f : X \longrightarrow Y$ est dite mesurable si,*

$$\forall V \in \tau_Y \ , \ f^{-1}(V) \in \Sigma$$

une application $g : E \subset X \longrightarrow Y$ est dite mesurable sur $E \in \mathscr{P}(X)$ si,

$$\forall V \in \tau_Y \ , \ g^{-1}(V) \cap E \in \Sigma$$

En particulier nous avons la définition des fonctions Boréliennes,

Définition 3.1.3 *Soient (X,τ_X) et (Y,τ_Y) deux espaces topologiques et $f : X \longrightarrow Y$ une application, on dit que f est une fonction borélienne si elle est mesurable par rapport à la tribu borélienne $\mathfrak{B}(X)$.*

Nous avons donné un sense analytique au concept de mesurabilité des fonctions, qui dans beaucoup de références standard on lui acquière un sense algébrique. Nôtre but est de simplifier les définitions et les propriétés qui en découlent en nous basant sur les espaces analytiques ou fonctionnels que l'on rencontre en analyse. Dans le contexte général (X, Σ_1) et (Y, Σ_2) sont deux espaces mesurables, une application $f : X \longrightarrow Y$ est dite (Σ_1, Σ_2) −mesurable si,

$$\forall V \in \Sigma_2 \ , \ f^{-1}(V) \in \Sigma_1$$

Pour nôtre approche des fonctions mesurables, nous avons la donné d'un espace mesurable (X, Σ) et d'un espace topologiaque (Y, τ_Y). On conséquence nous avons les équivalences suivantes, $f : X \longrightarrow Y$ est mesurable, si et seulement si,

$$\forall V \in \tau_Y \ , \ f^{-1}(V) \in \Sigma$$

cela equivaut à,

$$f^{-1}(\tau_Y) \subset \Sigma$$

nous déduisons alors,

$$\sigma\left(f^{-1}(\tau_Y)\right) \subseteq \Sigma$$

d'aprés le lemme de transport Exercice(?) chapitre(?),

$$\sigma\left(f^{-1}(\tau_Y)\right) = f^{-1}(\sigma(\tau_Y))$$

d'où l'on tire de cette identité entre les classes que,

$$f^{-1}(\mathfrak{B}(Y)) = \sigma\left(f^{-1}(\tau_Y)\right)$$

ainsi, une application $f : (X, \Sigma) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$ est mesurable si et seulement si,

$$f^{-1}(\mathfrak{B}(Y)) \subseteq \Sigma$$

autrement dit, l'image réciproque de la tribu borélienne sur Y est une sous-classe de la $\sigma-$algèbre Σ sur X. Et la fonction $f : (X, \tau_X) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$ est dite borélienne si $\Sigma = \mathfrak{B}(X)$ et que,

$$f^{-1}(\mathfrak{B}(Y)) \subseteq \mathfrak{B}(X)$$

Par la suite nous traiterons principalement les fonctions à valeurs réelles, la définition de la mesurabilité nous parait la mieux adaptée dans ce sens.

Proposition 3.1.1 *Soit $f : (X, \tau_X) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$ une application continue alors f est borélienne.*

Preuve. Par définition f est continue si,

$$\forall V \in \tau_Y \text{ , } f^{-1}(V) \in \tau_X$$

c'est à dire l'image réciproque de tout ouvert de Y est un ouvert de X, relativement au classes d'ensembles cela est équivalent à,

$$f^{-1}(\tau_Y) \subset \tau_X$$

en particulier,

$$f^{-1}(\tau_Y) \subset \mathfrak{B}(X)$$

d'où,

$$\sigma\left(f^{-1}(\tau_Y)\right) \subseteq \mathfrak{B}(X)$$

finalement le Lemme de transport donne,

$$\sigma\left(f^{-1}(\tau_Y)\right) = f^{-1}(\sigma(\tau_Y)) \Longrightarrow f^{-1}(\mathfrak{B}(Y)) \subseteq \mathfrak{B}(X)$$

d'où le résultat. ■

Proposition 3.1.2 *Soit (X, Σ) un espace mesurable, (Y, τ_Y) et (Z, τ_Z) deux espaces topologiques, $f : X \longrightarrow Y$ une application mesurable et $g : Y \longrightarrow Z$ une application continue, alors la composition $(g \circ f)$ est mesurable sur X.*

Preuve. On a le diagramme,

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$$

alors,

$$\forall V \in \tau_Z \text{ , } (g \circ f)^{-1}(V) = \left(f^{-1} \circ g^{-1}\right)(V) = f^{-1}\left(g^{-1}(V)\right)$$

de la continuité de g,

$$g^{-1}(V) \in \tau_Y$$

de la mesurabilité de f on a alors,

$$f^{-1}\left(g^{-1}(V)\right) \in \Sigma$$

■

Par la suite nous aurons à considérer souvent les fonctions à valeurs réelles, cela donnera une application directe et concréte des concepts abstraits et généraux précédents de mesurabilité et borélienne, comme nous l'avons fait pour les

$\sigma-$algébres et l'exemple concret de la tribu borélienne $\mathfrak{B}_{\mathbb{R}}$. Une autre raison essentielle de considérer les applications réelles, dans un sens les espaces $\left(\overline{\mathbb{R}}, \tau_{\overline{\mathbb{R}}}\right)$ et $\left(\mathbb{R}, \tau_{\mathbb{R}}\right)$ munis de leurs tribus boréliennes respectives $\mathfrak{B}_{\overline{\mathbb{R}}}$ et $\mathfrak{B}_{\mathbb{R}}$ est le fait que nous avons des caractérisations claires des applications à valeurs dans ces espaces, avec des propriétés qui leurs sont inhérentes, cela nous permet aussi en conséquence de faire une analyse assez profonde des applications et ensembles mesurables dans le contexte réel avant de passer à l'intégration au sens de Lebesgue. Débutons par la propriété suivante,

Proposition 3.1.3 *Soit (X, Σ) un espace mesurable, f une fonction définie sur X à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$, alors les propriétés suivantes sont équivalentes,*

$$\begin{aligned}
[\mathbf{a}] &: \forall \alpha \in \mathbb{R}, \left\{x \in X \diagup f(x) > \alpha\right\} \text{ , est mesurable} \\
[\mathbf{b}] &: \forall \alpha \in \mathbb{R}, \left\{x \in X \diagup f(x) \geq \alpha\right\} \text{ , est mesurable} \\
[\mathbf{c}] &: \forall \alpha \in \mathbb{R}, \left\{x \in X \diagup f(x) < \alpha\right\} \text{ , est mesurable} \\
[\mathbf{d}] &: \forall \alpha \in \mathbb{R}, \left\{x \in X \diagup f(x) \leq \alpha\right\} \text{ , est mesurable}
\end{aligned}$$

Preuve. Asuumons que, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, l'ensemble,

$$\left\{x \in X \diagup f(x) > \alpha\right\}$$

est mesurable, du fait que,

$$\left\{x \in X \diagup f(x) \geq \alpha\right\} = \bigcap_{n \geq 1} \left\{x \in X \diagup f(x) > \alpha - \frac{1}{n}\right\}$$

on déduit alors que $\left\{x \in X \diagup f(x) \geq \alpha\right\}$ est mesurable, donc $[\mathbf{a}] \Longrightarrow [\mathbf{b}]$. De la relation,

$$\left\{x \in X \diagup f(x) < \alpha\right\} = C_X \left\{x \in X \diagup f(x) \geq \alpha\right\}$$

nous obtenons $[\mathbf{b}] \Longrightarrow [\mathbf{c}]$. Ensuite de la relation,

$$\left\{x \in X \diagup f(x) \leq \alpha\right\} = \bigcap_{n \geq 1} \left\{x \in X \diagup f(x) < \alpha + \frac{1}{n}\right\}$$

nous déduisons $[\mathbf{c}] \Longrightarrow [\mathbf{d}]$. Finalement de,

$$\left\{x \in X \diagup f(x) > \alpha\right\} = C_X \left\{x \in X \diagup f(x) \leq \alpha\right\}$$

si $\left\{x \in X \diagup f(x) \leq \alpha\right\}$ est mesurable alors $\left\{x \in X \diagup f(x) > \alpha\right\}$ l'est aussi, ce qui implique $[\mathbf{d}] \Longrightarrow [\mathbf{a}]$. ■

De la même manière on établit que,

Proposition 3.1.4 *L'ensemble* $\{x \in X / f(x) = \beta\}, \forall \beta \in \overline{\mathbb{R}}$ *est mesurable si l'une des conditions de proposition Prop3.1.3 est satisfaite.*

Preuve. Clairement, nous avons pour $\beta \in \mathbb{R}$,

$$\{x \in X / f(x) = \beta\} = \{x \in X / f(x) \leq \beta\} \cap \{x \in X / f(x) \geq \beta\}$$

ensuite pour $\beta \in \overline{\mathbb{R}}$ on a les deux cas,

$$\{x \in X / f(x) = +\infty\} = \bigcap_{n \geq 1} \{x \in X / f(x) > n\}$$
$$\{x \in X / f(x) = -\infty\} = \bigcap_{n \geq 1} \{x \in X / f(x) < -n\}$$

d'où, $\{x \in X / f(x) = +\infty\}$ et $\{x \in X / f(x) = -\infty\}$ sont mesurables. ■

Aprés ces étapes nous sommes en mesure de donner la **caractérisation des fonctions réelles mesurables** dans le théorème suivant,

Théorème 3.1.1 (caractérisation des f^{cts} mesurables) *Soit* (X, Σ) *un espace mesurable,* $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ *une application à valeurs réelles, alors* f *est mesurable si et seulement si l'une des propriétés de la proposition Prop3.1.3 est satisfaite.*

Preuve. Nécessité, f étant mesurable alors,

$$\forall V \in \tau_{\overline{\mathbb{R}}}, \ f^{-1}(V) \in \Sigma$$

en particulier, pour l'ouvert,

$$V = [-\infty, \alpha[\ , \alpha \in \mathbb{R}$$

cela implique,

$$f^{-1}([-\infty, \alpha[) = \{x \in X / f(x) < \alpha\} \in \Sigma$$

réciproquement, d'aprés Prop3.1.3 si l'un des ensembles est mesurable alors touts les quatres sont mesurables, ensuite du théorème de Cantor nous avons,

$$V \in \tau_{\overline{\mathbb{R}}} \Longleftrightarrow V = \bigcup_{n \geq 1} I_n$$

où $\{I_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite dénombrable d'intervalles ouverts deux à deux disjoints du type,

$$[-\infty, \alpha[\ ,]a, b[\ , \text{ ou }]b, +\infty]$$

de ce fait on obtient,

$$f^{-1}(V) = f^{-1}\left(\bigcup_{n \geq 1} I_n\right) = \bigcup_{n \geq 1} f^{-1}(I_n) \in \Sigma$$

sachant que,

$f^{-1}(]a,b[) = f^{-1}(]a,+\infty] \cap [-\infty,\alpha[) = f^{-1}(]a,+\infty]) \cap f^{-1}([-\infty,\alpha[) \in \Sigma$

nous déduisons que $f^{-1}(I_n) \in \Sigma, \forall n \in \mathbb{N}^*$ et quelque soit le type des I_n, d'où $f^{-1}(V) \in \Sigma$ pou tout ouvert $V \in \tau_{\overline{\mathbb{R}}}$. ■

Pour les fonctions boréliennes on a la conséquence suivante,

Corollaire 3.1.1 *Soit (X,τ_X) un espace topologique, $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$, alors f est borélienne si et seulement si $\forall\alpha \in \mathbb{R}$, $f^{-1}([-\infty,\alpha[) \in \mathfrak{B}(X)$.*

Preuve. Application directe de Theo3.1.1. ■

Les fonctions réelles mesurables $f : E \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ définies sur un ensemble mesurable de l'espace mesurable (X,Σ) sont dites mesurables au sens de Lebesgue. Les combinaisons algébriques et les opérations sur les fonctions mesurables sont aussi indispensables, dans les résultats qui suivrons on établit les propriétés fondamentales relatives aux classes de fonctions mesurables.

Théorème 3.1.2 *Soit (X,Σ) un espace mesurable, f et g deux fonctions mesurables définies sur X à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$, soit c une constante réelle ; alors les fonctions suivantes sont mesurables,*

$$(f+c)\ ,\ (c.f)\ ,\ (f+g)\ ,\ (f.g)$$

Preuve. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ un réel arbitraire, on a :

$$\{x \in X \diagup\ (f+c)(x) < \alpha\} = \{x \in X \diagup f(x) < \alpha - c\}$$

nous déduisons du théorème Théo3.1.1 que $(f+c)$ est mesurable. On a aussi,

$$\{x \in X \diagup\ (cf)(x) < \alpha\} = \left\{x \in X \diagup f(x) < \frac{\alpha}{c}\right\}$$

avec la constante $c > 0$, donc du Théo3.1.1 (cf) est mesurable, même démonstration lorsque $c < 0$. Ensuite nous avons,

$$\{x \in X \diagup\ (f+g)(x) < \alpha\} = \{x \in X \diagup f(x) < \alpha - g(x)\}$$

sachant que, $\exists r \in \mathbb{Q}$ indépendant de la variable x telque :

$$f(x) < r < \alpha - g(x)$$

alors on déduit,

$$\{x \in X \diagup\ (f+g)(x) < \alpha\} = \bigcup_{r\in\mathbb{Q}} \{x \in X \diagup f(x) < r\} \cap \{x \in X \diagup g(x) < \alpha - r\}$$

d'où la mesurabilité de $(f+g)$, ceci étant pour le cas fini, lorsque f et g vérifient les conditions suivantes pour certains éléments $x \in X$,

$$f(x) = +\infty \wedge g(x) = -\infty$$

ou bien,

$$f(x) = -\infty \wedge g(x) = +\infty$$

on pose alors,

$$E_1 = \{x \in X / f(x) = +\infty \wedge g(x) = -\infty\}$$
$$E_2 = \{x \in X / f(x) = -\infty \wedge g(x) = +\infty\}$$

de la proposition Prop3.1.4, E_1 et E_2 sont mesurables. Définissons alors,

$$(f+g)(x) = \begin{cases} f(x) + g(x) \ , \ x \notin E_1 \cup E_2 \\ \omega \in \overline{\mathbb{R}} \ , \ x \in E_1 \cup E_2 \end{cases}$$

on a alors $\forall \alpha \in \mathbb{R}$,

$$\{x \in X / \ (f+g)(x) > \alpha\} = \{x \in X - (E_1 \cup E_2) / f(x) + g(x) > \alpha\} \cup A_\omega$$

avec,

$$A_\omega = \begin{cases} \varnothing \ , \ \omega \leq \alpha \\ E_1 \cup E_2 \ , \ \omega > \alpha \end{cases}$$

d'où la mesurabilité des A_ω, en conclusion $(f+g)$ est mesurable. D'aprés le cas de la fonction (cf), l'application $(-g)$ est mesurable d'où $f - g = f + (-g)$ est mesurable. Maintenant, soit $\alpha \in \mathbb{R}$ assumons que,

$$\alpha < 0$$

alors,

$$\{x \in X / f^2(x) > \alpha\} = X$$

qui est le référenciel mesurable. Pour les $\alpha \geq 0$ on a :

$$\{x \in X / f^2(x) > \alpha\} = \{x \in X / f(x) < -\sqrt{\alpha}\} \cup \{x \in X / f(x) > \sqrt{\alpha}\}$$

encore du Théo3.1.1 nous concluons que f^2 est une fonction mesurable. Finalement, de l'identité suivante :

$$(fg) = \frac{1}{2}\left[(f+g)^2 - f^2 - g^2\right]$$

nous obtenons la mesurabilité du produit $(f\, g)$ et le théorème est démontré. ■

Pour les limites et les bornes supérieures et inférieures des suites de fonctions nous avons aussi ;

Proposition 3.1.5 *Soit $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables sur X alors les fonctions suivantes sont mesurables,*

$$f_1(x) = \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n(x) \quad , \quad f_2(x) = \inf_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)$$
$$f_3(x) = \overline{\lim} f_n(x) \quad , \quad f_4(x) = \underline{\lim} f_n(x)$$

Preuve. Notons que,

$$\left\{x \in X / \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n(x) > \alpha\right\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{x \in X / f_n(x) > \alpha\}$$

du Théo3.1.1 les f_n étant mesurables, alors $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)$ est mesurable. De même,

$$\left\{x \in X / \inf_{n\in\mathbb{N}} f_n(x) < \alpha\right\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{x \in X / f_n(x) < \alpha\}$$

donc $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)$ est mesurable. De ces deux propriétés et de la définition des limites supérieures et inférieures, nous déduisons que $\overline{\lim} f_n(x)$ et $\underline{\lim} f_n(x)$ sont aussi mesurables. ■

Par la suite nous aurons à utiliser beaucoup les fonctions caractéristiques des ensembles mesurables, quelques propriétés sont données dans l'exercice(?) du chapitre(1).

Définition 3.1.4 *Soit X un ensemble donné et $E \in \mathscr{P}(X)$, la fonction caractéristique de l'ensemble E est l'application définie par,*

$$\chi_E : \begin{array}{l} X \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \chi_E(x) \end{array}$$

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1 & , x \in E \\ 0 & , x \notin E \end{cases}$$

Un résultat immédiat est le suivant,

Proposition 3.1.6 *Soit (X, Σ) un espace mesurable, $E \in \mathscr{P}(X)$ un sous-ensemble de X alors,*

$$E \text{ est mesurble} \iff \chi_E \text{ est mesurable}$$

Preuve. Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ observons que,

$$\{x \in X / \ \chi_E(x) < \alpha\} = \begin{cases} \varnothing & , \alpha \leq 0 \\ CE = \overline{E} & , 0 < \alpha \leq 1 \\ X & , \alpha > 1 \end{cases}$$

d'où,

$$E \in \Sigma \Longrightarrow \chi_E \ \text{ est mesurable}$$

réciproquement, assumons χ_E mesurable, d'aprés Prop3.1.4 on a,

$$\{x \in X / \ \chi_E(x) = 1\} \in \Sigma$$

sachant que,

$$\{x \in X / \ \chi_E(x) = 1\} = E$$

alors $E \in \Sigma$. ∎

3.2 Fonctions étagées sur un espace mesurable

Les fonctions étagées comme les fonctions en escaliers pour l'intégrale de Riemann sont à la base de la théorie de la mesure, c'est avec ces derniéres qu'on établit les résultats fondamentaux de mesure d'ensembles et d'intégration de fonctions, grace aux théorèmes d'approximations par les applications étagées on arrive à étendre ces résultats aux fonctions mesurables par un processus de limite.

Définition 3.2.1 *Soit (X, Σ) un espace mesurable et $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ une application réelle, f est dite étagée si elle est mesurable et ne prend qu'in nombre fini de valeurs distinctes $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$.*

On démontre aisement que les fonctions étagées sont des applications de la forme,

$$f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{E_i} \quad , n \in \mathbb{N}$$

les ensembles,

$$E_i = \{x \in X / \ f(x) = \alpha_i\}$$

sont mesurables et la famille $\{E_i\}_{1 \leq i \leq n}$ forme une partition mesurable du référenciel X. On a ainsi le théorème fondamental d'approximation suivant,

Théorème 3.2.1 (approximation des f^{cts} mesurables) *Soit $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ une fonction mesurable positive, il existe alors une suite $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ de fonctions étagées (mesurables) tel que,*

1. *La suite est croissante avec,*

$$0 \leq f_1 \leq f_2 \leq ... \leq f_n \leq f_{n+1} \leq ... \leq f$$

2. $$\forall x \in X \ \ , \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$$

3. *Si f est bornée sur X, alors la convergence est uniforme.*

Preuve. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considére l'intervalle $[0, n]$ que l'on subdivise en $(n2^n)$ sous intervalles de longueur $l = \frac{1}{2^n}$. Définissons les ensembles,

$$E_{nk} = \begin{cases} \left\{x \in X / \ \frac{k}{2^n} \leq f(x) < \frac{k+1}{2^n}\right\} \ , \ 0 \leq k \leq (n2^n - 1) \\ \{x \in X / \ f(x) \geq n\} \ \ , k = n2^n \end{cases}$$

pour tout $k \in \mathbb{N}$, $k = 0, 1, ..., n2^n$, les ensembles E_{nk} sont mesurables, ils sont au nombre de $(n2^n + 1)$, par définition on a :

$$X = \bigcup_{k=0}^{n2^n} E_{nk} \tag{3.1}$$

la famille $\{E_{nk}\}_{k\in\overline{0,n2^n}}$ forme une partition mesurable du référenciel X. Maintenant on définit les fonctions étagées,

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{k}{2^n} \ \ , x \in E_{nk} \\ n \ \ , x \in E_{n,n2^n} \end{cases}$$

de la définition des f_n on a alors,

$$f_n = \sum_{k=0}^{n2^n} \frac{k}{2^n} \chi_{E_{nk}}$$

1. Des définitions précédentes nous avons,

$$f_n \geq 0 \ \wedge \ f_n \leq f \ \ , \forall n \in \mathbb{N}^*$$

montrons que la suite $\{f_n\}$ est croissante, soit $x \in X$ d'aprés relation 3.1,

$$\exists k \in \overline{0, n2^n} \;\; ; x \in E_{nk}$$

donc,

$$\frac{k}{2^n} \leq f(x) < \frac{k+1}{2^n}$$

on déduit alors de la définition de la fonction étagée que,

$$f_n(x) = \frac{k}{2^n}$$

de la même manière pour $(n+1)$ nous avons,

$$X = \bigcup_{k=0}^{(n+1)2^{n+1}} E_{(n+1)k}$$

alors,

$$\exists k_0 \in \overline{0, (n+1)2^{n+1}} \;\; ; x \in E_{(n+1)k_0}$$

cela implique,

$$f_{n+1}(x) = \frac{k_0}{2^{n+1}}$$

sachant que nous avons,

$$\frac{k_0}{2^{n+1}} \leq f(x) < \frac{k_0+1}{2^{n+1}}$$

nous déduisons de ces relations que,

$$\frac{k_0}{2^{n+1}} < \frac{k+1}{2^n} \quad \wedge \quad \frac{k}{2^n} < \frac{k_0+1}{2^{n+1}}$$

ce nous donne,

$$k_0 < 2k+2 \;\; \wedge \;\; 2k < k_0 + 1$$

autrement dit,

$$2k - 1 < k_0 < 2k + 2$$

d'où nécessairement,

$$k_0 = 2k \;\; \vee \;\; k_0 = 2k+1$$

pour $k_0 = 2k$,

$$f_{n+1}(x) = \frac{2k}{2^{n+1}} = \frac{k}{2^n} = f_n(x)$$

et si $k_0 = 2k+1$ alors,

$$f_{n+1}(x) = \frac{2k+1}{2^{n+1}} > \frac{k}{2^n} = f_n(x)$$

donc on a bien,

$$f_{n+1}(x) \geq f_n(x)$$

Pour le cas, $k = n2^n$ c'est à dire $x \in E_{n,n2^n}$, on a,

$$f(x) \geq n \ \wedge \ f_n(x) = n$$

cela étant pour $n \in \mathbb{N}^*$, pour $(n+1)$ on obtient,

$$\begin{aligned} &\exists k_1 \in \overline{0,(n+1)2^{n+1}} \ ; x \in E_{(n+1)k_1} \\ &\Longrightarrow \frac{k_1}{2^{n+1}} \leq f(x) < \frac{k_1+1}{2^{n+1}} \\ &\Longrightarrow n < \frac{k_1+1}{2^{n+1}} \Longleftrightarrow k_1 \geq n2^{n+1} \\ &\Longrightarrow f_{n+1}(x) = \frac{k_1}{2^{n+1}} \geq n = f_n(x) \end{aligned}$$

en résumé on a bien, $\forall x \in X$, $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$.

2. Pour cette étape assumons que, pour $x \in X$, $f(x) < +\infty$, l'ensemble $\mathbb{R}$ étant archimédien alors,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0(\varepsilon, x) \in \mathbb{N} \diagup f(x) < n_0$$

avec le choix de,

$$\frac{1}{2^{n_0}} < \varepsilon \Longleftrightarrow \frac{1}{\log 2} \log \frac{1}{\varepsilon} < n_0$$

ensuite,

$$\forall n > n_0, \ \left| f(x) - f_n(x) \right| = f(x) - f_n(x)$$

sachant que,

$$\exists k \leq (n2^n - 1) \ \ ; \frac{k}{2^n} \leq f(x) < \frac{k+1}{2^n}$$

avec la fonction étagée qui vérifie,

$$f_n(x) = \frac{k}{2^n}$$

ainsi,

$$f(x) - f_n(x) < \frac{k+1}{2^n} - \frac{k}{2^n} = \frac{1}{2^n} < \frac{1}{2^{n_0}} < \varepsilon$$

d'où :

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$$

pour le cas $f(x) = +\infty$ on peut écrire,

$$\forall n \in \mathbb{N}\,,\ f(x) \geq n$$

$$\Longrightarrow \forall n \in \mathbb{N}\,, x \in E_{n,n2^n} \quad \wedge\ k = n2^n$$

dans ce cas par définition, $f_n(x) = n$ ce qui donne aussi $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = +\infty$.

3. Finalement, assumons que $f(x) \leq M\ ,\ \forall x \in X$, cela implique :

$$\exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} / \ M < n_0(\varepsilon) \quad \wedge\ \frac{1}{2^{n_0(\varepsilon)}} < \varepsilon$$

et la convergence est alors uniforme sur X.

■

3.3 Les mesures positives et extérieures

Nous débutons par définir les mesures positives, on démontre ensuite plusieurs propriétés de base relatives à ces derniéres dont on aura besoin par la suitedans le chapitre sur l'intégration. Les mesures extérieures sont introduites succinctement grace auquelles les ensembles mesurables au sens de Lebesgue seront définis, dans ce contexte les comparaisons et les liens entre mesure positive et extérieure sont bien établis.

Définition 3.3.1 *Soit (X, Σ) un espace mesurable et μ une fonction d'ensemble positive définie de, $\mu : \Sigma \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$. On dit que μ est une mesure positive et le triplet (X, Σ, μ) espace mesuré si l'application μ posséde la propriété d'additivité dénombrable.*

La propriété d'**additivité dénombrable** s'exprime par le fait que ; pour toute suite $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ d'éléments de Σ deux à deux disjoints on a :

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i)$$

la propriété est aussi appelée $\sigma-$**additivité**.

Exemple 3.3.1 *Comme exemples on a les suivants,*

1. *Soit* $X = \mathbb{N}$, $\Sigma = \mathscr{P}(\mathbb{N})$ *alors,*

$$\mu : \begin{array}{l} \Sigma \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+ \\ E \longrightarrow \mu(E) = \begin{cases} cardE & , E \text{ est fini} \\ +\infty & , E \text{ est infini} \end{cases} \end{array}$$

est une mesure sur Σ *dite mesure discréte ou de comptage.*

2. *Soit* X *un référenciel telque* $(cardX = +\infty \wedge X \ncong \mathbb{N})$, *c'est à dire un ensemble infini non-dénombrable. soit,*

$$\Sigma = \left\{ E \subseteq X \diagup E \cong \mathbb{N} \vee \overline{E} \cong \mathbb{N} \right\}$$

on démontre aisement que Σ *est une* $\sigma-$*algébre sur* X. *Si on défini ,*

$$\mu : \begin{array}{l} \Sigma \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+ \\ E \longrightarrow \mu(E) = \begin{cases} 0 & , E \cong \mathbb{N} \\ 1 & , \overline{E} \cong \mathbb{N} \end{cases} \end{array}$$

alors μ *est une mesure positive sur* Σ.

3. *Soit* $X = \mathbb{N}$, $\Sigma = \mathscr{P}(\mathbb{N})$ *on défini,*

$$\mu(E) = \begin{cases} \sum\limits_{n \in E} \frac{1}{n^2} & , cardE < +\infty \\ +\infty & , cardE = +\infty \end{cases}$$

dans ce cas, l'application μ *n'admet pas la propriété de* $\sigma-$*additivité, ce n'est donc pas une mesure sur* Σ.

Proposition 3.3.1 *Soit* (X, Σ, μ) *un espace mesuré alors,*

1. *Propriété d'* ***additivité finie****,*

$$\forall \{E_i\}_{1 \leq i \leq n} \in \Sigma,\ n \in \mathbb{N}\ ;\ E_i \cap E_j = \varnothing,\ \forall i \neq j$$

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mu(E_i)$$

2. *Propriété de* ***monotonicité****,*

$$\forall E,F\in\Sigma\,,E\subseteq F\Longrightarrow\mu(E)\leq\mu(F)$$
$$et\ si\ \mu(E)<+\infty\Longrightarrow\mu(F-E)=\mu(F)-\mu(E)$$

3. *Propriété de* ***convergence****,*

$$\left.\begin{array}{l}\forall\,\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}\ ,E_n\in\Sigma\,,\forall n\in\mathbb{N}^*\\ E_1\subseteq E_2\subseteq\ldots\subseteq E_n\subseteq E_{n+1}\subseteq\ldots\end{array}\right\}\Longrightarrow\mu\left(\overset{\infty}{\underset{n=1}{\cup}}E_n\right)=\lim_{n\longrightarrow\infty}\mu\left(E_n\right)$$

Preuve. Nous avons pour les différends énoncés,

1. Etant donné que,

$$\exists E\in\Sigma/\ \mu(E)<+\infty$$

$$\Longrightarrow\mu(E)=\mu\left(\overset{\infty}{\underset{i=1}{\cup}}E_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty}\mu\left(E_i\right)=\lim_{n\longrightarrow\infty}\sum_{i=0}^{n}\mu\left(E_i\right)$$
$$=\mu(E)+\lim_{n\longrightarrow\infty}\sum_{i=1}^{n}\mu\left(E_i\right)=\mu(E)+\lim_{n\longrightarrow\infty}n\mu(\varnothing)$$
$$\Longrightarrow\mu(E)<+\infty\Longrightarrow\lim_{n\longrightarrow\infty}n\mu(\varnothing)=0\Longrightarrow\mu(\varnothing)=0$$

ensuite,

$$\mu\left(\overset{n}{\underset{i=1}{\cup}}E_i\right)=\mu\left(\overset{\infty}{\underset{i=1}{\cup}}E_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty}\mu\left(E_i\right)=\lim_{m\longrightarrow\infty}\sum_{i=1}^{m}\mu\left(E_i\right)=$$
$$=\lim_{m\longrightarrow\infty}\left[\sum_{i=1}^{n}\mu\left(E_i\right)+\sum_{i=n+1}^{m}\mu\left(E_i\right)\right]=\sum_{i=1}^{n}\mu\left(E_i\right)$$

avec le choix $E_i=\varnothing,\forall i>n$, ce qui donne (1).

2. notons que,

$$\forall A,B\in\mathscr{P}(X)\Longrightarrow\left(A\cap\overline{B}\right)\cup(A\cap B)=A$$
$$\Longrightarrow\mu(A)=\mu(A-B)+\mu(A\cap B)$$

en particulier,

$$E\subseteq F\Longrightarrow\mu(F)=\mu(F-E)+\mu(E)$$
$$\Longrightarrow\mu(E)<+\infty\Longrightarrow\mu(F)\geq\mu(E)$$

3. Soit $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite croissante d'ensembles mesurables, d'aprés Prop 2.1.3,

$$\exists \{B_n\}_{n\in\mathbb{N}^*} \in \Sigma \,,\; B_i \cap B_j = \varnothing, \;\forall i \neq j$$

suite d'éléments mesurables deux à deux disjoints telque,

$$\overset{\infty}{\underset{n=1}{\cup}} E_n = \overset{\infty}{\underset{n=1}{\cup}} B_n$$

par définition,

$$B_1 = E_1,\; B_2 = E_2 \cap \overline{E}_1 \,, \ldots,\; B_n = E_n \cap \overline{E}_{n-1} \cap \ldots \cap \overline{E}_2 \cap \overline{E}_1$$

la suite $\{E_n\}$ étant croissante, alors $\left\{\overline{E}_n\right\} = \{CE_n\}$ est décroissante,

$$\ldots \subseteq \overline{E}_{n+1} \subseteq \overline{E}_n \subseteq \overline{E}_{n-1} \subseteq \ldots \subseteq \overline{E}_1$$

ce qui implique,

$$B_n = E_n - E_{n-1} = E_n \cap \overline{E}_{n-1} \,,\; \forall n > 1$$

remarquons aussi,

$$n = 1 \Longrightarrow B_1 = \overset{1}{\underset{i=1}{\cup}} B_i = E_1$$

$$\begin{aligned} n = 2 \Longrightarrow \overset{2}{\underset{i=1}{\cup}} B_i &= B_1 \cup B_2 = E_1 \cup \left(E_2 \cap \overline{E}_1\right) \\ &= \left(E_1 \cup E_2\right) \cap \left(E_1 \cup \overline{E}_1\right) = E_2 \end{aligned}$$

admettons donc la propriété vraie pour $n \in \mathbb{N}$, autrement dit $\overset{n}{\underset{i=1}{\cup}} B_i = E_n$ alors :

$$\begin{aligned} \overset{n+1}{\underset{i=1}{\cup}} B_i &= B_{n+1} \cup \left(\overset{n}{\underset{i=1}{\cup}} B_i\right) = B_{n+1} \cup E_n = \\ &= E_n \cup \left(E_{n+1} \cap \overline{E}_n\right) = E_{n+1} \end{aligned}$$

d'où le résultat. Finalement on obtient,

$$\begin{aligned} \mu\left(\overset{\infty}{\underset{i=1}{\cup}} E_i\right) &= \mu\left(\overset{\infty}{\underset{i=1}{\cup}} B_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu\left(B_i\right) \\ &= \lim_{n\longrightarrow\infty} \sum_{i=1}^{n} \mu\left(B_i\right) = \lim_{n\longrightarrow\infty} \mu\left(\overset{n}{\underset{i=1}{\cup}} B_i\right) = \lim_{n\longrightarrow\infty} \mu\left(E_n\right) \end{aligned}$$

et la preuve est compléte.

■

De même pour les suites décroissantes d'ensembles mesurables nous avons aussi la propriété de convergence que nous résumons ci-dessous avec la propriété dite de **sous additivité dénombrable** d'une mesure positive μ.

Proposition 3.3.2 *Nous avons les deux propriétés ci-dessous :*

1. *Soit* $\{E_i\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ *une suite d'éléments de* Σ *satisfaisant,*

$$E_1 \supseteq E_2 \supseteq \dots \supseteq E_n \supseteq E_{n+1} \supseteq \dots$$

telque, $\mu(E_1) < +\infty$ *alors ;*

$$\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \lim_{n\longrightarrow\infty} \mu(E_n)$$

2. *Soit* $\{E_i\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ *une suite arbitraire d'éléments de* Σ *alors,*

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i)$$

Preuve. Etablissons (1),

1. Posons,

$$B_1 = E_1 - E_2 \,,\, B_2 = E_2 - E_3 \,, \dots, \, B_n = E_n - E_{n+1}$$

clairement,

$$B_n \in \Sigma \,, \forall n \in \mathbb{N}^* \;\wedge\; B_i \cap B_j = \varnothing \,, \forall i \neq j$$

De la même maniére que Prop 3.3.1, on démontre par récurrence que,

$$\bigcup_{i=1}^{n} B_i = E_1 - E_{n+1}$$

ensuite nous avons,

$$\begin{aligned} E_1 - \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i &= E_1 \cap \overline{\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}\left(E_i \cap \overline{E}_{i+1}\right)\right)} \\ &= E_1 \cap \left(\bigcap_{i=1}^{\infty}\left(\overline{E}_i \cup E_{i+1}\right)\right) \\ &= E_1 \cap \left(\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} \overline{E}_i\right) \cup \left(\bigcap_{i=1}^{\infty} E_{i+1}\right)\right) \end{aligned}$$

la derniére étape est justifiée, étant donné que :

$$\overline{E}_i \cap E_{i+1} = \varnothing \,, \forall i \in \mathbb{N}^*$$

donc,

$$E_1 - \overset{\infty}{\underset{i=1}{\cup}} B_i = \left[E_1 \cap \left(\overset{\infty}{\underset{i=1}{\cap}} \overline{E}_i\right)\right] \cup \left[E_1 \cap \left(\overset{\infty}{\underset{i=1}{\cap}} E_{i+1}\right)\right] = \overset{\infty}{\underset{i=1}{\cap}} E_i$$

puis de $\mu\left(E_1\right) < +\infty$ et de la monotonicité de μ Prop 3.3.1 on a ,

$$\begin{aligned}\mu\left(\overset{\infty}{\underset{i=1}{\cap}} E_i\right) &= \mu\left(E_1 - \overset{\infty}{\underset{i=1}{\cup}} B_i\right) = \mu\left(E_1\right) - \mu\left(\overset{\infty}{\underset{i=1}{\cup}} B_i\right) \\ &= \mu\left(E_1\right) - \sum_{i=1}^{\infty} \mu\left(B_i\right) = \mu\left(E_1\right) - \lim_{n\longrightarrow\infty} \sum_{i=1}^{n} \mu\left(B_i\right) \\ &= \mu\left(E_1\right) - \lim_{n\longrightarrow\infty} \mu\left(\overset{n}{\underset{i=1}{\cup}} B_i\right) \\ &= \mu\left(E_1\right) - \lim_{n\longrightarrow\infty} \left(\mu\left(E_1\right) - \mu\left(E_{n+1}\right)\right)\end{aligned}$$

d'où,

$$\mu\left(E_1\right) < +\infty \Longrightarrow \mu\left(\overset{\infty}{\underset{i=1}{\cap}} E_i\right) = \lim_{n\longrightarrow\infty} \mu\left(E_n\right)$$

2. Montrons la sous-additivité dénombrable, d'aprés Prop 2.1.3,

$$\exists \left\{B_n\right\}_{n\in\mathbb{N}^*} \in \Sigma \,,\ B_i \cap B_j = \emptyset,\ \forall i \neq j$$

suite d'éléments mesurables deux à deux disjoints telque,

$$\overset{\infty}{\underset{i=1}{\cup}} E_i = \overset{\infty}{\underset{i=1}{\cup}} B_i$$

$$\Longrightarrow \mu\left(\overset{\infty}{\underset{i=1}{\cup}} E_i\right) = \mu\left(\overset{\infty}{\underset{i=1}{\cup}} B_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu\left(B_i\right)$$

comme $B_i \subseteq E_i$, de la monotonicité Prop 3.3.1 alors,

$$\mu\left(B_i\right) \leq \mu\left(E_i\right) \Longrightarrow \mu\left(\overset{\infty}{\underset{i=1}{\cup}} E_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu\left(E_i\right)$$

la preuve est compléte.

■

Donc dans la proposition ci-dessus nous avons aussi la propriété de convergence d'une mesure pour les suites d'ensembles mesurables décroissantes et la propriété de sous-additivité dénombrable. Les mesures extérieures sont définies comme suit,

Définition 3.3.2 *Soit X un ensemble arbitraire et μ^* une fonction d'ensemble μ^* : $\mathscr{P}(X) \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$, μ^* est dite* ***mesure extérieure*** *si,*

$$[\mathbf{i}] : \mu^*(\varnothing) = 0$$
$$[\mathbf{ii}] : E \subseteq F \Longrightarrow \mu^*(E) \leq \mu^*(F)$$
$$[\mathbf{3i}] : \mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E_n)$$

Ce sont des applications d'ensembles positives ayant principalement les propriétés de monotonicité et de sous-additivité dénombrable. Pour le cas général de l'étude de ces dernéres avec les mesures nous préférons de le faire dans le chapitre consacré aux mesures abstraites. La mesure extérieure de base qui nous intéresse à ce nivau est celle dite mesure extérieure de Lebesgue. Grace à cette derniére les ensembles mesurables au sens de Lebesgue sont construits, plus loin pour introduire aussi l'intégrale de Lebesgue.

3.4 La mesure extérieure de Lebesgue

Notons par $\Im$ la classe des intervalles ouverts de la droite réelle $\mathbb{R}$. Soit $E \in \mathscr{P}(\mathbb{R})$ un sous-ensemble de $\mathbb{R}$, notons par $\Im_E$ la classe de tous les recouvrements dénombrables de E formés d'éléments de $\Im$. Formellement on écrit ,

$$\Im_E = \left\{ \{\mathrm{I}_n\}_{n\in\mathbb{N}^*} \;/\; \mathrm{I}_n \in \Im, \forall n \in \mathbb{N}^*, \text{et } E \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathrm{I}_i \right\}$$

Définition 3.4.1 *On définit la mesure extérieure de Lebesgue notée m^* par :*

$$m^*(E) = \inf_{\{\mathrm{I}_n\}\in\Im_E} \sum_{n=1}^{\infty} \ell(\mathrm{I}_n)$$

où $\ell(\mathrm{I}_n)$ est la longueur de l'intervalle ouvert I_n.

Donnons maintenant une étude des propriétés fondamentales de la mesure extérieure de Lebesgue dans les différentes propositions suivantes.

Proposition 3.4.1 *Nous avons,*

1. *L'application m^* est définie sur tous les sous-ensembles de $\mathbb{R}$.*
2. *C'est une application positive, $\forall E \in \mathscr{P}(\mathbb{R})$, $m^*(E) \geq 0$.*
3. *Avec $m^*(\varnothing) = 0$.*

4. *Et pour les singletons* $m^*(\{p\}) = 0,\ \forall p \in \mathbb{R}$.

Preuve. Pour chaque assertion on a,

1. Evident, à partir de la définition de m^*.
2. Les longueurs étant positives, le résultat s'en suit, en résumé donc :

$$m^* : \begin{array}{l} \mathcal{P}(\mathbb{R}) \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+ \\ E \longrightarrow m^*(E) \end{array}$$

3. Nous avons,

$$\{\varnothing\} \subset \bigcup_{n\geq 0} \left]-\frac{\varepsilon}{2^{n+1}}, \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}\right[,\ \forall \varepsilon > 0$$
$$\Longrightarrow m^*(\{\varnothing\}) \leq \sum_{n\geq 0} \frac{\varepsilon}{2^n} = \varepsilon',\ \forall \varepsilon' > 0$$

alors,

$$0 \leq m^*(\{\varnothing\}) \leq \varepsilon',\ \forall \varepsilon' > 0 \Longrightarrow m^*(\{\varnothing\}) = 0$$

4. D'une maniére similaire,

$$\{p\} \subset \bigcup_{n\geq 0} \left]p - \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}, p + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}\right[,\ \forall \varepsilon > 0$$
$$\Longrightarrow m^*(\{\varnothing\}) \leq \sum_{n\geq 0} \frac{\varepsilon}{2^n} = \varepsilon',\ \forall \varepsilon' > 0$$

$$0 \leq m^*(\{p\}) \leq \varepsilon',\ \forall \varepsilon' > 0 \Longrightarrow m^*(\{p\}) = 0$$

d'où le résultat.

■

La mesure extérieure de Lebesgue posséde aussi la propriété de monotonicité et de sous-additivité dénombrable,

Proposition 3.4.2 *La mesure extérieure* m^* *verifie,*

1. *Propriété de* ***monotonicité****,*

$$A \subseteq B \Longrightarrow m^*(A) \leq m^*(B)$$

2. *La* ***sous-additivité dénombrable****,*

$$\forall \{E_n\}_{n\in\mathbb{N}^*},\ E_n \in \mathcal{P}(\mathbb{R}),\ n \in \mathbb{N}^* \Longrightarrow m^*\left(\bigcup_{n\geq 1} E_n\right) \leq \sum_{n\geq 1} m^*(E_n)$$

Preuve. La monotonicité ;

1. De la définition,

$$m^*(B) = \inf_{\{\mathrm{I}_n\}\in\mathfrak{I}_B} \sum_{n=1}^{\infty} \ell(\mathrm{I}_n)$$

$$\Longrightarrow \forall\varepsilon > 0,\ \exists\{\mathrm{I}_n\}_{n\in\mathbb{N}^*} \in \mathfrak{I}_B /\ m^*(B) \leq \sum_{n\geq 1}\ell(\mathrm{I}_n) < m^*(B) + \varepsilon$$

ensuite,

$$A \subseteq B \Longrightarrow A \subseteq \underset{n\geq 1}{\cup} \mathrm{I}_n \Longrightarrow m^*(A) \leq \sum_{n\geq 1}\ell(\mathrm{I}_n)$$

$$\Longrightarrow m^*(A) < m^*(B) + \varepsilon,\ \forall\varepsilon > 0 \Longrightarrow m^*(A) \leq m^*(B)$$

2. Sous-additivité dénombrable. Soit $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suit d'éléments de $\mathscr{P}(\mathbb{R})$, pour chaque $m^*(E_n)$ nous avons :

$$\forall\varepsilon_n > 0,\ \exists\{\mathrm{I}_{nm}\}_{m\in\mathbb{N}^*} \in \mathfrak{I}_{E_n} /\ m^*(E_n) \leq \sum_{m\geq 1}\ell(\mathrm{I}_{nm}) < m^*(E_n) + \varepsilon_n$$

étant donné que,

$$\underset{n\geq 1}{\cup} E_n \subseteq \underset{n\geq 1}{\cup}\left(\underset{m\geq 1}{\cup}\mathrm{I}_{nm}\right)$$

$$\Longrightarrow m^*\left(\underset{n\geq 1}{\cup} E_n\right) \leq \sum_{n\geq 1}\ell\left(\underset{m\geq 1}{\cup}\mathrm{I}_{nm}\right) \leq \sum_{n\geq 1}\sum_{m\geq 1}\ell(\mathrm{I}_{nm}),\ (exercice!)$$

d'où,

$$m^*\left(\underset{n\geq 1}{\cup} E_n\right) < \sum_{n\geq 1} m^*(E_n) + \sum_{n\geq 1}\varepsilon_n$$

ainsi,

$$\forall\varepsilon > 0,\ m^*\left(\underset{n\geq 1}{\cup} E_n\right) < \sum_{n\geq 1} m^*(E_n) + \varepsilon\sum_{n\geq 1}\frac{1}{2^n}$$

epsilon étant arbitraire nous concluons alors,

$$m^*\left(\underset{n\geq 1}{\cup} E_n\right) < \sum_{n\geq 1} m^*(E_n)$$

cela achève la démonstration.

■

Les propriétés fondamentales de la mesure extérieure d'invariance par translation et de prolongement de la longueur sont données par,

Proposition 3.4.3 *Nous avons,*

1. *La mesure extérieure* m^* *est un prolongement de la longueur* ℓ *définie sur les intervalles,*
$$\forall \mathrm{I} \in \mathscr{P}(\mathbb{R}),\ m^*(\mathrm{I}) = \ell(\mathrm{I})$$

2. *La mesure extérieure* m^* *est invariante par translation,*
$$\forall E \in \mathscr{P}(\mathbb{R}),\ \forall p \in \mathbb{R}\ ;\ m^*\left(E+p\right) = m^*(E)$$

Preuve. Pour le prolongement,

1. Soit $\{\mathrm{I}_n\}_{n\in\mathbb{N}^*} \in \mathfrak{I}_{\mathrm{I}}$ un recouvrement de l'intervalle $\mathrm{I} \subset \mathbb{R}$,
$$\mathrm{I}_n \in \mathfrak{I},\ \forall n \in \mathbb{N}^* \ \wedge\ \mathrm{I} \subseteq \underset{n\geq 1}{\cup} \mathrm{I}_n$$
$$\Longrightarrow \ell(\mathrm{I}) \leq \sum_{n\geq 1} \ell\left(\mathrm{I}_n\right) \Longrightarrow \ell(\mathrm{I}) \leq m^*(\mathrm{I})$$
nous savons aussi des propriétés de la droite réelle que,
$$\forall \mathrm{I} \subset \mathbb{R},\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists \mathrm{J} \in \mathfrak{I},\ \mathrm{J} \supseteq \mathrm{I}\ /\ \ell(\mathrm{J}) \leq \ell(\mathrm{I}) + \varepsilon$$
cela implique de la monotonicité Prop 3.4.2,
$$m^*(\mathrm{I}) \leq m^*(\mathrm{J}) = \ell(\mathrm{J}) \Longrightarrow m^*(\mathrm{I}) \leq \ell(\mathrm{I}) + \varepsilon$$
epsilon étant arbitraire alors,
$$m^*(\mathrm{I}) \leq \ell(\mathrm{I})$$
nous concluons donc,
$$m^*(\mathrm{I}) = \ell(\mathrm{I})$$
cela étant pour les intervalles $\mathrm{I} \subset \mathbb{R}$, satisfaisant $\ell(\mathrm{I}) < +\infty$. Lorsque $\ell(\mathrm{I}) = +\infty$ on a ,
$$\exists \mathrm{I}_n \in \mathfrak{I},\ \mathrm{I}_n \subseteq \mathrm{I}\ /\ \ell\left(\mathrm{I}_n\right) > n\ ,\ \forall n \in \mathbb{N}^*$$
comme $\ell\left(\mathrm{I}_n\right) < +\infty$ d'aprés ce qui précéde $m^*\left(\mathrm{I}_n\right) = \ell\left(\mathrm{I}_n\right)$, de la monotonicité Prop 3.4.2,
$$m^*(\mathrm{I}) \geq m^*\left(\mathrm{I}_n\right) > n$$
d'où,
$$m^*\left(\mathrm{I}_n\right) > n,\ \forall n \in \mathbb{N}^* \Longrightarrow m^*(\mathrm{I}) = +\infty$$

2. L'invariance par translation. Notons que, pour les intervalles nous avons $\ell(\mathrm{I}+p) = \ell(\mathrm{I})$, de la propriété (1) ci-dessus alors,

$$m^*(\mathrm{I}+p) = m^*(\mathrm{I}) \ , \ \forall \mathrm{I} \subseteq \mathbb{R} \ , \ p \in \mathbb{R}$$

ensuite,

$$\forall E \in \mathscr{P}(\mathbb{R}), \ \{\mathrm{I}_n\}_{n\in\mathbb{N}^*} \in \mathfrak{I}_E \Longrightarrow E+p \subseteq \bigcup_{n\geq 1} (\mathrm{I}_n+p)$$

alors,

$$m^*(E+p) \leq m^*\left(\bigcup_{n\geq 1} (\mathrm{I}_n+p)\right) \leq \sum_{n\geq 1} \ell(\mathrm{I}_n+p)$$

et,

$$\sum_{n\geq 1} \ell(\mathrm{I}_n+p) = \sum_{n\geq 1} \ell(\mathrm{I}_n)$$

implique,

$$m^*(E+p) \leq m^*(E)$$

Finalement,

$$E = (E+p) - p \Longrightarrow m^*((E+p)-p) \leq m^*(E+p)$$

ce qui donne,

$$m^*(E) \leq m^*(E+p)$$

et la preuve est complète.

■

3.4.1 Ensembles mesurables de Lebesgue

Avec les propriétés de la mesure extérieure de Lebesgue établies auparavant on arrive à la définition des ensembles mesurables au sens de Lebesgue. La mesure extérieure qu'on a définie admet la propriété de sous additivité dénombrable. Ce n'est pas encore une mesure proprement dite, les ensembles mesurables au sens de Lebesgue nous permettrons ensuite de définir et extraire une mesure admettant la $\sigma-$additivité. Citons alors ci-dessous la définition générale des ensembles mesurables au sens de Caratheodory.

Définition 3.4.2 (Caratheodory) *Un ensemble $E \in \mathscr{P}(\mathbb{R})$ est dit mesurable au sens de Lebesgue si,*

$$\forall A \subseteq \mathbb{R}, \ m^*(A) = m^*(A \cap E) + m^*(A \cap CE)$$

En effet la définition est dite au sens de Lebesgue puisqu'elle est en fonction de la mesure extérieure de Lebesgue. Dans le cas général des mesures extérieures abstraites c'est bien la définition dite au sens de Caratheodory. quelques remarques s'en suivent on a,

Remarque 3.4.1 *Soit un sous-ensemble $E \in \mathscr{P}(\mathbb{R})$,*

1. *D'aprés la sous-additivité Prop 3.4.2 de la mesure extérieure de Lebesgue, pour montrer qu'un ensemble $E \in \mathscr{P}(\mathbb{R})$ est mesurable au sens de Lebesgue il est alors suffisant d'établir que,*

$$\forall A \in \mathscr{P}(\mathbb{R}),\ m^*(A) \geq m^*(A \cap E) + m^*(A \cap CE)$$

2. *$E \in \mathscr{P}(\mathbb{R})$ est mesurable au sens de Lebesgue si et seulement si le complémentaire $CE = \overline{E}$ est mesurable en ce sens.*

Formellement nous notons la classe ou famille des ensembles mesurables au sens de Lebesgue par $\mathfrak{L}_{\mathbb{R}}$, avec $\mathfrak{L}_{\mathbb{R}} \subset \mathscr{P}(\mathbb{R})$ cette inclusion stricte est importante, nous la justifierons par un théorème plus loin. D'abord, un résultat fondamental que nous énonçons est le suivant,

Théorème 3.4.1 *La classe des ensembles mesurables au sens de Lebesgue $\mathfrak{L}_{\mathbb{R}}$ est une $\sigma-$algébre qui contient la tribu Borélienne $\mathfrak{B}_{\mathbb{R}}$.*

Preuve. De la remarque ci-dessus si E est mesurable alors CE aussi, donc $\mathfrak{L}_{\mathbb{R}}$ est stable par complémentation. Maintenant soit E_1 et E_2 deux éléments de $\mathfrak{L}_{\mathbb{R}}$, alors $\forall A \in \mathscr{P}(\mathbb{R})$, moyennant la sous-additivité de m^*,

$$\begin{aligned} m^*(A) \leq m^*\left(A \cap (E_1 \cup E_2)\right) + m^*\left(A \cap (CE_1 \cap CE_2)\right) = \\ = m^*\left((A \cap E_1) \cup (A \cap E_2 \cap CE_1)\right) + m^*\left(A \cap CE_1 \cap CE_2\right) \end{aligned} \tag{3.2}$$

observons cependant que,

$$\begin{aligned} (A \cap E_1) \cup (A \cap E_2 \cap CE_1) &= A \cap \left(E_1 \cup (E_2 \cap CE_1)\right) = \\ &= A \cap \left((E_1 \cup E_2) \cap (E_1 \cup CE_1)\right) \\ &= A \cap (E_1 \cup E_2) \end{aligned}$$

ainsi de l'équation Equa 3.2 nous obtenons,

$$\begin{aligned} M^*(A) \leq m^*\left((A \cap E_1)\right) + m^*\left(A \cap E_2 \cap CE_1\right) + \\ + m^*\left(A \cap CE_1 \cap CE_2\right) \end{aligned}$$

où l'expression $M^*(A)$ est :

$$M^*(A) = m^*(A \cap (E_1 \cup E_2)) + m^*(A \cap (CE_1 \cap CE_2))$$

sachant que $E_2 \in \mathfrak{L}_{\mathbb{R}}$ cela implique,

$$M^*(A) \leq m^*(A \cap E_1) + m^*(A \cap CE_1)$$

ensuite $E_1 \in \mathfrak{L}_{\mathbb{R}}$ nous donne enfin,

$$m^*(A) \leq M^*(A) \leq m^*(A)$$

d'où l'identitté,

$$m^*(A \cap (E_1 \cup E_2)) + m^*(A \cap (CE_1 \cap CE_2)) = m^*(A)$$

en conclusion,

$$E_1 \cup E_2 \in \mathbb{L}$$

et la classe $\mathfrak{L}_{\mathbb{R}}$ est une algébre. Pour établir que la famille $\mathfrak{L}_{\mathbb{R}}$ admet la propriété d'additivité dénombrable, autrement dit une $\sigma-$algébre, on montre en premier lieu que,

$$m^*\left(A \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right)\right) = \sum_{i=1}^{n} m^*(A \cap E_i)$$

où $\{E_i\}_{1 \leq i \leq n}$ est une suite finie d'éléments de $\mathfrak{L}_{\mathbb{R}}$ **deux à deux disjoints** et A un sous-ensemble arbitraire de $\mathbb{R}$, un raisonnement par récurrence induit que,

$$m^*\left(A \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n+1} E_i\right)\right) =$$

$$= m^*\left(A \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n+1} E_i\right) \cap E_{n+1}\right) + m^*\left(A \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n+1} E_i\right) \cap \overline{E}_{n+1}\right)$$

$$= m^*(A \cap E_{n+1}) + m^*\left(A \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right)\right)$$

$$= m^*(A \cap E_{n+1}) + \sum_{i=1}^{n} m^*(A \cap E_i) = \sum_{i=1}^{n+1} m^*(A \cap E_i)$$

d'où le résultat par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$. Ensuite on montre que l'algébre $\mathfrak{L}_{\mathbb{R}}$ est stable pour les réunions dénombrables d'éléments deux à deux disjoints. Posons $E = \bigcup_{n \geq 1} E_n$ avec,

$$\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}^*} \in \mathfrak{L}_{\mathbb{R}}\ ,\ E_i \cap E_j = \varnothing\ , \forall i \neq j$$

définissons les ensembles,

$$F_n = \bigcup_{i=1}^{n} E_i$$

la classe $\mathfrak{L}_{\mathbb{R}}$ étant une algébre, alors $F_n \in \mathfrak{L}_{\mathbb{R}}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, puis :

$$m^*\left(A \cap F_n\right) + m^*\left(A \cap CF_n\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} m^*\left(A \cap E_i\right) + m^*\left(A \cap CF_n\right)$$

comme,

$$F_n \subseteq E \Longrightarrow \overline{E} \subseteq \overline{F}_n$$

alors,

$$m^*\left(A \cap \overline{E}\right) \leq m^*\left(A \cap \overline{F}_n\right)$$

cela implique,

$$m^*(A) \geq \sum_{i=1}^{n} m^*\left(A \cap E_i\right) + m^*\left(A \cap \overline{E}\right) \ , \ \forall n \in \mathbb{N}^*$$

$$\Longrightarrow m^*(A) \geq \sum_{i=1}^{\infty} m^*\left(A \cap E_i\right) + m^*\left(A \cap \overline{E}\right)$$

$$\Longrightarrow m^*(A) \geq m^*\left(A \cap E\right) + m^*\left(A \cap \overline{E}\right) \ , \ \forall A \in \mathscr{P}(\mathbb{R})$$

nous concluons de la remarque 3.4.1 que $E \in \mathfrak{L}_{\mathbb{R}}$, en particulier ; pour $A = E$, on obtient :

$$m^*(E) \geq \sum_{i=1}^{\infty} m^*\left(E_i\right)$$

ce qui conduit via la sous-additivité dénombrable de la mesure extérieure m^* à,

$$\sum_{i=1}^{\infty} m^*\left(E_i\right) \geq m^*\left(\bigcup_{i \geq 1} E_i\right) \geq \sum_{i=1}^{\infty} m^*\left(E_i\right)$$

et finalement que,

$$m^*\left(\bigcup_{i \geq 1} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} m^*\left(E_i\right)$$

Donc nous avons montré que la mesure extérieure de Lebesgue restreinte à la classe $\mathfrak{L}_{\mathbb{R}}$ des ensembles mesurables de Lebesgue admet la propriété d'additivité dénombrable ou $\sigma-$additivité. Pour conclure considérons une suite $\left\{E_n\right\}_{n \in \mathbb{N}^*} \in \mathfrak{L}_{\mathbb{R}}$ de la proposition Prop 2.1.3,

$$\exists \left\{B_n\right\}_{n \in \mathbb{N}^*} \in \mathscr{P}(\mathbb{R}) \diagup \bigcup_{n \geq 1} E_n = \bigcup_{n \geq 1} B_n$$

où les éléments B_n sont deux à deux disjoints. De la définition des B_n,

$$B_n = E_n \cap CE_{n-1} \cap CE_{n-2} \cap ... \cap CE_1$$

alors,

$$B_n \in \mathfrak{L}_{\mathbb{R}} \ ; \ \forall n \in \mathbb{N}^*$$

étant donné que nous avons montré plus haut que $\mathfrak{L}_{\mathbb{R}}$ est stable pour les réunions dénombrables d'éléments deux à deux disjoint, nous concluons que,

$$\underset{n\geq 1}{\cup} E_n \in \mathfrak{L}_{\mathbb{R}}$$

et ainsi $\mathfrak{L}_{\mathbb{R}}$ est une $\sigma-$algébre. En fin de démonstration, il nous reste à prouver que,

$$\mathfrak{B}_{\mathbb{R}} = \mathscr{B}(\mathbb{R}) = \sigma\left(\tau_{\mathbb{R}}\right) \subseteq \mathfrak{L}_{\mathbb{R}}$$

D'aprés Prop 2.3.2 et aussi Exercice (?) du chapitre II, il est suffisant d'établir que :

$$\forall a \in \mathbb{R}, \ ]a, +\infty[\ \in \mathfrak{L}_{\mathbb{R}}$$

alors,

$$\forall A \in \mathscr{P}(\mathbb{R})$$

posons ;

$$A_1 = A \cap \,]a, +\infty[\ , \ A_2 = A \cap \,]-\infty, a]$$

et établissons que,

$$m^*(A) \geq m^*(A_1) + m^*(A_2)$$

lorsque $m^*(A) = +\infty$, le résultat est trivial. Considérons le cas où $m^*(A) < +\infty$,

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \left\{\mathrm{I}_n\right\}_{n\in\mathbb{N}^*} \in \mathfrak{I}_A \diagup \sum_{n\geq 1} \ell\left(\mathrm{I}_n\right) < m^*(A) + \varepsilon$$

notons par :

$$\mathrm{I}'_n = \mathrm{I}_n \cap \,]a, +\infty[\ \text{ et } \ \mathrm{I}''_n = \mathrm{I}_n \cap \,]-\infty, a]$$

puisque I'_n et I''_n sont des intervalles de $\mathbb{R}$, alors :

$$\ell\left(\mathrm{I}_n\right) = \ell\left(\mathrm{I}'_n\right) + \ell\left(\mathrm{I}''_n\right) = m^*\left(\mathrm{I}'_n\right) + m^*\left(\mathrm{I}''_n\right)$$

sachant que,

$$A_1 \subseteq \underset{n\geq 1}{\cup} \mathrm{I}'_n$$

$$\Longrightarrow m^*(A_1) \leq m^*\left(\underset{n\geq 1}{\cup} \mathrm{I}'_n\right) \leq \sum_{n\geq 1} m^*\left(\mathrm{I}'_n\right)$$

de la même façon,

$$m^*(A_1) \leq \sum_{n\geq 1} m^*(\mathrm{I}''_n)$$

cela implique ;

$$\begin{aligned} m^*(A_1) + m^*(A_2) &\leq \sum_{n\geq 1} m^*(\mathrm{I}'_n) + \sum_{n\geq 1} m^*(\mathrm{I}''_n) \\ &= \sum_{n\geq 1} \left(m^*(\mathrm{I}'_n) + m^*(\mathrm{I}''_n) \right) \\ &= \sum_{n\geq 1} \ell(\mathrm{I}_n) \leq m^*(A) + \varepsilon \end{aligned}$$

cela étant $\forall \varepsilon > 0$, d'où :

$$m^*(A) \geq m^*(A_1) + m^*(A_2)$$

finalement,

$$]a, +\infty[\in \mathfrak{L}_{\mathbb{R}}, \forall a \in \mathbb{R}$$

et la démonstration est compléte. ■

En résumé, nous avons les inclusions suivantes,

$$\mathfrak{I} \subseteq \mathscr{I} \subseteq \mathfrak{B}_{\mathbb{R}} \subseteq \mathfrak{L}_{\mathbb{R}} \subset \mathscr{P}(\mathbb{R})$$

avec respectivement,

- $\mathfrak{I}$ la classe des intervalles ouverts de $\mathbb{R}$.
- $\mathscr{I}$ la classe des intervalles de $\mathbb{R}$.
- $\mathfrak{B}_{\mathbb{R}}$ la tribu Borélienne.
- $\mathfrak{L}_{\mathbb{R}}$ la classe des ensembles mesurables au sens de Lebesgue.

Posons maintenant la définition des recouvrements au sens de Vitali, nous aurons besoin de ce concept dans l'élaboration de certains résultats plus loins dans nos développements.

Définition 3.4.3 *Soit $\mathscr{F}$ une famille d'intervalles de $\mathbb{R}$ et E un sous-ensembles de $\mathbb{R}$, alors $\mathscr{F}$ est un recouvrement de E au sens de Vitali si,*

$$\forall \varepsilon > 0, \forall x \in E, \exists \mathrm{I} \in \mathscr{F} / \; x \in \mathrm{I} \;\; \wedge \; \ell(\mathrm{I}) < \varepsilon$$

On a alors le lemme de Vitali çi-dessous,

Lemme 3.4.1 (Vitali) *Soit* $E \in \mathscr{P}(\mathbb{R})$ *,* $m^*(E) < +\infty$*. Soit* $\mathscr{F}$ *est un recouvrement de Vitali de E alors,*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \{\mathrm{I}_n\}_{1 \leq n \leq N} \in \mathscr{F},\ \mathrm{I}_n \cap \mathrm{I}_m = \varnothing,\ n \neq m \ \ telque$$

$$m^*\left(E - \bigcup_{n=1}^{N} \mathrm{I}_n\right) < \varepsilon$$

Preuve. Exercice. ■

3.4.2 La mesure de Lebesgue

Aprés avoir établit les résultats principaux sur les ensembles mesurables au sens de Lebesgue, en particulier le théorème fondamental Theo 3.4.1, nous définissons maintenant la mesure dite de Lebesgue sur la droite réelle $\mathbb{R}$.

Définition 3.4.4 *La mesure de Lebesgue notée* m *est la restriction de la mesure extérieure* m^* *à la tribu* $\mathfrak{L}_{\mathbb{R}}$ *des ensembles mesurables au sens de Lebesgue. On écrit par définition,*

$$m^*_{|\mathbb{L}} = m : \begin{array}{c} \mathfrak{L}_{\mathbb{R}} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+ \\ E \longrightarrow m(E) = m^*_{|\mathbb{L}}(E) \end{array}$$

avec,

$$m^* : \mathscr{P}(\mathbb{R}) \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$$

On a la remarque suivante,

Remarque 3.4.2 *Les propriétés de la mesure* m *sont ainsi déduites de celles de* m^* *par restriction à la* $\sigma-$*algébre* $\mathfrak{L}_{\mathbb{R}}$*, données dans les propositions Prop 3.4.1, Prop 3.4.2, Prop 3.4.3, en plus comme conséquence du théorème Théo 3.4.1, nous déduisons que,*

$$m : \mathfrak{L}_{\mathbb{R}} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$$

est une mesure positive et le triplet $(\mathbb{R}, \mathfrak{L}_{\mathbb{R}}, m)$ *est un espace mesuré, dit de Lebesgue.*

Nous allons démontrer par la suite un résultat usuel sur la caractérisation des ensembles mesurables au sens de Lebesgue. Pour effectuer cette tache, nous aurons besoin de certaines propriétés préliminaires suivantes ;

Proposition 3.4.4 *Pour tout sous-ensemble* $E \in \mathscr{P}(\mathbb{R})$ *nous avons les équivalences suivantes :*

1.

$$E \in \mathfrak{L}_{\mathbb{R}}$$

2.

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists V \in \tau_{\mathbb{R}} /\ E \subseteq V,\ m^*(V - E) < \varepsilon$$

3.

$$\exists G \in \mathcal{G}_\delta /\ E \subseteq G,\ m^*(G - E) = 0$$

Preuve. Montrons, $(1 \Longrightarrow 2)$, assumons que $E \in \mathfrak{L}_{\mathbb{R}}$ verifie $m(E) < +\infty$, donc :

$$m(E) = m^*(E) = \inf_{\{\mathrm{I}_n\} \in \mathfrak{I}_E} \sum_{n \geq 1} \ell(\mathrm{I}_n)$$

$$\Longrightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \exists \{\mathrm{I}_n\} \in \mathfrak{I}_E / \sum_{n \geq 1} \ell(\mathrm{I}_n) < m(E) + \varepsilon$$

$$\{\mathrm{I}_n\} \in \mathfrak{I}_E \Longrightarrow E \subseteq \bigcup_{n \geq 1} \mathrm{I}_n = V$$

ensuite,

$$E \in \mathfrak{L}_{\mathbb{R}} \Longrightarrow m^*(V) = m^*(V \cap E) + m^*(V \cap CE)$$

$$\Longrightarrow m^*(V) - m^*(E) = m^*(V - E)$$

$$m^*(V) = m^*\left(\bigcup_{n \geq 1} \mathrm{I}_n\right) \leq \sum_{n \geq 1} m^*(\mathrm{I}_n) = \sum_{n \geq 1} \ell(\mathrm{I}_n)$$

et ainsi,

$$m^*(V - E) = m^*(V) - m^*(E) < \varepsilon$$

dans le cas où $m(E) = +\infty$ on pose,

$$E_n = [-n, n] \cap E$$

donc,

$$m(E_n) < +\infty$$

en applicant le cas de mesure finie précédent on a,

$$\forall \varepsilon_n > 0,\ \exists V_n \in \tau_{\mathbb{R}} /\ E_n \subseteq V_n,\ m^*(V_n - E_n) < \varepsilon_n$$

en particulier,

$$E \subseteq \bigcup_{n \geq 1} V_n$$

$$\Longrightarrow m^*\left(\bigcup_{n \geq 1} V_n - E\right) = m^*\left(\bigcup_{n \geq 1} (V_n - E)\right) \leq \sum_{n \geq 1} m^*(V_n - E)$$

étant donné que,

$$V_n - E \subseteq V_n - E_n$$

alors,

$$m^*\left(V_n - E\right) \leq m^*\left(V_n - E_n\right)$$

$$\Longrightarrow m^*\left(\underset{n\geq 1}{\cup} V_n - E\right) \leq \sum_{n\geq 1} \varepsilon_n = \varepsilon$$

cela établit la premiére implication. Pour $(2 \Longrightarrow 3)$, par hypothése on a :

$$\forall \varepsilon_n > 0,\ \exists V_n \in \tau_{\mathbb{R}} \diagup E_n \subseteq V_n,\ m^*\left(V_n - E\right) < \varepsilon_n$$

d'où,

$$E \subseteq V_n,\ \forall n \geq 1 \Longrightarrow E \subseteq \underset{n\geq 1}{\cap} V_n$$

ensuite,

$$m^*\left(\underset{n\geq 1}{\cap} V_n - E\right) = m^*\left(\underset{n\geq 1}{\cap} \left(V_n - E\right)\right) \leq m^*\left(V_n - E\right) < \varepsilon_n$$

donc,

$$m^*(G - E) < \frac{1}{n},\ \forall n \in \mathbb{N}^*$$

l'indice $\forall n \in \mathbb{N}^*$ étant arbitraire, alors :

$$m^*(G - E) = 0$$

Finalement, pour $(3 \Longrightarrow 1)$, écrivons,

$$A \cap \left(E \cap \overline{E}\right) = A,\ \forall A \in \mathscr{P}(\mathbb{R})$$

$$\Longrightarrow (A \cap E) \cup \left(A \cap \overline{E}\right) = A \Longrightarrow m^*(A) \geq m^*\left(A \cap \overline{E}\right)$$

nous déduisons ainsi que, si $E \in \mathscr{P}(\mathbb{R})$ vérifie, $m^*(E) = 0$ alors :

$$m^*(E) = 0 \Longrightarrow m^*(A \cap E) = 0$$

de l'inégalité précédente nous obtenons,

$$m^*(A) \geq m^*(A \cap E) + m^*\left(A \cap \overline{E}\right)$$

nous avons montré donc,

$$m^*(E) = 0 \Longrightarrow E \in \mathfrak{L}_{\mathbb{R}}$$

en particulier,

$$m^*(G-E)=0 \Longrightarrow G-E \in \mathfrak{L}_{\mathbb{R}}$$

et du fait que,

$$G-(G-E) \in \mathfrak{L}_{\mathbb{R}}$$

nous obtenons,

$$E = G-(G-E) \in \mathfrak{L}_{\mathbb{R}}$$

et la preuve est compléte. ■

D'une maniére analogue, on démontre pour les classes d'ensembles fermés $F \in \tau_{\mathbb{R}}^c$ et les ensembles du type $F \in \mathscr{F}_\sigma$ les équivalences suivantes,

Proposition 3.4.5 *Pour tout sous-ensemble $E \in \mathscr{P}(\mathbb{R})$ nous avons les équivalences suivantes :*

1.

$$E \in \mathfrak{L}_{\mathbb{R}}$$

2.

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists F \in \tau_{\mathbb{R}}^c \diagup\ F \subseteq E,\ m^*(E-F) < \varepsilon$$

3.

$$\exists F \in \mathscr{F}_\sigma \diagup\ F \subseteq E,\ m^*(E-F) = 0$$

Preuve. Déduction directe de Prop 3.4.4. ■

En rassemblant les propositions plus haut, on déduit la caractérisation çi-dessous des ensembles mesurables au sens de Lebesgue,

Proposition 3.4.6 (caractérisation des ensembles mesurables) *Soit E un élément arbitraire appartenant à $\mathscr{P}(\mathbb{R})$ alors,*

$$E \in \mathfrak{L}_{\mathbb{R}}$$

si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists V \in \tau_{\mathbb{R}},\ \exists F \in \tau_{\mathbb{R}}^c \diagup\ F \subseteq E \subseteq V\ ,\ m^*(V-F) < \varepsilon$$

Preuve. Coséquence directe des propositions Prop 3.4.4 et Prop 3.4.5, en observant que :

$$V-F = (V-E) \cup (E-F)$$

d'où le résultat. ■

3.4.3 Construction d'un ensemble non-mesurable

Rappelons que nous avons mentionné que l'inclusion $\mathfrak{L}_{\mathbb{R}} \subset \mathscr{P}(\mathbb{R})$ est une inclusion stricte. Cela rend les résultats à priori non triviaux, autrement dit la tribu $\mathfrak{L}_{\mathbb{R}}$ des ensembles mesurables au sens de Lebesgue n'est pas identique à la tribu grossiére $\mathscr{P}(\mathbb{R})$. Effectivement, pour affirmer ce résultat il est suffisant de construire un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ qui n'est pas mesurable au sens de Lebesgue. Une construction célébre que nous exposons içi est l'ensemble de Zermelo-Vitali, c'est un sous-ensemble réel non-mesurable obtenu via l'axiome fondamental de l'analyse et des approches mathématiques intuitionistes, dit **Axiome du choix**.

Axiome 3.4.2 (du Choix) *Soit $\mathscr{C}$ une classe d'ensembles non vide, alors il existe une application F définie sur $\mathscr{C}$, qui à tout élément $A \in \mathscr{C}$ associe un élément $F(A)$ appartenant à A.*

$$F : \begin{array}{c} \mathscr{C} \longrightarrow F(\mathscr{C}) \\ A \longrightarrow F(A) \in A \end{array}$$

l'application F est appelée fonction du choix.

On a alors le Théorème,

Théorème 3.4.3 (Zermelo-Vitali) *Nous avons l'assertion,*

$$\exists P \in \mathscr{P}(\mathbb{R}) \,/\, P \notin \mathfrak{L}_{\mathbb{R}}$$

autrement dit P n'est pas mesurable au sens de Lebesgue et,

$$\mathfrak{L}_{\mathbb{R}} \subset \mathscr{P}(\mathbb{R})$$

Preuve. Exposé. ■

Un autre théorème de comparaison entre les classes usuelles de $\sigma-$algébres et tribus affirme que l'inclusion $\mathfrak{B}_{\mathbb{R}} \subseteq \mathfrak{L}_{\mathbb{R}}$ est aussi une inclusion stricte, on a alors le résultat suivant.

Théorème 3.4.4 *L'inclusion $\mathfrak{B}_{\mathbb{R}} \subseteq \mathfrak{L}_{\mathbb{R}}$ est stricte $\left(\mathfrak{B}_{\mathbb{R}} \subset \mathfrak{L}_{\mathbb{R}}\right)$, autrement dit les tribus $\mathfrak{B}_{\mathbb{R}}$ et $\mathfrak{L}_{\mathbb{R}}$ ne sont pas identiques ; il existe des ensembles mesurables au sens de Lebesgue sur la droite réelle $\mathbb{R}$ qui ne sont pas des boréliens.*

Preuve. A faire. ■

3.5 Exercices

Exercice 3.5.1 *Soit* $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$, *avec la donnée des espaces mesurables* (X,Σ) *et* $\left(\overline{\mathbb{R}},\mathfrak{B}_{\overline{\mathbb{R}}}\right)$, *telque* f *soit mesurable, montrer que les ensembles* $\{x \in X / \alpha \leq f(x) \leq \beta\}$ *sont mesurables* $\forall \alpha,\beta \in \mathbb{R}$.

Exercice 3.5.2 *Soit* (X,Σ) *un espace mesurable,* $f, g, \{f_n\}$ *des fonctions réelles définies sur* X, *montrer les propriétés suivantes :*

1. f, g *mesurables* $\Longrightarrow \sup(f,g), \inf(f,g)$ *sont mesurables.*
2. f *mesurable* $\Longrightarrow |f|$ *est mesurable.*
3. $|f|$ *est mesurable* $\not\Rightarrow f$ *mesurable.*
4. $\{f_n\}$ *une suite de fonctions mesurables convergente alors la limite est mesurable.*

Exercice 3.5.3 *Soient* f, g *des fonctions mesurables sur* X, *montrer que les ensembles suivants sont mesurables :*

$$\{x \in X / f(x) > g(x)\}, \{x \in X / f(x) \geq g(x)\}, \{x \in X / f(x) = g(x)\}$$

Exercice 3.5.4 *Soit* $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de fonctions mesurables, montrer que l'ensemble des points* $x \in X$ *où* $f_n(x)$ *est convergente est un ensemble mesurable.*

Exercice 3.5.5 *Soit* (X,Σ) *un espace mesurable,* $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ *une suite d'éléments de* $\sum$, *établir que :*

$$f \text{ est mesurable sur } E = \bigcup_{n\geq 1} E_n \Longleftrightarrow f \text{ est mesurable sur } E_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Exercice 3.5.6 *Soit* $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$x \longmapsto f(x) = \begin{cases} x \ , \ x \in \mathbb{Q} \\ 1 - x \ , \ x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

déterminer les points de continuité de f, *puis montrer que* f *est mesurable.*

Exercice 3.5.7 *Soit* (X,Σ_1) *et* (X,Σ_2) *deux espaces mesurables, et* $f : X \longrightarrow Y$, *on dit que* f *est* (Σ_1,Σ_2) *mesurable si* $\left(\forall A \in \Sigma_2,\ f^{-1}(A) \in \Sigma_1\right)$:

1. *Notons par* $\mathscr{C}$ *la famille qui engendre* Σ_2, *montrer que :*

$$f \text{ est } (\Sigma_1,\Sigma_2)\text{-mesurable} \Longleftrightarrow f^{-1}(\mathscr{C}) \subset \Sigma_1$$

2. (X,Σ_1), (Y,Σ_2), (Z,Σ_3) *étant des espaces mesurables,* f, g *des fonctions mesurables au sens précédent, avec* $f : X \longrightarrow Y, g : Y \longrightarrow Z$*, montrer que* $(g \circ f)$ *est* (Σ_1, Σ_3)*-mesurable.*

Exercice 3.5.8 *Soit* (X,Σ) *un espace mesurable et* f *une fonction réelle définie sur* X*, montrer que :*

$$f \text{ est mesurable } \Longleftrightarrow \{x \in X / f(x) \geq q\} \text{ est mesurable } \forall q \in \mathbb{Q}.$$

4 L'intégrale de Lebesgue

FAIRE UNE PETITE INTRODUCTION.

4.1 Préliminaires

Nous avons défini au chapitre précédent les fonctions étagées, qui sont des applications mesurables ne prenant qu'un nombre fini de valeurs distinctes $\alpha_1, \alpha_2, ...\alpha_n$ en observant que,

$$\theta = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i} \ , A_i = \{x \in X \diagup \ \theta(x) = \alpha_i\}, \ n \in \mathbb{N}^*$$

Lorsque les constantes $\alpha_1, \alpha_2, ...\alpha_n$ sont distinctes et les ensembles A_i sont deux à deux disjoints on dit alors que la représentation $\theta = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i}$ est une **représentation canonique** de θ. La raison est que, une fonction étagée peut admettre plusieurs représentations ; soit par exemple :

$$\theta(x) = \begin{cases} 1 & , x \geq 0 \\ -1 & , x < 0 \end{cases}$$

pour $\alpha_1 = 1$ on pose,

$$A_1 = \{x \in \mathbb{R} \diagup \ x \geq 0\}$$

et $\alpha_2 = -1$ on pose,

$$A_2 = \{x \in \mathbb{R} \diagup \ x < 0\}$$

cela donne une représentation canonique,

$$\theta = \chi_{A_1} - \chi_{A_2}$$

cependant pour les ensembles,

$$B_1 = \{x \in \mathbb{R} / \ x < -2\}$$
$$B_2 = \{x \in \mathbb{R} / \ -2 \leq x < 0\}$$
$$B_1 = \{x \in \mathbb{R} / \ x \geq 0\}$$

on a alors pour ce cas,

$$\theta = -\chi_{B_1} - \chi_{B_2} + \chi_{B_3}$$

donc la représentation canonique exprime une représentation formelle bien définie. Rappelons aussi que dans la définition des fonctions étagées faite au chapitre précédent, ces derniéres sont des applications mesurables.

4.2 Intégration des fonctions étagées

Soit (X, Σ, μ) un espace mesuré. Comme premiére étape dans la construction et définition de l'intégrale de Lebesgue on commence par définir cette derniére pour la classe simple des fonctions étagées, sur des ensembles mesurables et de mesures finies. Par la suite on aura besoin de la propriété suivante sur les applications étagées.

Proposition 4.2.1 *Soit $\theta(x)$ une fonction étagée (mesurable) admettant les représentations*

$$\theta = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i} \ \wedge \ \theta = \sum_{j=1}^{m} \beta_j \chi_{B_j}$$

où les familles $\{A_i\}_{1 \leq i \leq n}$ et $\{B_j\}_{1 \leq j \leq m}$ sont des partitions mesurables du référentiel X, alors :

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(A_i) = \sum_{j=1}^{m} \beta_j \mu(B_j)$$

Preuve. Par définition des fonctions étagées, nous avons :

$$X = \bigcup_{i=1}^{n} A_i \ \wedge \ X = \bigcup_{j=1}^{m} B_j$$

où $\{A_i\}_{1 \leq i \leq n}$ et $\{B_j\}_{1 \leq j \leq m}$ sont des partitions mesurables de X. Considérons la partition mesurable de X définie par,

$$\{A_i \cap B_j\}_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}}$$

on a en particulier,

$$X = \underset{i,j}{\cup} \left(A_i \cap B_j\right)$$

par conséquent,

$$\begin{aligned}\mu\left(A_i\right) &= \mu\left(A_i \cap \left(\overset{m}{\underset{j=1}{\cup}} B_j\right)\right) \\ &= \mu\left(\overset{m}{\underset{j=1}{\cup}} \left(A_i \cap B_j\right)\right) = \sum_{j=1}^{m} \mu\left(A_i \cap B_j\right)\end{aligned}$$

cela implique,

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu\left(A_i\right) = \sum_{i,j} \alpha_i \mu\left(A_i \cap B_j\right)$$

De la même manière,

$$\sum_{j=1}^{m} \beta_i \mu\left(B_j\right) = \sum_{i,j} \beta_j \mu\left(A_i \cap B_j\right)$$

étant donné que, sur les ensembles $\left(A_i \cap B_j\right)$ les coefficients vérifient $\alpha_i = \beta_j$ on déduit alors l'identité,

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu\left(A_i\right) = \sum_{j=1}^{m} \beta_j \mu\left(B_j\right)$$

cela achéve la preuve. ■

Soit maintenant (X, Σ, μ) un espace mesuré et θ une application étagée (mesurable) sur X, on considére la représentation canonique de θ avec $\theta = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i}$ en assumant que,

$$\mu\left(A_i\right) < +\infty \ , \ \forall i \in \overline{1, n} \ , \ n \in \mathbb{N}^*$$

autrement dit θ est une fonction nulle sauf sur un ensemble de mesure finie.

Définition 4.2.1 *On défini alors l'intégrale de θ sur l'ensemble X par :*

$$\int_X \theta(x)\, d\mu(x) = \int_X \theta\, d\mu = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu\left(A_i\right)$$

Sur les ensembles de mesure finie on a la définition,

Définition 4.2.2 *Soit $E \in \Sigma$ un ensemble mesurable de mesure finie ; et $\theta = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i}$ une application étagée mesurable sur X, l'intégrale de θ sur E est définie par,*

$$\int_E \theta d\mu = \int_X \theta \chi_E d\mu = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu \left(A_i \cap E\right)$$

Remarquons que, d'aprés la proposition Prop 4.2.1 les définitions plus haut sont indépendantes des représentations de θ, et on a aussi par définition,

$$\int_E d\mu = \int_X \chi_E d\mu = \mu(E)$$

Une fois les définitions énonçées, on passe alors à mettre en évidence les propriétés de base de l'intégrale des fonctions étagées, dans les différentes propositions suivantes.

Proposition 4.2.2 *Soit $E \subseteq X$, $E \in \Sigma$ avec $\mu(E) < +\infty$ et θ, ψ deux fonctions étagées mesurables sur X, alors :*

$$\int_E (a\theta + b\psi)\, d\mu = a \int_E \theta d\mu + b \int_E \psi d\mu$$

Preuve. Posons ;

$$\theta = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i} \wedge \psi = \sum_{j=1}^{m} \beta_j \chi_{B_j}$$

étant donné que,

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = X = \bigcup_{j=1}^{m} B_j$$
$$\Longrightarrow \chi_{\underset{i}{\cup} A_i} = 1 = \chi_{\underset{j}{\cup} B_j}$$

des propriétés remarquables des fonctions caractéristiques (voir exercice (?) chapitre (?)),

$$\chi_{\underset{i}{\cup} A_i} = \chi_{\underset{j}{\cup} B_j} = \sum_{i=1}^{n} \chi_{A_i} = \sum_{j=1}^{m} \chi_{B_j}$$

d'où l'on a,

$$\theta = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \sum_{j=1}^{m} \chi_{A_i \cap B_j} = \sum_{i,j} \alpha_{ij} \chi_{E_{ij}}$$

avec,

$$E_{ij} = A_i \cap B_j$$

de la même façon on obtient,

$$\psi = \sum_{i,j} \beta_{ij} \chi_{E_{ij}}$$

par conséquent,

$$a\theta + b\psi = \sum_{i,j} \left(a\alpha_{ij} + b\beta_{ij} \right) \chi_{E_{ij}}$$

et par définition,

$$\int_E (a\theta + b\psi)\, d\mu = \sum_{i,j} \left(a\alpha_{ij} + b\beta_{ij} \right) \mu \left(E_{ij} \cap E \right) =$$

$$= a \sum_{i,j} \alpha_{ij} \mu \left(E_{ij} \cap E \right) + b \sum_{i,j} \beta_{ij} \mu \left(E_{ij} \cap E \right)$$

$$= a \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu \left(\bigcup_{j=1}^{m} \left(A_i \cap B_j \cap E \right) \right) + b \sum_{i,j} \beta_{ij} \mu \left(E_{ij} \cap E \right)$$

$$= a \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu \left(A_i \cap E \right) + b \sum_{j=1}^{m} \beta_j \mu \left(B_j \cap E \right)$$

$$= a \int_E \theta\, d\mu + b \int_E \psi\, d\mu$$

et la preuve est complète. ■

La proposition çi-dessus exprime le fait que l'intégrale de Lebesgue pour cette famille d'applications est **lineaire**, on obtiendra une généralisation pour les fonctions mesurables plus loins. En mesure et intégration, on rencontre souvent la notion de **presque partout** que l'on définit içi,

Définition 4.2.3 *On dit qu'une propriété P est vraie presque partout si, l'ensemble des points $x \in X$ où P est fausse est de mesure nulle.*

Exemple 4.2.1 *Soient $f : X \longrightarrow Y$ et $g : X \longrightarrow Y$ deux applications, avec (X, Σ, μ) un espace mesuré et (Y, τ_Y) espace topologique alors,*

$$f = g \quad (\mu.p.p)$$

on dit $f = g$ en mesure presque partout, si et seulement si,

$$\mu \left(\{ x \in X / \, f(x) \neq g(x) \} \right) = 0$$

On énonce maintenant d'autres propriétés usuelles de l'intégrale de Lebesgue pour les fonctions étagées, que nous généraliserons plus loins.

Proposition 4.2.3 *Soient θ, ψ deux fonctions étagées mesurables sur X, E un élément de Σ de mesure finie, alors :*

1.
$$\theta \leq \psi \quad (\mu.p.p) \Longrightarrow \int_E \theta d\mu \leq \int_E \psi d\mu$$

2.
$$\int_E |\theta + \psi| \, d\mu \leq \int_E |\theta| \, d\mu + \int_E |\psi| \, d\mu$$

3.
$$\left| \int_E \theta d\mu \right| \leq \int_E |\theta| \, d\mu$$

Preuve. Pour la premiére assertion on a,

1. Considérons une fonction étagée ω positive presque partout,

$$\omega \geq 0 \quad (\mu.p.p)$$
$$\Longrightarrow \mu(\{x \in X / \ \omega(x) < 0\}) = 0$$

par définition,

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} \omega_i \chi_{A_i}$$
$$\Longrightarrow \int_E \omega d\mu = \int_X \omega \chi_E d\mu = \sum_{i=1}^{n} \omega_i \mu (A_i \cap E)$$

lorsque, pour l'indice $1 \leq i \leq n$ les constantes verifient $\omega_i < 0$, on a alors,

$$\{x \in X / \ \omega(x) = \omega_i\} \subseteq \{x \in X / \ \omega(x) < 0\}$$
$$\Longrightarrow \mu(\{x \in X / \ \omega(x) = \omega_i\}) = 0$$

sachant que, c'est une représentation canonique, autrement dit

$$A_i = \{x \in X / \ \omega(x) = \omega_i\}$$

alors,

$$\mu(A_i \cap E) = 0$$

nous déduisons ainsi que,

$$\int_E \omega d\mu \geq 0$$

en particulier pour $\omega = (\psi - \theta)$, qui est aussi une application étagée mesurable, avec la représentation canonique déja exprimée dans la preuve de la Prop 4.2.2, donnée par :

$$\psi - \theta = \sum_{i,j} \left(\beta_{ij} - \alpha_{ij}\right) \chi_{E_{ij}}$$

d'aprés ce qui précéde,

$$(\psi - \theta) \geq 0 \quad (\mu.p.p) \Longrightarrow \int_E (\psi - \theta) \, d\mu \geq 0$$

de la linearité Prop 4.2.2 on a alors,

$$\int_E \psi d\mu \geq \int_E \theta d\mu$$

2. du fait que,

$$|\theta + \psi| \leq |\theta| + |\psi|$$

d'aprés (1) et Prop 4.2.2,

$$\int_E |\theta + \psi| \, d\mu \leq \int_E |\theta| \, d\mu + \int_E |\psi| \, d\mu$$

3. Finalement,

$$\left| \int_E \theta d\mu \right| = \left| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu \left(A_i \cap E\right) \right| \leq \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i| \, \mu \left(A_i \cap E\right) = \int_E |\theta| \, d\mu$$

d'où le résultat.

■

4.3 Intégration des fonctions mesurables bornées

Moyennant les définitions et propriétés précédentes sur l'intégration des applications étagées, on considére maintenant les fonctions mesurables bornées. Le processus d'intégration étant toujours défini sur un ensemble $E \in \Sigma$ de mesure finie.

Définition 4.3.1 *Soit f une fonction réelle bornée définie sur un ensemble $E \in \Sigma$ de mesure finie. On dit que f est intégrable au sens de Lebesgue sur E si et seulement si,*

$$\inf_{\psi \geq f} \left(\int_E \psi d\mu \right) = \sup_{\theta \leq f} \left(\int_E \theta d\mu \right)$$

et on écrit dans ce cas,

$$\int_E f(x) d\mu(x) = \int_E f d\mu =$$

$$= \inf_{\psi \geq f} \left(\int_E \psi d\mu \right) = \sup_{\theta \leq f} \left(\int_E \theta d\mu \right)$$

Les bornes supérieures et inférieures sont respectivement étendues aux ensembles des fonctions étagées inférieures et supérieures à la fonction f. L'intégrale de Lebesgue sur la droite réelle $\mathbb{R}$ des fonctions mesurables étagées et bornées sur un ensemble de mesure finie est aussi notée par,

$$\int_E \theta d\mu = \int_E \theta(x) d\mu(x) = \int_E \theta(x) dm(x) = \int_E \theta(x) dx$$

$$\int_E f d\mu = \int_E f(x) d\mu(x) = \int_E f(x) dm(x) = \int_E f(x) dx$$

Proposition 4.3.1 *Soit f une fonction bornée, définie sur un ensemble de mesure finie, alors f est mesurable si et seulement si,*

$$\inf_{\psi \geq f} \left(\int_E \psi d\mu \right) = \sup_{\theta \leq f} \left(\int_E \theta d\mu \right)$$

Preuve. Par hypothése,

$$\exists M \in \mathbb{R}_+^* / \ \left| f(x) \right| < M \ , \ \forall x \in E$$

pour la nécessité, soit $k \in \mathbb{Z}$ et $-n \leq k \leq n$ on pose,

$$E_k = \left\{ x \in E / \ M\frac{k}{n} \geq f(x) > M\frac{k-1}{n} \right\}$$

de la proposition Prop 3.1.3 les ensembles E_k sont mesurables, on a aussi ;

$$E_i \cap E_j = \varnothing \ , \ i \neq j \ , \forall i, j \in \overline{-n, n}$$

en particulier,

$$E = \bigcup_{k=-n}^{n} E_k$$

cela implique,

$$\mu(E) = \sum_{k=-n}^{n} \mu(E_k)$$

considérons les fonctions étagées définies par,

$$\psi_n(x) = \frac{M}{n} \sum_{k=-n}^{n} k\chi_{E_k}(x) \quad \wedge \quad \theta_n(x) = \frac{M}{n} \sum_{k=-n}^{n} (k-1)\chi_{E_k}(x)$$

clairement on a,

$$\theta_n(x) \leq f(x) \leq \psi_n(x) \quad , \forall x \in E, \ n \in \mathbb{N}^*$$

alors,

$$\inf_{\psi \geq f} \left(\int_E \psi d\mu \right) \leq \int_E \psi_n d\mu = \frac{M}{n} \sum_{k=-n}^{n} k\mu(E_k)$$

de même,

$$\sup_{\theta \leq f} \left(\int_E \theta d\mu \right) \geq \int_E \theta_n d\mu = \frac{M}{n} \sum_{k=-n}^{n} (k-1)\mu(E_k)$$

d'où,

$$0 \leq \inf_{\psi \geq f} \left(\int_E \psi d\mu \right) - \sup_{\theta \leq f} \left(\int_E \theta d\mu \right) \leq \frac{M}{n} \mu(E)$$

cela étant $\forall n \in \mathbb{N}^*$, par conséquent,

$$\inf_{\psi \geq f} \left(\int_E \psi d\mu \right) = \sup_{\theta \leq f} \left(\int_E \theta d\mu \right)$$

Réciproquement, assumons que,

$$\inf_{\psi \geq f} \left(\int_E \psi d\mu \right) = \sup_{\theta \leq f} \left(\int_E \theta d\mu \right)$$

cela implique,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \exists \psi_n \text{ et } \theta_n$$

telque,

$$\theta_n(x) \leq f(x) \leq \psi_n(x)$$

et,

$$\int_E \psi_n d\mu - \int_E \theta_n d\mu < \frac{1}{n}$$

pour ces deux suites, posons :

$$\psi^* = \inf_{n\in\mathbb{N}^*} \psi_n \quad \wedge \quad \theta^* = \inf_{n\in\mathbb{N}^*} \theta_n$$

de la proposition Prop 3.1.5 ψ^* et θ^* sont mesurables et satisfont,

$$\theta^*(x) \leq f(x) \leq \psi^*(x) \quad , \forall x \in E$$

Soit l'ensemble,

$$A = \{x \in E / \ \theta^*(x) < \psi^*(x)\}$$

définissons les ensembles,

$$A_\nu = \left\{x \in E / \ \theta^*(x) < \psi^*(x) - \frac{1}{\nu}\right\}$$
$$B_\nu = \left\{x \in E / \ \theta_n(x) < \psi_n(x) - \frac{1}{\nu}\right\}$$

de la double inclusion on montre aisemment que,

$$A = \bigcup_{\nu=1}^{\infty} A_\nu$$

ensuite,

$$A_\nu \subseteq B_\nu \ \text{ et } \ \mu(B_\nu) < \frac{\nu}{n}$$

puisque $n \in \mathbb{N}^*$ est arbitraire, alors :

$$\mu(A_\nu) = \mu(B_\nu) = 0$$

nous déduisons donc ;

$$\mu(A) = 0$$

ce qui nous permet de conclure que,

$$\theta^* = f = \psi^* \quad (\mu.p.p)$$

d'où f est une fonction mesurable. ■

Donc comme observation importante, de la proposition çi-dessus, les fonctions bornées mesurables sont intégrables au sens de Lebesgue et réciproquement. D'une manière analogue a l'intégration des applications étagées, nous avons les propriétés fondamentales suivantes de l'intégrale des fonctions mesurables bornées.

Proposition 4.3.2 *Soient f et g deux fonctions mesurables bornées sur $E \in \Sigma$ de mesure finie, alors :*

1.
$$\int_E (af + bg)\, d\mu = a \int_E f\, d\mu + b \int_E g d\mu$$

2.
$$f = g \quad (\mu.p.p) \Longrightarrow \int_E f\, d\mu = \int_E g d\mu$$

3.
$$f \leq g \quad (\mu.p.p) \Longrightarrow \int_E f\, d\mu \leq \int_E g d\mu$$

4.
$$\left| \int_E f\, d\mu \right| \leq \int_E |f|\, d\mu$$

5.
$$a \leq f(x) \leq b \Longrightarrow a\mu(E) \leq \int_E f\, d\mu \leq b\mu(E)$$

6.
$$A \cap B = \varnothing \ \wedge \ \max(\mu(A), \mu(B)) < +\infty \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow \int_{A \cup B} f\, d\mu = \int_A f\, d\mu + \int_B f\, d\mu$$

Preuve. Nous avons pour chaque assertion,

1. Comme,

$$\int_E af\, d\mu = \inf_{\psi' \geq af} \left(\int_E \psi' d\mu \right) = \inf_{a\psi \geq f} \left(\int_E a\psi d\mu \right) = \inf_{\psi \geq f} \left(\int_E a\psi d\mu \right)$$

$$= a \inf_{\psi \geq f} \left(\int_E \psi d\mu \right) = a \int_E f\, d\mu \ \ , \ a > 0, \ a \neq 0$$

lorsque le paramétre a vérifie $a < 0$, alors :

$$\int_E af\, d\mu = \sup_{\theta' \leq af} \left(\int_E \theta' d\mu \right) = \sup_{a\theta \leq af} \left(\int_E a\theta d\mu \right) = \sup_{\theta \geq f} \left(\int_E (-(-a))\, \theta d\mu \right)$$

$$= (-a)\sup_{\theta \geq f}\left(-\int_E \theta\, d\mu\right) = a \inf_{\theta \geq f}\left(\left(\int_E \theta\, d\mu\right)\right) = a\int_E f\, d\mu$$

cela étant, en utilisant proposition Prop 4.3.1. Ensuite en appliquant encore la propositions Prop 4.3.1 et la Prop 4.2.2 le résultat s'en suit.

2. On utilisant la propriété (1) çi-dessus, il est suffisant d'établir que,

$$\int_E (f-g)\, d\mu = 0$$

sachant que,

$$f - g = 0 \quad (\mu.p.p) \Longrightarrow$$
$$\forall \psi,\ \psi \geq (f-g) \Longrightarrow \psi \geq 0 \quad (\mu.p.p)$$

d'aprés Prop 4.2.3,

$$\int_E \psi\, d\mu \geq 0 \Longrightarrow \int_E (f-g)\, d\mu \geq 0$$

d'une manière similaire, en utilisant les fonctions étagées inférieures à f et Prop 4.3.1 on obtient,

$$\int_E (f-g)\, d\mu \leq 0$$

3. Démonstration identique au (2).

4. Déduction directe de (3), en utilisant,

$$-\left|f\right| \leq f \leq \left|f\right|$$

5. Conséquence similaire de (3).

6. Finalement, pour cette étape on a pour $A \cap B = \varnothing$,

$$\begin{aligned}\int_{A\cup B} f\, d\mu &= \int_X f\chi_{A\cup B} d\mu = \int_X (f\chi_A + f\chi_B)\, d\mu \\ &= \int_X f\chi_A d\mu + \int_X f\chi_B d\mu \\ &= \int_A f\, d\mu + \int_B f\, d\mu\end{aligned}$$

cela achève la démonstration.

■

La relation (6) dans la proposition plus haut est connue sous le terme célébre de **relation de Chasles** dans les propriétés de l'intégrale.

4.4 Intégration des fonctions mesurables positives

Dans cette section on considére les fonctions mesurables positives quelconques, **non nécéssairement bornées** et leur intégration sur des ensembles mesurables arbitraires, **non nécéssairement de mesure finie**.

Définition 4.4.1 *Soit (X, Σ, μ) un espace mesuré, E un élément de Σ de mesure arbitraire. Soit $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ une fonction mesurable sur X et positive, l'intégrale de Lebesgue de f sur E est l'élément de $\overline{\mathbb{R}}_+$, fini ou non, définie par :*

$$\int_E f\,d\mu = \sup_{\theta \leq f} \int_E \theta\,d\mu$$

La borne supérieure étant étendue à l'ensemble des applications étagées (mesurables) positives inférieures ou égales à f. Comme pour les fonctions des sections précédentes, on a les propriétés usuelles de base suivantes.

Proposition 4.4.1 *L'intégrale de Lebesgue des fonctions mesurables positives satisfait les propriétés suivantes,*

1.

$$f \leq g \Longrightarrow \int_E f\,d\mu \leq \int_E g\,d\mu$$

2.

$$E \subseteq F \Longrightarrow \int_E f\,d\mu \leq \int_F f\,d\mu$$

3.

$$\forall c \in \mathbb{R}_+ \;, \int_E (cf)\,d\mu = c\int_E f\,d\mu$$

4.

$$f(x) = 0,\ \forall x \in E \Longrightarrow \int_E f\,d\mu = 0 \;\;, \forall \mu(E) \in \overline{\mathbb{R}}_+$$

5.

$$\mu(E) = 0 \Longrightarrow \int_E f\,d\mu = 0 \;\;, \forall f(x) \in \overline{\mathbb{R}}_+$$

Preuve. Pour chaque assertion on a,

1. Nous avons l'inclusion,

$$\left\{\int_E \theta d\mu / \ \theta \leq f\right\} \subseteq \left\{\int_E \theta d\mu / \ \theta \leq g\right\}$$

de la définition Def 4.4.1,

$$\Longrightarrow \int_E f d\mu \leq \int_E g d\mu$$

2. Ensuite,

$$E \subseteq F \Longrightarrow \sum \alpha_i \mu (A_i \cap E) \leq \sum \alpha_i \mu (A_i \cap F)$$
$$\Longrightarrow \int_E \theta d\mu \leq \int_F \theta d\mu \ \ , \forall \theta \in \mathscr{S}$$

la classe $\mathscr{S}$ est l'ensemble des fonctions étagées sur X , encore de la définition Def 4.4.1 on déduit,

$$\int_E f d\mu \leq \int_F f d\mu$$

3. Directe, à partir de la définition Def 4.4.1.
4. Clairement,

$$\int_E f d\mu = 0 \int_E d\mu = 0.\mu(E) = 0 \ \ , \forall \mu(E) \in \overline{\mathbb{R}}_+$$

5. Pour tout $\theta \in \mathscr{S}(E)$ ensemble des applications étagées sur E on a,

$$\int_E \theta d\mu = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu (A_i \cap E)$$

d'où,

$$\mu(E) = 0 \Longrightarrow \mu(A_i \cap E) = 0 \ \ , \forall i \in \overline{1,n}$$
$$\Longrightarrow \int_E \theta d\mu = 0 \ \ , \forall \alpha_i \in \overline{\mathbb{R}}_+$$

finalement, de la définition Def 4.4.1,

$$\int_E f d\mu = 0$$

la preuve est compléte.

■

Un résultat via la propriété de mesure presque partout est,

Proposition 4.4.2 *Soit $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ une application réelle mesurable et positive alors,*

$$f = 0 \quad (\mu.p.p) \Longleftrightarrow \int_E f \, d\mu = 0$$

Preuve. Admettons que, $f = 0 \quad (\mu.p.p)$ alors,

$$\mathcal{N} = \{x \in E / \ f(x) > 0\} \Longrightarrow \mu(\mathcal{N}) = 0$$

soit,

$$E = (E - \mathcal{N}) \cup \mathcal{N}$$

$$\begin{aligned}
&\Longrightarrow f\chi_E = f\chi_{E-\mathcal{N}} + f\chi_{\mathcal{N}} \\
&\Longrightarrow \int_X f\chi_E d\mu = \int_X f\chi_{E-\mathcal{N}} d\mu + \int_X f\chi_{\mathcal{N}} d\mu \\
&\Longrightarrow \int_X f\chi_E d\mu = \int_X (0 + f\chi_{\mathcal{N}})\, d\mu = \int_{\mathcal{N}} f \, d\mu
\end{aligned}$$

et d'aprés le (5) de Prop 4.4.1,

$$\Longrightarrow \int_E f \, d\mu = 0$$

Réciproquement ; considérons les ensembles,

$$A_n = \left\{ x \in E / \ f(x) \geq \frac{1}{n} \right\}$$

alors,

$$f(x) \geq \frac{1}{n} \ , \forall x \in A_n \Longrightarrow f(x) \geq \frac{1}{n}\chi_{A_n}(x) \ \ , \forall x \in E$$

d'où, d'aprés Prop 4.4.1,

$$f \geq \frac{1}{n}\chi_{A_n} \Longrightarrow n \int_E f \, d\mu \geq \mu(A_n)$$

et à partir de l'hypothése on obtient,

$$\mu(A_n) = 0 \ \ , \forall n \in \mathbb{N}^*$$

ensuite nous avons,

$$\underset{n\geq 1}{\cup} A_n = \{x \in E / \, f(x) > 0\} = A$$

d'aprés la proposition Prop 3.3.1 sur la convergence des mesures,

$$A_n \subseteq A_{n+1} \Longrightarrow \mu\left(\underset{n\geq 1}{\cup} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = 0$$

finalement,

$$\mu(A) = 0 \Longrightarrow f = 0 \quad (\mu.p.p)$$

d'où le résultat. ■

4.4.1 Théorème de convergence monotone

Aprés avoir exposer les bases mathématiques de la théorie de la mesure et l'intégration au sens de Lebesgue, nous arrivons maintenant aux Théorèmes célébres de Lebesgue. Deux résultats fondamentaux sur lesquels cette théorie repose sont **les théorèmes de convergence monotone et dominée**. Pour démontrer le théorème de convergence monotone nous aurons besoin de la propriété çi-dessous, que nous énonçons et laissons la preuve comme exercice, dans la section consacrée à ces derniers. Le théorème de convergence dominée sera établi plus loins.

Proposition 4.4.3 *Soit (X, Σ, μ) un espace mesuré, θ une fonction étagée sur X et positive alors la fonction d'ensembles,*

$$\lambda : \begin{array}{c} \Sigma \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+ \\ E \longmapsto \lambda(E) = \int_E \theta \, d\mu \end{array}$$

est une mesure positive sur Σ.

Preuve. Dans la serie d'exercices. ■

Théorème 4.4.1 (Convergence monotone de Lebesgue) *Soit $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite croissante de fonctions mesurables positives sur X qui converge vers la fonction f en tout point $x \in X$, alors :*

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu = \int_X f \, d\mu$$

Preuve. De l'hypothése,

$$f_n(x) \leq f(x) \quad , \forall x \in X \; , \forall n \in \mathbb{N}^*$$

de Prop 4.4.1,

$$\int_X f_n(x)\, d\mu(x) \leq \int_X f(x)\, d\mu(x) \quad , \forall n \in \mathbb{N}^*$$

en particulier,

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu \leq \int_X f d\mu$$

maintenant, soit θ une fonction étagée sur X, par définition elle est mesurable, assumons aussi que θ est positive et verifie,

$$\theta(x) \leq f(x) \quad , \forall x \in X$$

Posons les ensembles,

$$A_n = \{x \in X \,/\, f_n(x) \geq \alpha\theta(x)\}$$

où α est un pramétre réel qui verifie $0 < \alpha < 1$, la suite d'ensembles $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ est alors formée d'ensembles emboités satisfaisant,

$$\bigcup_{n\geq 1} A_n = X$$

de la proposition Prop 4.4.3, l'application λ est une mesure positive. Donc elle admet la propriété de convergence, autrement dit d'aprés la Prop 3.3.1 on a,

$$\int_X \theta d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_{A_n} \theta d\mu$$

ensuite,

$$\int_{A_n} \alpha\theta d\mu \leq \int_{A_n} f_n d\mu \leq \int_X f_n d\mu$$

$$\Longrightarrow \alpha \lim_{n\to\infty} \int_{A_n} \theta d\mu \leq \lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu$$
$$\Longrightarrow \alpha \int_X \theta d\mu \leq \lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu \quad , \forall \alpha \in]0,1[$$

on déduit alors,

$$\int_X \theta d\mu \leq \lim_{n\to\infty}\int_X f_n d\mu$$

finalement,

$$\int_X f d\mu = \sup_{\theta\leq f}\int_X \theta d\mu \Longrightarrow \int_X f d\mu \leq \lim_{n\to\infty}\int_X f_n d\mu$$

cela achève la démonstration. ■

Dans l'énonçé du théorème de convergence monotone de Lebesgue Théo 4.4.1, la convergence de la suite $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ vers la fonction f sur X est prise dans le sens ordinaire ou ponctuel, en écrivant :

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \quad ,\forall x\in X$$

d'aprés la proposition Prop 3.1.5 du chapitre (3) la limite $f(x)$ est mesurable sur X. Le théorème nous affirme ainsi que,

$$\lim_{n\to\infty}\int_X f_n d\mu = \int_X \lim_{n\to\infty} f_n d\mu = \int_X f d\mu$$

Une conséquence directe du théorème de convergence monotone de Lebesgue, que nous exprimons par les lettres **TCM** est la propriété d'additivité totale de l'intégrale pour les fonctions mesurables positive. On retrouve un résultat similaire dans la théorie des series pour l'intégration terme à terme, mais avec des conditions beaucoup plus fortes de convergence uniforme de la serie de fonctions.

Proposition 4.4.4 (Additivité de l'intégrale) *Soit $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de fonctions mesurables positives sur X, alors :*

$$\sum_{i=1}^{\infty}\int_X f_i d\mu = \int_X \left(\sum_{i=1}^{\infty} f_i\right) d\mu$$

Preuve. Les fonctions $f_i : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ sont mesurables $\forall i\in\mathbb{N}^*$, du théorème d'approximation Théo 3.2.1 nous avons,

$$\forall i\in\mathbb{N}^*,\ \exists\theta_{ik}\in\mathcal{S}(X),\ \ \theta_{ik}\uparrow \diagup \theta_{ik}\longrightarrow f_i$$

de l'additivité finie de l'intégrale pour les applications étagées Prop 4.2.2 on a,

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \sum_{i=1}^{n}\int_X f_{ik} d\mu = \int_X \sum_{i=1}^{n} f_{ik} d\mu$$

du **TCM** Théo 4.4.1 on déduit alors,

$$\sum_{i=1}^{n}\int_X f_i d\mu = \int_X \sum_{i=1}^{n} f_i d\mu$$

une deuxiéme application du **TCM** nous donne,

$$\sum_{i=1}^{\infty}\int_X f_i d\mu = \int_X \sum_{i=1}^{\infty} f_i d\mu$$

■

Une autre relation d'additivité totale sur les ensembles deux à deux disjoints, autrement dit une généralisation de la **relation de Chasles** pour les intégrales est la proposition suivante,

Proposition 4.4.5 *Soit* $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ *une fonction positive et mesurable sur* X *et* $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ *une suite d'éléments de* Σ *deux à deux disjoints, telque :*

$$\bigcup_{n\geq 1} E_n = E$$

alors,

$$\int_E f\, d\mu = \sum_{i=1}^{\infty}\int_{E_i} f\, d\mu$$

Preuve. Exercice. Déduction immédiate de Prop 4.4.4. ■

Le Lemme de Fatou que nous allons établir reste célébre, il est toujour associé au théorème de convergence dominée ou le deuxiéme théorème de Lebesgue, que nous démontrons plus loins dans la section sur les fonctions sommables. Nous utiliserons ce lemme pour établir ce drenier.

Lemme 4.4.1 (Fatou) *Soit* $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ *une suite de fonctions mesurables positives sur* X*, avec* $f_n : X \longrightarrow [0,+\infty]$ *,* $n \in \mathbb{N}^*$*, alors :*

$$\int_X \underline{\lim} f_n d\mu \leq \underline{\lim} \int_X f_n d\mu$$

Preuve. Etant donné que,

$$\inf_{k\geq n} f_k \leq f_k \quad ; \forall k \geq n$$

de la proposition Prop 4.4.1,

$$\begin{aligned}\int_X \inf_{k\geq n} f_k d\mu &\leq \int_X f_k d\mu \ \ ,\forall k \geq n \\ &\leq \inf_{k\geq n} \int_X f_k d\mu \ \ ,\forall n \in \mathbb{N}^* \\ &\leq \sup_{n\in\mathbb{N}^*}\left(\inf_{k\geq n}\int_X f_k d\mu\right) = \underline{\lim} \int_X f_n d\mu\end{aligned}$$

maintenant de la Prop 3.1.5, $\left\{\inf_{k\geq n} f_k\right\}$ est une suite croissante de fonctions positives mesurables, du **TCM** Théo 4.4.1 nous avons alors,

$$\begin{aligned}\int_X \lim_{n\to\infty}\left(\inf_{k\geq n} f_k\right) d\mu &= \lim_{n\to\infty}\int_X \inf_{k\geq n} f_k d\mu \\ &\leq \underline{\lim}\int_X f_n d\mu\end{aligned}$$

d'où,

$$\int_X \underline{\lim} f_n d\mu \leq \underline{\lim}\int_X f_n d\mu$$

le résultat s'en suit. ■

Une variante du théorème de convergence monotone **TCM** de Lebesgue pour les suite décroissantes est la suivante, nous la laissons comme exercice.

Proposition 4.4.6 *Soit* $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ *une suite de fonctions mesurables positives sur* X*. On suppose que la suite est décroissante et converge vers* $f(x)$, $\forall x \in X$ *alors,*

$$\int_X f_1(x)\, d\mu(x) < +\infty \Longrightarrow \lim_{n\to\infty}\int_X f_n(x)\, d\mu(x) = \int_X f(x)\, d\mu(x)$$

Preuve. Exercice. Application directe du **TCM** Théo 4.4.1 de Lebesgue. ■

4.5 Les Fonctions Sommables

Observons que dans l'integration au sens de Lebesgue, nous avons procédé par étape, nous avons d'abords introduit l'integrale des fonctions étagées aves les différentes propriétés inéhrentes à ces derniéres, puis l'intégration des fonctions mesurables et bornées sur des ensembles de mesures finies. Ensuite l'intégrale des fonctions positives mesurables sur des ensembles mesurables de mesures arbitraires. Evidemment, avec les démonstrations extensives des différentes propriétés exposées au fur et à mesure dans nôtre analyse. Dans cette section le concept de fonction sommable va nous permettre d'étendre l'intégrale au sens de Lebesgue pour les fonctions mesurables arbitraires sur X. Et finalement établir le deuxiéme théorème de Lebesgue, dit **théorème de convergence dominée** que l'on écrit par **TCD**.

Définition 4.5.1 *Soit (X, Σ, μ) un espace mesuré, et f une fonction mesurable positive sur X, soit $E \in \mathscr{P}(X)$ un ensemble mesurable, on dit alors que f est sommable sur E si,*

$$\int_E f\, d\mu < +\infty$$

Une propriété de caractérisation fondamentale des fonctions sommables est donnée dans la proposition suivante,

Proposition 4.5.1 *Soit $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ une fonction positive et mesurable sur X et $E \in \mathscr{P}(X)$ un ensemble mesurable. Alors f est sommable sur E si et seulement si, il existe une suite $\{\theta_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ croissante de fonctions étagées positives et sommables qui converge vers f telque,*

$$\lim_{n\to\infty} \int_E \theta_n d\mu < +\infty$$

et dans ce cas on a,

$$\int_E f\, d\mu = \sup_{\theta \le f} \int_E \theta\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_E \theta_n d\mu$$

Preuve. Nécessité, Admettons que f est sommable,

$$\int_E f\, d\mu < +\infty$$

du théorème d'approximation des fonctions mesurables positives Théo 3.2.1 on a,

$$\exists \{\theta_n\}_{n\in\mathbb{N}^*} \in \mathscr{S}(E),\ \ \theta_n \ge 0,\ \ \theta_n \uparrow \ / \theta_n \le f \ \ , \forall n \in \mathbb{N}^*$$

et telque,

$$\lim_{n\to\infty} \theta_n(x) = f(x) \ \ , \forall x \in E$$

par conséquent,

$$\int_E \theta_n d\mu \leq \int_E f d\mu \quad , \forall n \in \mathbb{N}^*$$

donc les éléments de la suite $\{\theta_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont sommables, en particulier,

$$\lim_{n\to\infty} \int_E \theta_n d\mu < +\infty$$

La suite $\int_E \theta_n d\mu$ étant croissante et majorée, $\lim\limits_{n\to\infty} \int_E \theta_n d\mu$ existe. finalement,

$$\int_E f d\mu = \sup_{\theta\leq f} \int_E \theta d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_E \theta_n d\mu$$

La réciproque est évidente, en utilisant **TCM,** le théorème de convergence monotone de Lebesgue Théo 4.4.1. ■

Nous aurons besoin du résultat çi-dessous afin de pouvoir établir certaines propriétés de base pour les applications sommables,

Proposition 4.5.2 *Soit $E \in \Sigma$ un ensemble mesurable, et*

$$f : E \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$$

une fonction sommable alors,

$$\lim_{\mu(F)\longrightarrow 0} \int_F f(x) d\mu(x) = 0$$

Preuve. Montrons en utilisant la définition de la limite que :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 / \ \forall F \subset E, \ F \in \Sigma, \ \mu(F) < \delta \Longrightarrow \int_F f(x) d\mu(x) < \varepsilon$$

On considére la suite des coupures suivantes,

$$f_n(x) = \begin{cases} f(x) & , f(x) \leq n \\ n & , f(x) > n \end{cases}$$

la suite $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, formée de fonctions mesurables, du **TCM** de Lebesgue Théo 4.4.1,

$$\lim_{n\to\infty} \int_F f_n(x) d\mu(x) = \int_F f d\mu < +\infty$$

du critére de convergence on a,

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N} / \int_F f_{n_0} d\mu > \int_F f\, d\mu - \frac{\varepsilon}{2}$$

sachant que,

$$\int_F f_{n_0} d\mu \leq n_0 \mu(F)$$

alors, pour le choix de,

$$n_0 \mu(F) < \frac{\varepsilon}{2}$$

ce qui est équivalent à,

$$\mu(F) < \delta = \frac{\varepsilon}{2n_0}$$

on obtient,

$$\int_F f(x)\, d\mu(x) < \varepsilon$$

d'où le résultat. ■

La proposition Prop 4.5.2 çi-dessus exprime le fait que, l'intégrale de Lebesgue est absolument continue par rapport aux fonctions positives, mesurables et sommables.

4.5.1 Théorème de Convergence Dominée

Maintenant, on peut étendre l'intégrale de Lebesgue aux classes quelconques de fonctions mesurables réelles par l'intermédiaire des fonctions sommables, on procéde comme suit,

Définition 4.5.2 *Soit* (X, Σ, μ) *un espace mesuré et* $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ *une fonction mesurable sur* X*. On dit alors que* f *est sommable sur* $E \in \Sigma$*, si et seulement si les fonctions :*

$$f^+ = \frac{|f| + f}{2} \ \wedge \ f^- = \frac{|f| - f}{2}$$

sont sommables sur E, dans ce cas on pose,

$$\int_E f\, d\mu = \int_E f^+ d\mu - \int_E f^- d\mu$$

Les fonctions f^+ et f^- sont appelées les enveloppes positives de l'application f, ce sont des fonctions mesurables d'aprés les résultats du chapitre (2), elles sont aussi positives et verifient l'identité $f = f^+ - f^-$. Exposons ensuite les propriétés fondamentales des fonctions sommables.

Proposition 4.5.3 *Soit $E \in \Sigma$ et f une fonction sommable sur E, alors $\left|f\right|$ est sommable et,*

$$\left|\int_E f\,d\mu\right| \leq \int_E \left|f\right| d\mu$$

Preuve. Exercice, direct de Prop 4.4.4. ■

Remarque 4.5.1 *Lorsque $\left|f\right|$ est sommable cela n'imlique point que f est sommable. D'aprés les résultats du chapitre (2) Exercice(?) il se peut que f ne soit pas mesurable. En revanche si $\left|f\right|$ est sommable et f mesurable cela implique alors que f est sommable.*

Proposition 4.5.4 *Soient f et g deux fonctions sommables sur $E \in \Sigma$ alors les fonctions (af), $a \in \mathbb{R}$ et $(f+g)$ sont sommables et,*

$$\int_E af\,d\mu = a\int_E f\,d\mu \ \wedge\ \int_E (f+g)\,d\mu = \int_E f\,d\mu + \int_E g\,d\mu$$

Preuve. Démonstration directe à partir des définitions. ■

La propriété çi-dessus exprime la linéarité de l'intégrale de Lebesgue pour les applications sommables. Une fois les définitions et quelques propriétés des fonctions sommables établies nous somme en mesure maintenant d'énonçer et démontrer le deuxiéme théorème de Lebesgue, dit théorème de convergence dominée de Lebesgue, qu'on écrit **TCD**.

Théorème 4.5.1 (Convergence dominée de Lebesgue) *Soit $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de fonctions mesurables sur X convergeant ponctuellement vers la fonction f sur X. Soit g une fonction positive et sommable telque,*

$$\left|f_n(x)\right| \leq g(x) \quad, \forall x \in X,\ \ \forall n \in \mathbb{N}^*$$

alors la limite f est sommable sur X et on a :

$$\lim_{n\longrightarrow\infty}\int_X \left|f_n - f\right| d\mu = 0 \ \wedge\ \lim_{n\longrightarrow\infty}\int_X f_n d\mu = \int_X f\,d\mu$$

Preuve. Etant donné que,

$$\left|f_n(x)\right| \leq g(x) \quad, \forall x \in X,\ \ \forall n \in \mathbb{N}^*$$

donc $\left|f\right|$ qui est mesurable est aussi sommable. On note aussi que les fonctions suivantes sont toutes positives et mesurables,

$$2g - \left|f_n - f\right| \quad, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

du lemme de Fatou Lemme 4.4.1 on a alors,

$$\begin{aligned}\int_X 2g\,d\mu &= \int_X \underline{\lim}\left(2g - \left|f_n - f\right|\right) d\mu \\ &\leq \underline{\lim} \int_X \left(2g - \left|f_n - f\right|\right) d\mu \\ &= \int_X 2g\,d\mu + \underline{\lim}\left(-\int_X \left|f_n - f\right| d\mu\right)\end{aligned}$$

nous déduisons de cela que,

$$-\overline{\lim} \int_X \left|f_n - f\right| d\mu \geq 0 \Longrightarrow \overline{\lim} \int_X \left|f_n - f\right| d\mu \leq 0$$

$$\Longrightarrow 0 \leq \underline{\lim} \int_X \left|f_n - f\right| d\mu \leq \overline{\lim} \int_X \left|f_n - f\right| d\mu \leq 0$$

d'où,

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \int_X \left|f_n - f\right| d\mu = 0$$

Finalement de Prop 4.5.3,

$$\left|\int_X f_n d\mu - \int_X f\,d\mu\right| = \left|\int_X (f_n - f)\,d\mu\right| \leq \int_X \left|f_n - f\right| d\mu$$

par conséquent de la limite précédente on déduit directement,

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f\,d\mu$$

la preuve est achevée. ■

4.6 Exercices

Exercice 4.6.1 *Soit* (X, Σ, μ) *un espace mesuré et* $E \in \Sigma$*, montrer que l'application,*

$$\lambda : \begin{array}{c} \Sigma \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+ \\ A \longmapsto \lambda(A) = \mu(A \cap E) \end{array}$$

est une mesure sur Σ*.*

Exercice 4.6.2 *Etablir les propriétés suivantes :*

1.
$$X \in \mathscr{P}(\mathbb{R}),\ X \cong \mathbb{N} \Longrightarrow m^*(X) = 0$$

2.
$$E \in \mathscr{P}(\mathbb{R}),\ m^*(E) = 0 \Longrightarrow E \in \mathfrak{L}_{\mathbb{R}},(\wedge)\quad m(E) = 0$$

3. *On assume que,* $E \in \mathfrak{L}_{\mathbb{R}},(\wedge)\quad m(E) = 0$, *montrer que :*
$$\forall A \in \mathscr{P}(\mathbb{R}), A \subset E \Longrightarrow A \in \mathfrak{L}_{\mathbb{R}},(\wedge)\ m(A) = 0$$

4. *Même question pour,*
$$\forall A \in \mathscr{P}(\mathbb{R}),\ m^*(A) = m^*(A \cup E) = m^*(A - E)$$

Exercice 4.6.3 *Considérer les preuves détaillées aux questions suivantes :*

1. *Montrer que le compacte* $[0,1]$ *est mesurable au sens de Lebesgue.*
2. *Utiliser la définition pour calculer* $m([0,1])$.
3. *En déduire que* $[0,1] \ncong \mathbb{N}$.
4. *Généraliser les résultats çi-dessus aux compactes* $[a,b]$.

Exercice 4.6.4 *Soit* (X,Σ,μ) *un espace mesuré, montrer l'identité :*
$$\forall A, B \in \Sigma,\ \mu(A) + \mu(B) = \mu(A \cap B) + \mu(A \cup B)$$

Exercice 4.6.5 *Soit la famille* $\mathfrak{J}$ *des intervalles de la droite réelle* $\mathbb{R}, \mathfrak{J} \subset \mathscr{P}(\mathbb{R})$. *Etablir que :*
$$\forall I \in \mathfrak{J},\ m^*(I) = \ell(I)$$

Exercice 4.6.6 *Soit* (X,Σ,μ) *un espace mesuré et* $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ *une suite d'éléments de* Σ, *montrer que :*

1.
$$\mu(\underline{\lim} A_n) \leq \underline{\lim}\mu(A_n)$$

2.
$$\mu\left(\underset{n\geq 1}{\cup} A_n\right) < +\infty \Longrightarrow \mu\left(\overline{\lim} A_n\right) \geq \overline{\lim}\mu(A_n)$$

3.
$$\mu(X) < +\infty \Longrightarrow \mu\left(\lim_{n\longrightarrow\infty} A_n\right) = \lim_{n\longrightarrow\infty}\mu(A_n)$$

5

Les Mesures Produit et Théorème de Tonelli-Fubini

Dans ce chapitre nous présentons les méthodes constructives pour définir les espaces mesurés produits, les mesures produits sur ces espaces et les espaces mesurés produits associés. Dans ce contexte le résultat fondamental pour ces espaces produits est le Théorème fondamental de Tonelli-Fubini qui nous permet d'intervertir l'ordre d'intégration dans les intégrales double et d'évaluer ces dernière par l'intermédiaire d'intégrales simples.Dans les cours d'analyse et de mathématiques appliquées cette procédure est souvent utilisée et admise par nos étudiants. Nous donnons donc ici dans les détails la démonstration de ce Théorème dans son contexte naturel de la théorie de la mesure et de l'intégration où il a été développé.

5.1 Produit d'espaces mesurables

Donnons les définitions suivantes,

Définition 5.1.1 *Soient (X, Σ_1) et (X, Σ_2) deux espaces mesurables. les rectangles mesurables sont les sous-ensembles $A \times B$ du produit cartésien $X \times Y$ tel que $A \in \Sigma_1$ et $B \in \Sigma_2$, autrement dit A et B sont respectivement des ensembles mesurables de Σ_1 et Σ_2. Toute réunion finie de rectangles mesurables est appelée pavé élémentaire.*

Définition 5.1.2 *Soit la famille des rectangles mesurables,*

$$\mathscr{R} = \{A \times B \subseteq X \times Y \diagup A \in \Sigma_1 \text{ et } B \in \Sigma_2\}$$

par définition la σ-algèbre engendrée par la famille des rectangles mesurables est notée,

$$\Sigma_1 \times \Sigma_2 = \sigma(\mathscr{R})$$

et l'espace mesurable produit est le couple $(X \times Y, \Sigma_1 \times \Sigma_2)$.

Selon les formules usuelles des ensembles produits cartésiens, rappelons les propriétés suivantes,

$$[\mathbf{a}] : (A_1 \times A_2) \cap (B_1 \times B_2) = (A_1 \cap B_1) \times (A_2 \cap B_2)$$
$$[\mathbf{b}] : \overline{(A \times B)} = \left(\overline{A} \times B\right) \cup \left(A \times \overline{B}\right) \cup \left(\overline{A} \times \overline{B}\right)$$

nous déduisons alors que si $\mathscr{A}_1$ et $\mathscr{A}_2$ sont deux algèbres alors $\mathscr{A}_1 \times \mathscr{A}_2$ n'est pas une algèbre de rectangles. On montre toute fois que c'est une semi-algèbre (voir exercices). Néanmoins la proposition suivante valide cette propriété pour les pavés mesurables.

Proposition 5.1.1 *Tout pavé élémentaire est une réunion disjointe de rectangles mesurables et la classe des pavés élémentaires de $\mathscr{P}(X \times Y)$ est une algèbre.*

Preuve. La démonstration est identique à la proposition Prop 2.1.3. Soit

$$\bigcup_{i=1}^{n} (A_{1i} \times A_{2i})$$

un pavé élémentaire, on a

$$\forall\ i = \overline{1,n}\ ,\ A_{1i} \times A_{2i} \in \Sigma_1 \times \Sigma_2$$

alors, la réunion disjointe

$$\bigcup_{i=1}^{n} B_i$$

définie par,

$$B_i = (A_{1i} \times A_{2i}) - \bigcup_{k=1}^{n-1} (A_{1k} \times A_{2k})$$

vérifie exactement

$$\bigcup_{i=1}^{n} (A_{1i} \times A_{2i}) = \bigcup_{i=1}^{n} B_i$$

il reste uniquement à vérifier que $\forall 1 \leq i \leq n$ les éléments B_i sont des rectangles mesurables. En effet d'aprés les relations $[\mathbf{a}]$ et $[\mathbf{b}]$ plus haut, toute réunion de pavés élémentaires est un pavé élémentaire et encore de $[\mathbf{a}]$ et $[\mathbf{b}]$ la famille est fermée pour la complémentation. ■

Nous avons ensuite les définitions suivantes des coupures.

Définition 5.1.3 *Soit $E \in \mathscr{P}(X \times Y)$ et (x, y) un point de $X \times Y$. Alors la coupure de E selon $x \in X$ est le sous-ensemble $E_x \in \mathscr{P}(Y)$ défini par,*

$$E_x = \{y \in Y /\ (x, y) \in E\}$$

et celle donnée selon $y \in Y$ est $E_y \in \mathscr{P}(X)$ définie par

$$E_y = \{x \in X /\ (x, y) \in E\}$$

on a la proposition suivante,

Proposition 5.1.2 *Les coupures selon x et y des ensembles mesurables sont mesurables, autrement dit,*

$$\forall E \in \Sigma_1 \times \Sigma_2$$

$$E_x \in \Sigma_2 \,, \forall x \in X \quad et \quad E_y \in \Sigma_1 \,, \forall y \in Y$$

Preuve. Soit $E \in \Sigma_1 \times \Sigma_2$ un ensemble mesurable. Pour établir la proposition il esy suffisant d'admettre que E est des types suivants :

$$\begin{aligned}
&[1] : E = E_i = A_i \times B_i \ , \ A_i \in \Sigma_1, B_i \in \Sigma_2 \\
&[2] : E = \overline{E_i} \\
&[3] : E = \underset{i \geq 1}{\cup} E_i \\
&[4] : E = \underset{i \geq 1}{\cap} E_i
\end{aligned}$$

où les E_i représentent des rectangles mesurables. En effet, étant donné que la classe d'éléments de $\mathscr{P}(X \times Y)$ qui vérifie $[1],[2],[3],[4]$ est une $\sigma-$algèbre qui contient les rectangles mesurables, alors par définition cette classe contient $\Sigma_1 \times \Sigma_2$. Ensuite à partir des définitions nous avons les propriétés suivantes,

$$\chi_{E_x}(y) = \chi_E(x, y)$$

$$\left(\overline{E}\right)_x = \overline{(E_x)}$$

$$(\cup E_\alpha)_x = \cup (E_\alpha)_x$$

nous déduisons donc, pour le type $[1]$,

$$E = E = A \times B \ , \ A \in \Sigma_1, B \in \Sigma_2$$

$$\forall x \in X, \ E_x = \{y \in Y / \ (x, y) \in E\} = (A \times B)_x$$

$$\left.\begin{aligned}
x \in A \Longrightarrow E_x = B \\
x \notin A \Longrightarrow E_x = \varnothing
\end{aligned}\right\} \Longrightarrow E_x \in \Sigma_2$$

pour le type $[2]$, $E = \overline{(A \times B)}$, alors

$$\begin{aligned}
E_x &= \left(\overline{A \times B}\right)_x = \left(\left(\overline{A} \times B\right) \cup \left(\overline{A} \times \overline{B}\right) \cup \left(A \times \overline{B}\right)\right)_x \\
&= \left(\overline{A} \times B\right)_x \cup \left(\overline{A} \times \overline{B}\right)_x \cup \left(A \times \overline{B}\right)_x
\end{aligned}$$

d'aprés la propriété $[1]$ précédente nous déduisons que $E_x \in \Sigma_2$.

$[3]$: lorsque $E = \underset{i\geq 1}{\cup} E_i$ on a

$$\chi_{E_x}(y) = \chi_E(x,y) = \chi_{\underset{i\geq 1}{\cup} E_i}(x,y) =$$

$$= \sup_{i\in\mathbb{N}^*} \chi_{E_i}(x,y) = \sup_{i\in\mathbb{N}^*} \chi_{(E_i)_x}(y)$$

dans cette étape nous avons utilisé la propriété de la réunion disjointe Prop 2.1.3 du chapitre II. D"aprés $[1]$ tous les $(E_i)_x \in \Sigma_2$, par conséquent les $\chi_{(E_i)_x}$ sont toutes des fonctions mesurables d'aprés Prop 3.1.5 $\sup_{i\in\mathbb{N}^*} \chi_{(E_i)_x}$ est mesurable, en particulier

$$\chi_{E_x} \text{ fonction mesurable } \Longrightarrow E_x \in \Sigma_2$$

$[4]$: pour le type $E = \underset{i\geq 1}{\cap} E_i$, on écrit

$$\chi_{E_x}(y) = \chi_E(x,y) = \chi_{\underset{i\geq 1}{\cap} E_i}(x,y) =$$

$$= \inf_{i\in\mathbb{N}^*} \chi_{E_i}(x,y) = \inf_{i\in\mathbb{N}^*} \chi_{(E_i)_x}(y)$$

d'une maniére analogue on conclu que $E_x \in \Sigma_2$. Finalement, on établit par un raisonnement symétrique pour les coupures selon y que $\forall y \in Y,\ E_y \in \Sigma_1$. ■

Nous aurons besoin aussi des coupures de fonctions dites fonctions partielles, dont la définition et la mesurabilité est donnée par la proposition çi-dessous,

Proposition 5.1.3 *Soit f une fonction mesurable définie sur l'espace mesurable $(X \times Y, \Sigma_1 \times \Sigma_2)$ dans l'espace topologique (Z, τ_Z). Pour $x_0 \in X$ et $y_0 \in Y$ fixés, on définit les fonctions dites partielles,*

$$f_{x_0} : \begin{array}{c} Y \longrightarrow Z \\ y \longrightarrow f_{x_0}(y) = f(x_0, y) \end{array}$$

et

$$f_{y_0} : \begin{array}{c} X \longrightarrow Z \\ y \longrightarrow f_{y_0}(x) = f(x, y_0) \end{array}$$

alors f_{x_0} et f_{y_0} sont mesurables.

Preuve. Etant donné que f est mesurable, alors pour tout ouvert $V \in \tau_Z$ l'ensemble,

$$E = \{(x,y) \in X \times Y / f(x,y) \in V\} = f^{-1}(V)$$

est mesurable. du fait que nous avons :

$$\begin{aligned} E_{x_0} &= \{y \in Y / \ (x_0, y) \in E\} = \\ &= \{y \in Y / f(x_0, y) \in V\} = f_{x_0}^{-1}(V) \end{aligned}$$

alors de la proposition précédente Prop 5.1.2 la fonction f_{x_0} est mesurable. De la même maniére on montre que f_{y_0} est mesurable. ■

5.2 Les classes monotones et les mesures $\sigma-$finies

On peut retrouver plusieures approches pour la démonstration des théorèmes de Fubini et de Tonelli dans différentes reférences standards sur le sujet, cependant l'approche par les classes monotones remonte à P.R.Halmos dans [], elle est restée donc classique est usuelle dans le domaine.

Définition 5.2.1 *Soit X un ensemble arbitraire et $\mathscr{M}$ une famille de sous ensembles de X, on dit que $\mathscr{M}$ est une classe monotone si :*

1.

$$\forall \{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathscr{M} \ , \ A_n \uparrow \Longrightarrow \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathscr{M}$$

2.

$$\forall \{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathscr{M} \ , \ A_n \downarrow \Longrightarrow \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathscr{M}$$

Les notations $A_n \uparrow$ et $A_n \downarrow$ sont respectivement pour les suites croissantes et décroissantes d'éléments de la classe $\mathscr{M}$. Nous avons alors les propriétés suivantes,

Proposition 5.2.1 *Toute $\sigma-$algèbre est une classe monotone ; l'intersection arbitraire de classes monotones est une classe monotone,*

$$\cap \mathscr{M}_i = \mathscr{M}$$

Preuve. Exercice ■

Proposition 5.2.2 *Soit $\mathscr{A}$ une algèbre d'ensembles alors $\mathscr{A}$ est une $\sigma-$algèbre si et seulement si $\mathscr{A}$ est une classe monotone.*

Preuve. Exercice ■

Proposition 5.2.3 *Soit $\mathscr{A}$ une algèbre d'ensembles, alors nous avons l'identité des classes,*

$$\sigma(\mathscr{A}) = \mathscr{M}(\mathscr{A})$$

Preuve. De la proposition Prop 5.2.1, $\sigma(\mathscr{A})$ et $\mathscr{M}(\mathscr{A})$ sont des classes monotones en particulier nous avons,

$$\mathscr{M}(\mathscr{A}) \subseteq \sigma(\mathscr{A})$$

Montrons ensuite l'autre inclusion. Pour cela il est suffisant d'établir que $\mathscr{M}(\mathscr{A})$ est une $\sigma-$algèbre. Et de la proposition Prop 5.2.2 il est suffisant d'établir que $\mathscr{M}(\mathscr{A})$ est une algèbre. Posons pour $E \in \mathscr{M}(\mathscr{A})$:

$$\mathscr{M}_E = \{F \in \mathscr{M}(\mathscr{A}) \,/\, E - F,\ F - E,\ \text{and } E \cap F \in \mathscr{M}(\mathscr{A})\}$$

on verifie aisement que,

$$\begin{aligned} &[1] : \mathscr{M}_E \text{ est une classe monotone} \\ &[2] : F \in \mathscr{M}_E \Longleftrightarrow E \in \mathscr{M}_F \\ &[3] : E \in \mathscr{A} \Longrightarrow \mathscr{A} \subset \mathscr{M}_E \subseteq \mathscr{M}(\mathscr{A}) \end{aligned}$$

en particulier,

$$\mathscr{M}(\mathscr{A}) \subseteq \mathscr{M}_E$$

et donc

$$\mathscr{M}_E = \mathscr{M}(\mathscr{A})$$

ensuite d'aprés $[3]$ çi-dessus,

$$\forall A \in \mathscr{A},\ A \in \mathscr{M}(\mathscr{A}) \text{ et } \mathscr{M}_A = \mathscr{M}(\mathscr{A})$$

d'où :

$$\forall B \in \mathscr{M}(\mathscr{A}) \Longrightarrow B \in \mathscr{M}_A$$

et selon la relation $[2]$ cela implique que,

$$A \in \mathscr{M}_B$$

nous concluons ainsi que,

$$\mathscr{A} \subset \mathscr{M}_B$$

et un raisonnement analogue à $[3]$ on déduit que,

$$\forall B \in \mathscr{M}(\mathscr{A}),\ \ \mathscr{M}_B = \mathscr{M}(\mathscr{A})$$

en conclusion, si :

$$A \in \mathscr{M}(\mathscr{A}) \text{ et } B \in \mathscr{M}(\mathscr{A})$$

alors,

$$A \in \mathscr{M}_B \text{ et } B \in \mathscr{M}_A$$

de la définition de $\mathscr{M}_A$ et $\mathscr{M}_B$, nous vérifions aisement que,

$$\begin{cases} A-B,\ B-A,\ A\cap B \in \mathscr{M}(\mathscr{A}) \\ \varnothing \text{ et } X \in \mathscr{M}(\mathscr{A}) \end{cases}$$

d'où $\mathscr{M}(\mathscr{A})$ est une algèbre. Des observations faites au début $\mathscr{M}(\mathscr{A})$ est alors une $\sigma-$algèbre et vérifie bien,

$$\mathscr{M}(\mathscr{A}) \equiv \sigma(\mathscr{A})$$

cela achève la démonstration. ■

Maintenant nous allons définir les mesures $\sigma-$finies,

Définition 5.2.2 *Soit (X,Σ,μ) un espace mesuré, la mesure μ est dite finie si $\mu(X) < +\infty$. Elle est dite $\sigma-$finie si le référentiel X est une réunion dénombrable d'ensembles de mesures finies.*

Comme exemple, sur l'espace mesuré de Lebesgue $(\mathbb{R},\mathbb{B},m)$ la mesure m de Lebesgue est $\sigma-$finie. La mesure μ de comptage ou de dénombrement sur un ensemble non-dénombrable n'est pas $\sigma-$finie. Maintenant, pour définir la mesure produit sur l'espace mesurable $(X\times Y,\Sigma_1\times\Sigma_2)$ nous aurons besoin du Lemme fondamental suivant,

Lemme 5.2.1 *Soient (X,Σ_1,μ_1) et (X,Σ_2,μ_2) deux espaces mesurés $\sigma-$finis et $E\in\Sigma_1\times\Sigma_2$ un ensemble mesurable. Alors, les fonctions f et g suivantes :*

$$f: \begin{array}{c} X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+ \\ x \longmapsto f(x) = \mu_2(E_x) \end{array}$$

$$g: \begin{array}{c} Y \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+ \\ y \longmapsto g(y) = \mu_1(E_y) \end{array}$$

sont respectivement mesurables par rapport à Σ_1 et Σ_2, et verifient

$$\int_X f(x)\,d\mu_1 = \int_Y g(y)\,d\mu_2$$

et si E est un rectangle mesurable de la forme $A \times B$ alors,

$$\int_X f(x)\, d\mu_1 = \int_Y g(y)\, d\mu_2 = \mu_1(A).\mu_2(B)$$

Preuve. Nous procédons à la démonstration en plusieures étapes :

<u>$1^{ére}$-étape</u> Si $E = A \times B$, alors :

$$f(x) = \mu_2\left((A \times B)_x\right) = \begin{cases} \mu_2(B)\ ,\ x \in A \\ 0\ ,\ x \notin A \end{cases}$$

$$\Longrightarrow f(x) = \mu_2(B)\, \chi_A(x)$$

donc f est mesurable sur Σ_1. D'une maniére analogue g est mesurable sur Σ_2. Et nous avons dans ce cas,

$$\int_X f(x)\, d\mu_1 = \int_X \mu_2(B)\, \chi_A(x)\, d\mu_1(x) = \mu_1(A).\mu_2(B) =$$
$$= \int_Y g(y)\, d\mu_2 = \int_Y \mu_1(A)\, \chi_B(y)\, d\mu_2(y)$$

<u>$2^{éme}$-étape</u> On assume que le lemme est valide pour une suite croissante $\{E_n\}_{\mathbb{N}^*}$ d'éléments de $\Sigma_1 \times \Sigma_2$. Et on établit ce dernier pour les réunions dénombrables $E = \underset{n\in\mathbb{N}^*}{\cup} E_n$. On pose :

$$f_n(x) = \mu_2\left((E_n)_x\right) \text{ et } g_n(y) = \mu_1\left((E_n)_y\right)$$

par hypothéses toutes les fonctions f_n et g_n sont mesurables et vérifient,

$$\int_X f_n(x)\, d\mu_1(x) = \int_Y g_n(y)\, d\mu_2(y)$$

sachant que,

$$(E_n)_x \subseteq (E_{n+1})_x \Longrightarrow 0 \leq f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$$

en utilisant le théorème sur la convergence des mesures positives Prop 3.3.1 on obtient,

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} f_n(x) = \lim_{n\longrightarrow\infty} \mu_2\left((E_n)_x\right) = \mu_2\left(\underset{n\in\mathbb{N}^*}{\cup} (E_n)_x\right) =$$
$$= \mu_2\left(\left(\underset{n\in\mathbb{N}^*}{\cup} E_n\right)_x\right) = \mu_2(E_x)$$

et ainsi, d'aprés le théorème de convergence monotone de Lebesgue (TCM) et un raisonnement analogue sur les fonctions $g_n(y)$ nous déduisons,

$$\int_X f(x)\,d\mu_1(x) = \int_Y g(y)\,d\mu_2(y)$$

les fonctions limites f et g sont toutes les deux mesurables Prop 3.1.5.

$3^{éme}$-étape On assume cette fois que le lemme est valide pour toute suite $\{E_n\}_{\mathbb{N}^*}$ d'éléments de $\Sigma_1 \times \Sigma_2$ deux à deux disjoints, et on montre qu'il reste valide pour la réunion $E = \underset{n\in\mathbb{N}^*}{\cup} E_n$. Posons :

$$f_n(x) = \mu_2\left(\overset{n}{\underset{i=1}{\cup}}(E_i)_x\right) \text{ et } g_n(y) = \mu_1\left(\overset{n}{\underset{i=1}{\cup}}(E_i)_y\right)$$

clairement :

$$\left\{\overset{n}{\underset{i=1}{\cup}} E_i\right\}_{n\in\mathbb{N}^*}$$

et une suite croissante, et

$$E = \underset{n\in\mathbb{N}^*}{\cup} E_n = \underset{n\geq 1}{\cup}\left(\overset{n}{\underset{i=1}{\cup}} E_i\right)$$

avec,

$$\begin{aligned}\int_X f_n(x)\,d\mu_1(x) &= \sum_{i=1}^n \int_X \mu_2\left((E_i)_x\right) d\mu_1(x) \\ &= \sum_{i=1}^n \int_Y \mu_1\left((E_i)_y\right) d\mu_2(y) \\ &= \int_Y g_n(y)\,d\mu_2(y)\end{aligned}$$

cela étant $\forall n \in \mathbb{N}^*$. De la deuxiéme étape nous concluons alors que,

$$f(x) = \mu_2\left((E)_x\right) \text{ et } g(y) = \mu_1\left((E)_y\right)$$

sont des fonctions mesurables et verifient,

$$\int_X f(x)\,d\mu_1(x) = \int_Y g(y)\,d\mu_2(y)$$

De cette étape et de l'étape $n°(1)$, et de l'intermédiaire de la Prop 5.1.1, nous déduisons que le lemme est valide pour la famille des pavés élémentaires mesurables.

$4^{éme}$-étape Dans cette partie on suppose que le lemme reste valide pour les suites décroissantes $\{E_n\}_{\mathbb{N}^*}$ d'éléments de $\Sigma_1 \times \Sigma_2$ tel que :

$$E_1 \subseteq A \times B \text{ et } \max\left(\mu_1(A), \mu_2(B)\right) < +\infty$$

montrons que ce dernier reste valide pour les intersections, $E = \underset{n\in\mathbb{N}^*}{\cap} E_n$. Ecrivons :

$$f_n(x) = \mu_2\left(\left(E_n\right)_x\right) \text{ et } g_n(y) = \mu_1\left(\left(E_n\right)_y\right)$$

sachant que,

$$\left(E_{n+1}\right)_x \subseteq \left(E_n\right)_x \text{ et } \left(E_1\right)_x \subseteq (A \times B)_x$$

alors,

$$\begin{aligned}\mu_2\left(\left(E_1\right)_x\right) &\leq \mu_2\left((A\times B)_x\right) \\ &= \mu_2(B)\,\chi_A(x) < +\infty\ ,\ \forall x \in X\end{aligned}$$

de plus $\forall n \in \mathbb{N}^*$, nous avons :

$$\begin{aligned}\int_X \mu_2\left(\left(E_1\right)_x\right) d\mu_1(x) &\leq \int_X \mu_2\left((A\times B)_x\right) d\mu_1(x) \\ &= \int_X \mu_2(B)\,\chi_A(x)\, d\mu_1(x) \\ &= \mu_2(B)\,\mu_1(A) < +\infty\end{aligned}$$

nos conditions étant réunies, d'aprés le théorème sur la convergence des mesures pour les suites décroissantes Prop 3.3.2 et le théorème de convergence dominée de Lebesgue (TCD) nous concluons que,

$$\int_X f(x)\, d\mu_1(x) = \int_Y g(y)\, d\mu_2(y)$$

où :

$$f(x) = \mu_2\left(\left(\underset{n\in\mathbb{N}^*}{\cap} E_n\right)_x\right) \text{ et } g(x) = \mu_1\left(\left(\underset{n\in\mathbb{N}^*}{\cap} E_n\right)_y\right)$$

$5^{éme}$-étape Soit $E \in \Sigma_1 \times \Sigma_2$ un ensemble mesurable, μ_1, μ_2 étant $\sigma-$finies notons :

$$E_{mn} = E \cap \left(X_n \times Y_n\right)\ ;\ m, n \in \mathbb{N}^*$$

tel que,

$$X = \underset{n\geq 1}{\cup} X_n\ ,\ Y = \underset{m\geq 1}{\cup} Y_m$$

et

$$\max\left(\mu_1\left(X_n\right),\mu_2\left(Y_m\right)\right)<+\infty\ ;\ \forall m,n\in\mathbb{N}^*$$

définissons la classe,

$$\mathcal{M}=\left\{E\in\Sigma_1\times\Sigma_2\ /\ \mathbf{P}\left(E_{mn}\right)\ \forall m,n\in\mathbb{N}^*\right\}$$

c'est la famille des $E\in\Sigma_1\times\Sigma_2$ qui verifient la propriété $\mathbf{P}\left(E_{mn}\right)$ suivante :

$$\left\{\text{les ensembles } E_{mn} \text{ verifient le lemme } \forall m,n\in\mathbb{N}^*\right\}$$

Les étapes (2) et (4) impliquent que la famille $\mathcal{M}$ est une classe monotone. L'étape (3) indique que $\mathcal{M}$ contient les pavés élémentaires, et de la proposition Prop 5.2.3, on a

$$\Sigma_1\times\Sigma_2\subseteq\mathcal{M}$$

d'où l'on conclu que,

$$\Sigma_1\times\Sigma_2=\mathcal{M}$$

Finalement, soit $E\in\Sigma_1\times\Sigma_2$ alors,

$$E\in\mathcal{M}\Longrightarrow\mathbf{P}\left(E_{mn}\right)\ \forall m,n\in\mathbb{N}^*$$

cependant, d'aprés l'étape (3) on sait que,

$$\mathbf{P}\left(E_{mn}\right)\ \forall m,n\in\mathbb{N}^*\Longrightarrow\mathbf{P}(E)$$

autrement dit E verifie la propriété $\mathbf{P}$ qui est le lemme, où nous avons :

$$E=\bigcup_{m,n\in\mathbb{N}^*}E_{mn}$$

telque,

$$E_{ij}\cap E_{mn}=\varnothing\ ;\ \forall i\neq m,j\neq n$$

la démonstration du lemme est ainsi compléte.

■

On peut énoncer maintenant la définition de la mesure produit par,

Définition 5.2.3 *Soient* $\left(X,\Sigma_1,\mu_1\right)$ *et* $\left(X,\Sigma_2,\mu_2\right)$ *deux espaces mesurés $\sigma-$finis, on définit la mesure produit sur* $\Sigma_1\times\Sigma_2$ *par l'application :*

$$\mu_1\times\mu_2:\begin{array}{c}\Sigma_1\times\Sigma_2\longrightarrow\overline{\mathbb{R}}_+\\ E\longmapsto\mu_1\times\mu_2(E)\end{array}$$

telque,

$$\int_X\mu_2\left(E_x\right)d\mu_1=\int_Y\mu_1\left(E_y\right)d\mu_2$$

La définition Def 5.2.3, repose essentiellement sur le lemme fondamental Lemme 5.2.1, ce dernier assert que les fonctions positives $\mu_1\left(E_y\right)$ et $\mu_2\left(E_x\right)$ définies respectivement sur X et Y sont mesurables, donc intégrables de Lebesgue et les deux intégrales dans la définition sont identiques. Nous avons ensuite les propriétés suivantes de l'application $\mu_1 \times \mu_2$.

Proposition 5.2.4 *L'application $\mu_1 \times \mu_2$ est une mesure positive et $\sigma-$finie sur la Tribue ou $\sigma-$algèbre $\Sigma_1 \times \Sigma_2$.*

Preuve. L'application d'ensembles $\mu_1 \times \mu_2$ est positive, de la proposition Prop 4.4.5 sur l'additivité totale de l'intégrale de Lebesgue pour les ensembles deux à deux disjoints nous déduisons que $\mu_1 \times \mu_2$ est $\sigma-$additive ou admet la propriété d'additivité dénombrable. Ensuite, $\mu_1 \times \mu_2$ est $\sigma-$finie, puisque,

$$X \times Y = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*}\left(X_n \times Y_n\right)$$

cela implique,

$$\begin{aligned}
\mu_1 \times \mu_2\left(X_n \times Y_n\right) &= \int_X \mu_2\left(\left(X_n \times Y_n\right)_x\right) d\mu_1 \\
&= \int_X \mu_2\left(Y_n\right)\chi_{X_n}(x)\, d\mu_1(x) \\
&= \mu_2\left(Y_n\right).\mu_1\left(X_n\right) < +\infty
\end{aligned}$$

■

Nous arrivons enfin à la définition de l'espace mesuré produit çi-dessous,

Définition 5.2.4 *Soient $\left(X,\Sigma_1,\mu_1\right)$ et $\left(X,\Sigma_2,\mu_2\right)$ deux espaces mesurés et $\sigma-$finis, alors l'espace mesuré produit et $\sigma-$fini est donné par le triplet $\left(X \times Y, \Sigma_1 \times \Sigma_2, \mu_1 \times \mu_2\right)$.*

5.3 Théorème de Tonelli-Fubini

Plus tards nous ferons une introduction historique sur l'appelation de ce théorème qui malgrés les travaux des deux auteurs italiens ne fait cependant pas l'unanimité dans beaucoups de références standards sur l'appelation du dit théoeème Tonelli ou bien Fubini. Nous présentons le théorème de Tonelli pour les fonctions positives en s'inspirant des références [] , [] , [], ensuite le théorème de Fubini pour les fonctions sommables qui devient une conséquence de celui de Tonelli. Dans ce contexte le théorème de Fubini est complet passant par les fonctions positives aux fonctions sommables, de ce point de vue les deux auteurs méritent citations pour leurs travaux indépendants.

Théorème 5.3.1 (Tonelli) *Soient* (X, Σ_1, μ_1) *et* (X, Σ_2, μ_2) *deux espaces mesurés* $\sigma-$*finis et* f *une fonction positive mesurable sur* $X \times Y$ *à valeurs dans* $\overline{\mathbb{R}}_+$ *, alors les fonctions :*

$$f(x) = \int_Y f_x(y)\, d\mu_2 \;\; et\; g(y) = \int_X f_y(x)\, d\mu_1$$

sont respectivement mesurables par rapport aux $\sigma-$*algèbres* Σ_1 *et* Σ_2*, et vérifient la formule*

$$\begin{aligned} \int_{X\times Y} f(x,y)\, d\mu_1 \times \mu_2 &= \int_X \left(\int_Y f_x(y)\, d\mu_2 \right) d\mu_1 \\ &= \int_Y \left(\int_X f_y(x)\, d\mu_1 \right) d\mu_2 \end{aligned}$$

Preuve. Considérons d'abords le cas où f est une fonction caractéristique $f = \chi_E$ où $E \in \Sigma_1 \times \Sigma_2$. Des définitions des coupures de fonctions et d'ensembles nous tirons les propriétés suivantes,

$$f_x = \chi_{E_x} \text{ et } f_y = \chi_{E_y}$$

avec,

$$\int_{X\times Y} \chi_E(x,y)\, d\mu_1 \times \mu_2 = \mu_1 \times \mu_2(E)$$

de la définition Def 5.2.3 de $\mu_1 \times \mu_2$ dont l'existence et les proptiétés sont données par Lemme 5.2.1 et Prop 5.2.4 nous obtenons,

$$\begin{aligned} \int_{X\times Y} \chi_E(x,y)\, d\mu_1 \times \mu_2 &= \int_X \mu_2(E_x)\, d\mu_1 = \int_Y \mu_1(E_y)\, d\mu_2 \\ &= \int_X \left(\int_Y \chi_{E_x} d\mu_2 \right) d\mu_1 \\ &= \int_Y \left(\int_X \chi_{E_y} d\mu_1 \right) d\mu_2 \end{aligned}$$

le résultat est donc établit pour les fonctions caractéristiques d'ensembles mesurables. Assumons maintenant que f est une fonction simple ou étagée $f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{E_i}$ on a alors,

$$f_x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{(E_i)_x} \text{ et } f_y = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{(E_i)_y}$$

de l'additivité finie de l'intégrale on obtient directement le résultat, à savoir

$$\begin{aligned}\int_{X\times Y} f(x,y)\, d\mu_1\times\mu_2 &= \int_X \left(\int_Y f_x d\mu_2\right) d\mu_1 \\ &= \int_Y \left(\int_X f_y d\mu_1\right) d\mu_2\end{aligned}$$

Lorsque f est une fonction mesurable positive du Théorème Thm 3.2.1 sur l'approximation de telles fonctions par des fonctions étagées alors, on a

$$\exists \{s_n\}_{n\in\mathbb{N}^*} \in \mathbb{S}(X\times Y)\ ,\ s_n \geq 0 \text{ et } s_n \uparrow$$

les fonctions $s_n(x,y)$ sont aussi toutes mesurables et telque :

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} s_n(x,y) = f(x,y)$$

nous aurons ainsi,

$$\begin{aligned}\int_{X\times Y} s_n(x,y)\, d\mu_1\times\mu_2 &= \int_X \left(\int_Y (s_n)_x\, d\mu_2\right) d\mu_1 \\ &= \int_Y \left(\int_X (s_n)_y\, d\mu_1\right) d\mu_2\end{aligned}$$

sachant que,

$$\begin{aligned}(s_n)_x &\longrightarrow f_x \text{ et } (s_n)_x \uparrow \\ (s_n)_y &\longrightarrow f_y \text{ et } (s_n)_y \uparrow\end{aligned}$$

du théorème de convergence monotone de Lebesgue (TCM) on aura,

$$\begin{aligned}\lim_{n\longrightarrow\infty}\int_X (s_n)_y\, d\mu_1 &= \int_X f_y d\mu_1 = g(y) \\ \lim_{n\longrightarrow\infty}\int_Y (s_n)_x\, d\mu_2 &= \int_Y f_x d\mu_2 = f(x)\end{aligned}$$

et en appliquant le théorème de convergence monotone une seconde fois on déduit que,

$$\begin{aligned}\int_{X\times Y} f(x,y)\, d\mu_1\times\mu_2 &= \int_X \left(\int_Y f_x(y)\, d\mu_2\right) d\mu_1 \\ &= \int_Y \left(\int_X f_y(x)\, d\mu_1\right) d\mu_2\end{aligned}$$

et le théorème est démontré. ■

On démontre aussi indépendemment et en utilisant les étapes respectées dans le théorème de Tonelli le théorème célébre dit de Fubini suivant. Dans notre approche nous l'avons présenté comme conséquence.

Théorème 5.3.2 (Fubini) *Soient (X, Σ_1, μ_1) et (X, Σ_2, μ_2) deux espaces mesurés $\sigma-$finis et f une fonction sommable sur $X \times Y$ à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}_+$, alors les fonctions :*

$$f(x) = \int_Y f_x(y)\, d\mu_2 \quad et\ g(y) = \int_X f_y(x)\, d\mu_1$$

sont respectivement mesurables par rapport aux $\sigma-$algèbres Σ_1 et Σ_2, et vérifient l'identité

$$\begin{aligned}\int_{X\times Y} f(x,y)\, d\mu_1 \times \mu_2 &= \int_X \left(\int_Y f_x(y)\, d\mu_2 \right) d\mu_1 \\ &= \int_Y \left(\int_X f_y(x)\, d\mu_1 \right) d\mu_2\end{aligned}$$

Preuve. Déduction directe de la définition et du théorème Thm 5.3.1 de Tonelli. ■

Les coupures f_x et f_y de la fonction $f(x,y)$ sont données par rapport aux paramétres x et y fixés respectivement dans f_x et f_y. De ce fait, en pratique et dans les applications une fois que cette observation est faite, le Théorème de Tonelli-Fubini est usuellement utilisé sous la forme standard :

$$\begin{aligned}\int_{X\times Y} f(x,y)\, d\mu_1 \times \mu_2 &= \int_X \left(\int_Y f(x,y)\, d\mu_2(y) \right) d\mu_1(x) \\ &= \int_Y \left(\int_X f(x,y)\, d\mu_1(x) \right) d\mu_2(y)\end{aligned}$$

Bibliographie

[1] Ansel. J.P et Y. Ducel. **Exercices corrigés en théorie de la mesure et de l'intégration**. Ed, Ellipses, 1995.

[2] Arnaudiès. J.M. **L'intégrale de Lebesgue sur la droite**. Ed, Vuibert, 1997.

[3] Boccara. N. **Intégration**. Ed, Ellipses, 1995.

[4] Bouziad. A et Calbrix. J. **Théorie de la mesure et de l'intégration**. Publ, Université de Rouen, n ^{o} 185, 1993.

[5] Briane. M et Pagès. G. **Thèorie de l'intégration**. Ed, Vuibert, 2006.

[6] Halmos. P. R. **Measure theorie**. Ed, Springer-Verlag, 1974.

[7] Buchwalter. H. **Le calcul intégral**. Ed, Ellipses, 1991.

[8] Revuz. D. **Mesure et intégration**. Ed, Hermann, 1997.

[9] Rojer. J. **Mesure et intégration**. Presses, Univ, Québec, 1982.

[10] Stroock. D. M. **A concise introduction to the theorie of integration**. Ed, Birkhauser, 1994.

[11] Weir. A. J. **Integration and measure**. Vol I and II, Cambridge, Univ, Press, 1973-74.

[12] Weislawa. J. K et Nowak. M. T. **Problèmes d'analyse III, intégration**. Ed, EDPscienses, 2008.