CHAPITRE I :

INTRODUTION AU CALCUL MATRICIEL

I.1. **Définition et notations**

On définit une matrice $\underline{A}$ d'ordre ou de dimension (m x n) comme l'ensemble de (m x n) nombres désignés par Aij et appelés éléments ou coefficients de la matrice $\underline{A}$ placés dans un tableau rectangulaire de m lignes et n colonnes comme suit :

$$\underline{A} = [\underline{A}] = \begin{bmatrix} A11 & A12 & \dots & A1n \\ A21 & A22 & \dots & A2n \\ . & . & & . \\ . & . & & . \\ . & . & & . \\ Am1 & Am2 & \dots & Amn \end{bmatrix}$$

Diagonale principale

a. $\underline{A}$ est dite matrice carrée d'ordre n si **m = n**

b. Une matrice carrée est dite symétrique si les éléments Aij et Aji disposés symétriquement par rapport à la diagonale principale sont égaux : **Aij = Aji**

c. Une matrice est dite antisymétrique **si : Aij = - Aji et Aii = 0**

d. Une matrice est dite diagonale si elle est carrée avec les coefficients suivants : **Aij = 0, pour i ≠ j**

e. Une matrice unité désignée par $\underline{I}$ est exprimée comme suit :

Iij = 0 pour i=j et Iii = 1

$$I = [I] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \dots & 0 \\ 0 & 1 \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

f. Une matrice est dite nulle si tous ses coefficients sont égaux à zéro

$$\underline{A}_{ij=0}$$

$$0 = [\,0\,] = \begin{bmatrix} 0 & 0\ldots & 0 \\ 0 & 0\cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0\cdots & 0 \end{bmatrix}$$

g. La matrice transposée $\underline{A}^T$d'une matrice A s'obtient en échangeant les lignes avec les colonnes dans la matrice d'origine.

Exemple : $\underline{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ $\quad A^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$

h. Les relations $\underline{A}^T = \underline{A}$ et $\underline{A}^T = -\underline{A}$ caractérisent respectivement les matrices symétriques et antisymétriques.

I.2. Opérations matricielles

I.2.1. Addition et soustraction de deux matrices

Deux matrices $\underline{A}$ et $\underline{B}$ du même ordre peuvent être additionnées ou soustraire l'une de l'autre comme suit :

$\underline{C} = \underline{A} + \underline{B}$ avec Cij = Aij + Bij

$\underline{D} = \underline{A} - \underline{B}$ avec Dij = Aij – Bij

Propriétés :

A + B = B + A (opération commutative)

A + (B + C) = (A+B) + C (opération associative)

I.2.2. Produit de deux matrices

Le produit de deux matrices n'est possible que si le nombre de colonnes de la première égale le nombre de lignes de deuxième. Le produit s'effectue ainsi :

$\underline{A}_{(m,l)} * \underline{B}_{(l,m)} = \underline{C}_{(m,n)}$

Avec

$$C_{ij} = \sum_{k=1}^{l} A_{ik} B_{kj}$$

$\underline{A} * \underline{B} \neq \underline{B} * \underline{A}$ (le produit matriciel n'est pas commutatif)

$\underline{A} * (\underline{B} + \underline{C}) = \underline{A} * \underline{B} + \underline{A} * \underline{C}$ (le produit matriciel est distributif)

$$(A * B)^T = B^T * A^T$$

$\underline{A} * (\underline{B} * \underline{C}) = (\underline{A} * \underline{B}) * \underline{C}$ (le produit matriciel est associatif)

$\underline{C} * \underline{C} = \underline{C}^2$

$\underline{C} * \underline{C} * \underline{C} = \underline{C}^3$

I.2.3. Déterminant d'une matrice

Considérons la matrice $\underline{A}$

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

Le déterminant de la matrice $\underline{A}$ (3,3) est développé par les cofacteurs comme suit :

$$|\underline{A}| = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} = A_{11} \begin{vmatrix} A_{22} & A_{23} \\ A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} - A_{21} \begin{vmatrix} A_{12} & A_{13} \\ A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} + A_{31} \begin{vmatrix} A_{11} & A_{23} \\ A_{22} & A_{23} \end{vmatrix}$$

Propriétés des déterminants

- La valeur d'un déterminant demeure inchangée après permutation des lignes avec des colonnes.
- Le signe d'un déterminant change si on permute 2 lignes (ou 2 colonnes).
- Le déterminant est égal à zéro si deux lignes (ou 2 colonnes) sont identiques.
- la valeur d'un déterminant reste inchangée si on ajoute à une ligne (ou une colonne) une ligne (ou une colonne) quelconque multipliée par un coefficient α.
- Si tous les coefficients d'une ligne (ou d'une colonne) sont multipliés par un nombre α, la valeur du déterminant est multipliée par α.
- La valeur d'un déterminant ne change pas en ajoutant à une ligne (ou une colonne) une ligne (ou une colonne) quelconque multipliée par un coefficient α.

La matrice carrée $\underline{A}$ est dite singulière si son déterminant est nul $|A| = 0$ ➔ matrice **singulière**

$|A| \neq 0$ ➔ la matrice $\underline{A}$ est dite **régulière**

Matrice triangulaire U

$$\underline{U} = \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} \cdots & U_{1n} \\ 0 & U_{22} \cdots & U_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 \cdots & U_{nn} \end{bmatrix}$$ Est une matrice triangulaire supérieure

Son déterminant s'exprime comme suit : $|\underline{U}| = U_{11} * U_{22} \ldots * U_{nn} = \prod_{i=1}^{n} U_{ii}$

- **Inverse d'une matrice**

  L'inverse d'une matrice A s'écrit :

$$\underline{A}^{-1} * \underline{A} = \underline{A} * \underline{A}^{-1} = \underline{I}$$

I.3. Résolution d'un système d'équations linéaires

I.3.1 Introduction

$\underline{A} * \underline{x} = \underline{b} \quad \Rightarrow \quad \underline{x} = \underline{A}^{-1} * \underline{b}$

Il est évident que les solutions n'existent que sous la condition que la matrice A est régulière.

On ne calcule jamais le vecteur x par l'inversion d'une matrice car cela requiert généralement un nombre trop élevé d'opérations numériques.

La résolution est généralement effectuée en utilisant la méthode d'itération frontale ou la méthode d'élimination de Gauss. Dans ce cas on transforme le système original comme suit :

$\underline{A} * \underline{x} = \underline{b}$

En un système équivalent :

$\underline{U} * \underline{x} = \underline{b}'$

Où U est une matrice triangulaire supérieure. Cette étape est appelée « élimination en avant ». Elle permet d'évaluer directement la valeur numérique du déterminant de la matrice A.

Ensuite la « substitution en arrière » permet la détermination pas à pas des inconnues du système à partir de la dernière x_n.

L'étape d'élimination successive s'illustre comme suit :

Si l'on désigne par ${}^{o}A_{ij}$ = Aji les coefficients originaux de la matrice A l'élimination en avant est présentée ainsi :

- élimination des coefficients $A_{i1} (i > 1)$ sous le terme diagonal de la 1ere colonne. On utilise la 1ere équation. on élimine A_{i1} d'une équation $i > 1$ quelconque en retranchant de cette équation la 1ere équation multipliée par le coefficient $\frac{A_{i1}}{A_{11}}$ (on admet que $A_{11} \neq 0$). La nouvelle équation i possède les coefficients ${}^{(1)}A_{ij}$ et le second nombre ${}^{(1)}b_i$ donnés par :
-

$${}^{(1)}A_{i1} = 0 \qquad {}^{(1)}A_{ij} = {}^{O}A_{ij} - {}^{O}A_{i1} / {}^{o}A_{11} \quad (j > 1)$$
$${}^{(1)}b_i = {}^{O}b_i - {}^{O}b_1 * {}^{O}A_{i1} / {}^{o}A_{11}$$

Cette opération est répétée jusqu'à élimination de tous les coefficients situés en-dessous de la diagonale principale et la formation de la matrice triangulaire supérieure U.

I.3.2. Méthode de résolution par le concept des matrices élémentaires

Exposé de la méthode

On considère la matrice A (3x3) suivante :

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{bmatrix}$$

La matrice élémentaire E est formée à partir de la matrice unité I, elle est du même ordre que la matrice originale avec un seul coefficient α non nul situé en dessous de la diagonale principale. Ce facteur α est égal au coefficient $\frac{A_{i1}}{A_{11}}$ déterminé dans la méthode précédente (élimination en avant).

Pour triangularizer la matrice A on procède comme suit :

On forme la matrice élémentaire E_{21} pour éliminer le terme A_{21} de A on procède comme suit :

$$\underline{E}_{21} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{b}{a} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

E_{21} Est formée à partir de la matrice unité I de même dimension que A en introduisant le facteur λ_{21} correspondant à l'annulation du coefficient A_{21}.

Etape -1- : on post multiplie la matrice A par E_{21} :

$$\underline{E}_{21} * \underline{A} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & \left(\frac{-b^2}{a} + d\right) & \frac{-bc}{a} + a \\ c & e & f \end{bmatrix} = A'$$

Etape -2- : on forme la matrice élémentaire $\underline{E}_{31}$ pour annuler le coefficient A'_{31}

$$\underline{E}_{31} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{c}{a} & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{E}_{31} * \underline{A}' = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & \left(d - \frac{b^2}{a}\right) & \left(e - \frac{bc}{a}\right) \\ 0 & e - \frac{bc}{a} & f - \frac{c^2}{a} \end{bmatrix} = A''$$

Etape -3- : on forme E_{32} pour éliminer le coefficient A''_{32}

$$\underline{E}_{32} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \left(\frac{\frac{bc}{a} - e}{d - \frac{b^2}{a}}\right) & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{E}_{32} * \underline{A}'' = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & \left(d - \frac{b^2}{a}\right) & \left(e - \frac{bc}{a}\right) \\ 0 & 0 & f - \frac{c^2}{a} \end{bmatrix} = \underline{U}$$

$\underline{U}$ est la matrice triangulaire supérieure résultat de l'élimination en avant.

Considérons la matrice $\underline{A}$ suivante :

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} -4 & 1 & 0 & 7 \\ 18 & 20 & 30 & 4 \\ -1 & 2 & 1 & 6 \\ -11 & 12 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Factoriser $\underline{A}$ en utilisant la méthode de Gauss ?

Exemple : factoriser la matrice $\underline{A}$ en utilisant la décomposition de Gauss.

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 3 & 12 & 18 \\ 5 & 18 & 30 \end{bmatrix}$$

Etape 1 : $A_{21} = 0$

$$\underline{E}_{21} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \underline{E}_{31} * \underline{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 3 & 3 \\ 5 & 18 & 30 \end{bmatrix} = A'$$

Etape 2 : $A'_{31} = 0$

$$\underline{E}_{31} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -5 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \underline{E}_{31} * \underline{A}' = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 5 \end{bmatrix} = \underline{A}''$$

Etape 3 : $A''_{31} = 0$

$$\underline{E}_{32} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \underline{E}_{32} * \underline{A}'' = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = U$$

On a effectué les opérations suivantes pour obtenir la matrice triangulaire supérieure U :

$$E_{32} * E_{31} * E_{21} * A = U$$

Si on veut redeterminer la matrice A on procède dans le sens inverse :

$\underline{A} = E_{21}^{-1} * E_{31}^{-1} * E_{32}^{-1} * U$

Nota : l'inverse d'une matrice élémentaire est obtenue en changeant le signe devant le coefficient situé à l'extérieure de la diagonale principale de E. La procédure peut être résumée comme suit :

$$\underline{A} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{E_{21}^{-1}} * \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{E_{31}^{-1}} * \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{E_{32}^{-1}} * U$$

La multiplication successive des matrices E donne :

$$\underline{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

A s'écrit alors :

$$\underline{A} = L * U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Remarque : si la matrice A est symétrique, elle peut être décomposée sur la forme de Cholesky :

$$\underline{A} = \underline{L}\,\underline{D}\,\underline{L}^{T}$$

Où :

D : matrice diagonale contenant les pivots de la matrice A
L : matrice triangulaire inferieure
L^T : Transposée de L

Problème à faire :

Considérons la matrice A suivante :

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} -4 & 1 & 0 & 7 \\ 18 & 20 & 30 & 4 \\ -1 & 2 & 1 & 6 \\ -11 & 12 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Factoriser $\underline{A}$ en utilisant la méthode de Gauss ?

CHAPITRE II

METHODE DES DIFFERENCES FINIES

IV.1. Introduction

L'étude des problèmes de mécanique des structures et d'élasticité conduit généralement à la résolution d'une série d'équations différentielles aux dérivées ordinaires ou partielles, avec des conditions aux limites données. Dans la majorité des cas, la solution analytique exacte est très difficile à obtenir pour les structures complexes. Ainsi le recours aux méthodes numériques approchées telles que **la méthode des différences finies (MDF) et/ou la méthode des éléments finis (MEF) s'avère indispensable.**

Cette méthode, qui semble être pour la première fois appliquée en 1908 par C. Runge, s'est par la suite vite répandue ; elle a été, jusqu'à l'apparition dans les années 60 de la méthode des éléments finis, la plus en vogue dans la pratique.

Toutefois, la méthode **MDF** a sur celle de la méthode **MEF** cet avantage qu'on peut envisager de l'utiliser pour une solution manuelle ou semi manuelle, ce qui est impossible avec la méthode **MEF.**

Aujourd'hui son application se justifie lorsque la solution par un logiciel d'éléments finis ne peut pas être envisagée.

IV.2. Principe de la méthode

La méthode **MDF** permet de convertir une équation différentielle en un système d'équations linéaires. Dans cette démarche des approximations sont appliquées aux expressions analytiques des dérivés introduisant ainsi des erreurs au niveau des résultats finaux. Cependant lorsque l'erreur est relativement admissible des solutions acceptables peuvent être obtenues en optant pour un nombre optimal d'équations discrètes aux différences finies.

IV.2.1. Equations finies pour une fonction à une variable

Pour illustrer la méthode considérons une fonction courbe f(x) à une dimension représentée sur la figure II.1 ci-dessous :

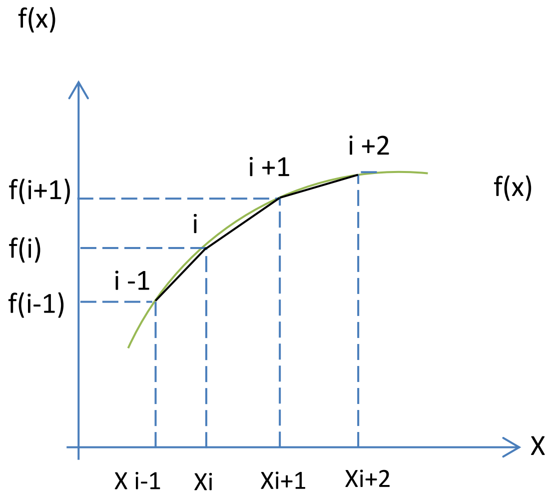


Figure II.1

La courbe f(x) est subdivisée en n éléments ou segments délimités par les points i_n d'abscisse x_n et d'ordonnée f_n de sorte qu'entre deux points voisins i et i+1 la fonction f(x) est considérée comme variant linéairement c'est-à-dire les points i et i+1 sont reliés par une droite ce qui permet de remplacer la courbe réelle f(x) par un polygone inscrit i-1, i, i+1, i+2……..

L'erreur d'approximation est représentée par l'espace compris entre la droite et la courbe (partie hachurée sur la figure II.1)

Pour développer la méthode Exprimons l'équation de la droite (i, i+1) :

$$y = Ax + B \begin{cases} y = f_i & x = x_i \\ y = f_{i+1} & x = x_{i+1} \end{cases}$$

Ce qui donne : $f(x) = \frac{f_{i+1} - f_i}{x_{i+1} - x_i}(x - x_i) + f_i$

La dérivé de $f(x)$ au point i est donnée par l'expression :

$$\left(\frac{df(x)}{dx}\right)_i = \frac{f_{i+1} - f_i}{x_{i+1} - x_i} \qquad (1)$$

Cette expression est appelée **Dérivée Première en Avant**

Si on considère la droite (i-1, i), on obtient une deuxième expression de la dérivée première :

$$\left(\frac{df(x)}{dx}\right)_i = \frac{f_i - f_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} \qquad (2)$$

En considérant un pas constant :

$$x_i - x_{i-1} = x_{i+1} - x_i = h \qquad (3)$$

En faisant la moyenne entre les équations (1) et (2) on obtient une troisième valeur de la dérivée première :

$$\left(\frac{df(x)}{dx}\right)_i = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h} \qquad (4)$$

- L'équation 1 est appelée **différence finie en Avant**
- L'équation 2 est appelée **différence finie en Arrière**
- L'équation 4 est appelée **différence finie Centrale**

Les dérivées d'ordre supérieur sont calculées par analogie comme suit :

$$\left(\frac{d^2f(x)}{dx^2}\right)_i = \frac{d}{dx}\left(\frac{df(x)}{dx}\right)_i = \frac{d}{dx}\left[\frac{f_{i+1} - f_i}{h}\right] = \frac{1}{h}\left[\left(\frac{df}{dx}\right)_{i+1} - \left(\frac{df}{dx}\right)_i\right]$$

$$\left(\frac{d^2f(x)}{dx^2}\right)_i = \frac{1}{h^2}[f_{i+1} - f_i - f_i + f_{i-1}] = \frac{1}{h^2}[f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}]$$

$$\left(\frac{d^2f(x)}{dx^2}\right)_i = \frac{1}{h^2}[f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}] \qquad (5)$$

De la même manière on détermine la dérivée troisième $\frac{d^3f(x)}{dx^3}$ à partir de la dérivée seconde :

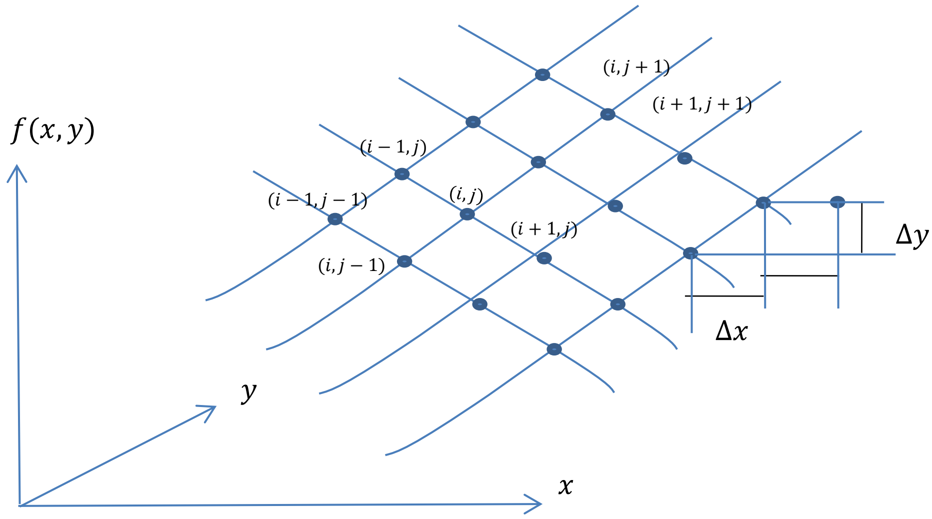
$$\left(\frac{d^3f(x)}{dx^3}\right)_i = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2f(x)}{dx^2}\right)_i = \frac{1}{h^3}[f_{i+2} - 3f_{i+1} + 3f_i - f_{i-1}]$$

$$\left(\frac{d^3f(x)}{dx^3}\right)_i = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2f(x)}{dx^2}\right)_i = \frac{1}{h^3}[-f_{i-1} + 3f_i - 3f_{i+1} + f_{i+2}] \qquad (6)$$

L'équation finie de la quatrième dérivée est obtenue par analogie à partir de l'équation (6) :

$$\left(\frac{d^4f(x)}{dx^4}\right)_i = \frac{1}{h^4}(f_{i-2} - 4f_{i-1} + 6fi - 4f_{i+1} + f_{i+2}) \qquad (7)$$

IV.2.2. Equations Finies pour une fonction à deux variables



Considérons une fonction bidimensionnelle f(x, y) ; les variables indépendantes sont x et y :

Les dérivées partielles de la fonction f(x,y) par rapport à chacune des variables sont données par la formule générale :

$$\frac{\partial^{m+n} f(x,y)}{\partial x^m \partial y^n} = \frac{\partial^m}{\partial x^m}\left(\frac{\partial^n f(x,y)}{\partial y^n}\right) = \frac{\partial^n}{\partial y^n}\left(\frac{\partial^m f(x,y)}{\partial x^m}\right) \qquad (8)$$

On déduit par analogie les équations aux différences finies de la première et la seconde dérivées au point (i,j) par rapport à chacune des variables comme suit :

a) Dérivées premières :

$$\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right)_{i,j} = \frac{f_{i+1,j} - f_{i,j}}{\Delta x}$$

$$\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right)_{i,j} = \frac{f_{i,j+1} - f_{i,j}}{\Delta y}$$

(9)

b) Dérivées deuxièmes :

$$\left(\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}\right)_{i,j} = \frac{f_{i+1,j} - 2f_{i,j} + f_{i-1,j}}{(\Delta x)^2}$$

$$\left(\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}\right)_{i,j} = \frac{f_{i,j+1} - 2f_{i,j} + f_{i,j-1}}{(\Delta y)^2}$$

(10)

L'équation aux differences finies de la dérivée croisée par rapport aux variables x et y s'écrit alors :

$$\left[\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y}\right]_{i,j} = \frac{1}{\Delta x \Delta y}\left[f_{i+1,j+1} - f_{i+1,j} - f_{i,j+1} + f_{i,j}\right]$$

(11)

En règle générale on choisit **un pas constant** dans les directions x et y : $\Delta \boldsymbol{x} = \Delta \boldsymbol{y} = \boldsymbol{h}$

On peut alors exprimer l'opérateur mathématique dénommé **« Laplacien » désigné par le symbole** $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ comme suit :

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{1}{h^2}\begin{bmatrix} & -1 & \\ +1 & -4 & +1 \\ & +1 & \end{bmatrix} \qquad (12)$$

Par analogie le deuxième opérateur mathématique $\Delta\Delta$ s'écrit:

$$\Delta\Delta = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + \frac{2\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}$$

Les valeurs finies de chaque terme de l'operateur $\Delta\Delta$ au point (i,j) sont déterminées comme suit :

$$\left[\frac{\partial^4 f(x,y)}{\partial x^4}\right]_{i,j} = \frac{1}{h^4}\left[f_{i-2,j} - 4f_{i-1,j} + 6f_{i,j} - 4f_{i+1,j} + f_{i+2,j}\right]$$

$$\left[\frac{\partial^4 f(x,y)}{\partial y^4}\right]_{i,j} = \frac{1}{h^4}\left[f_{i,j-2} - 4f_{i,j-1} + 6f_{i,j} - 4f_{i,j+1} + f_{i,j+2}\right]$$

$$\left[\frac{\partial^4 f(x,y)}{\partial y^2 \partial x^2}\right]_{i,j} = \frac{1}{h^4}[6f_{i,j} - 2(f_{i+1,j} + f_{i-1,j} + f_{i,j} + f_{i,j+1} + f_{i,j-1} + f_{i+1,j+1} + f_{i+1,j-1+}f_{i-1,j+1} + f_{i-1,j-1}]$$

On peut ainsi combiner ces différences finies sur la forme schématique (schéma de Lamé) suivante:

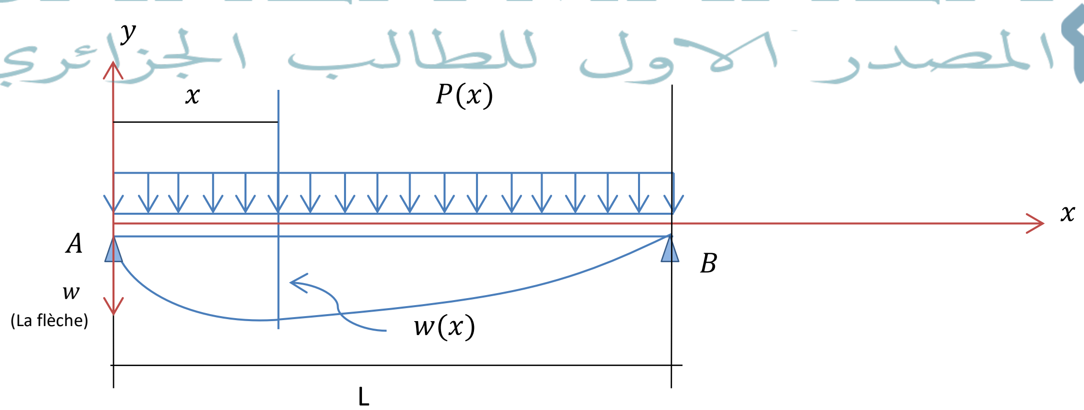
$$\Delta\Delta = \frac{1}{h^4}\begin{pmatrix} & & 1 & & \\ & 2 & -8 & 2 & \\ 1 & -8 & 20 & -8 & 1 \\ & 2 & -8 & 2 & \\ & & 1 & & \end{pmatrix} \qquad (13)$$

Cette équation finie permet de résoudre l'équation **de Laplace** pour le calcul des déplacements dans les dalles.

IV.3. <u>Application de la méthode des différences finies à la solution des Poutres</u>

IV.3.1. <u>Présentation de la méthode</u>

Considérons une poutre quelconque chargée uniformément par p(x).w(x) designe le déplacement transversal (flèche) provoqué par p(x) à l'abscisse x



<u>FIGURE II.2.</u>

Les équations analytiques de la RDM qui régissent le comportement général des poutres sont données par les expressions suivantes :

1. L'équation différentielle du 2ieme ordre dite « **équation du moment fléchissant »** :
   $\boldsymbol{M(x) = -EIw"(x)}$ **(14)**

2. L'équation du **chargement** (pour une charge répartie p(x)) :

$$\boldsymbol{M''(x) = -p(x)} \qquad \textbf{(15)}$$

3. L'équation différentielle du 3ieme ordre par rapport au déplacement dite équation de **l'effort tranchant** :

$$\boldsymbol{T(x) = \frac{dM(x)}{dx} = M'(x) = -EIw'''(x)} \qquad \textbf{(16)}$$

4. En éliminant M(x) entre les équations (1) et (2) on déduit l'équation différentielle du **quatrième ordre de la flèche (déplacement transversal)** des poutres :

$$\boldsymbol{W''''(x) = \frac{d^4w(x)}{dx^4} = \frac{P(x)}{EI}} \qquad \textbf{(17)}$$

IV.3.2. <u>Applications</u>

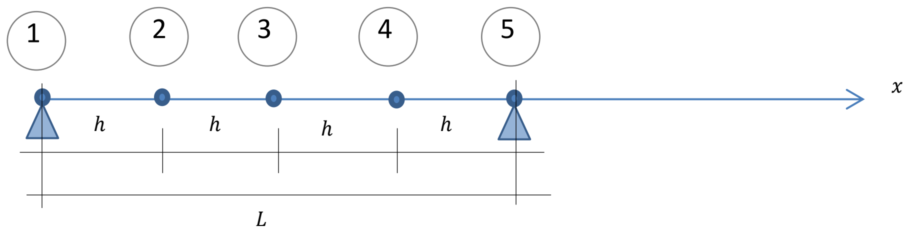
<u>PROBLEME</u> (1)

Comme première application considérons la poutre sur appuis simples de la figure II.2. La poutre a une section et une inertie constantes (E*I : constante) calculons les déplacements de cette poutre sous le chargement reparti constant p(x).

- **1ere Etape** : l'expression du moment fléchissant M(x) dans la section droite (x) s'écrit :

$$M(x) = \frac{PLx}{2} - \frac{Px^2}{2} = -EIW''(x) \qquad \text{(a)}$$

- **2éme Etape** : modélisation par la **MDF** de la poutre en plusieurs éléments « modèle numérique de quatre éléments donc cinq stations ou nœuds » :



- On choisit un pas **constant** $\boldsymbol{h = \frac{L}{4}}$
- On numérote les nœuds de 1 à 5 (nœuds réels)
- On écrit l'équation (1) sous forme finie pour un nœud i :

$$\frac{PLx_i}{2} - \frac{Px_i^2}{2} = -EIW_i''(x) = -EI\left(\frac{w_{i-1} - 2w_i + w_{i+1}}{h^2}\right) \qquad \text{(b)}$$

- **3éme Etape** : l'équation précédente (b) est évaluée à chaque nœud libre :

Station (1) : $x_1 = 0 \qquad w_1 = 0$

Station (2) : $x_2 = h$

$$P\frac{Lh}{2} - P\frac{h^2}{2} = -EI\left(\frac{w_1 - 2w_2 + w_3}{h^2}\right)$$

$$\frac{3PL^2}{32} = -\frac{16EI}{L^2}(-2w_2 + w_3)$$

$$-2w_2 + w_3 = -\frac{3PL^4}{512EI}$$

Station (3) : $x_3 = 2h = \frac{L}{2}$

$$-\frac{EI}{h^2}(w_2 - 2w_3 + w_4) = PLh - P\frac{(4h^2)}{2} = P\frac{L^2}{8}$$

Nous avons $w_4 = w_2$ (symétrie)

$$2w_2 - 2w_3 = -P\frac{L^4}{128EI}$$

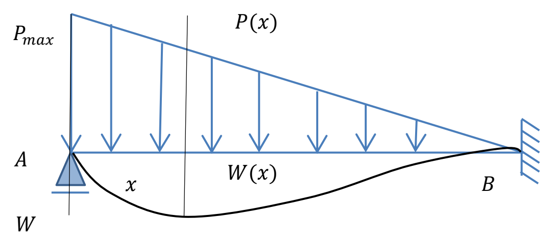
Le système d'équations linéaires s'écrit comme suit :

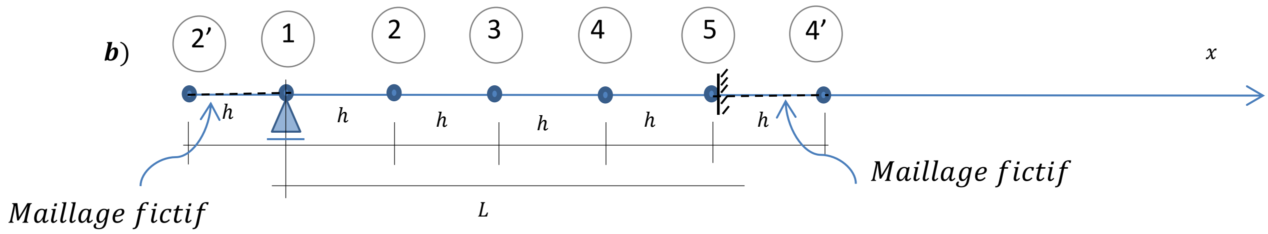
$$\begin{bmatrix} -2 & +1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = \frac{-PL^4}{EI}\begin{bmatrix} 1/512 \\ 1/128 \end{bmatrix}$$

On trouve : $w_2 = w_4 = \frac{5PL^4}{512EI} \qquad w_3 = \frac{7PL^4}{512EI}$

PROBLEME (2) : considérons la poutre à inertie constante de portée L et chargée linéairement par p(x) selon le schéma suivant :

a)





a) Problème analytique
b) Modèle numérique MDF

Pour déterminer la déformée en doit trouver les déplacements de chaque nœud ou station en adoptant un pas constant $h = \frac{L}{4}$

Le problème revient à trouver la solution de l'équation différentielle : $w''''(x) = \frac{P(x)}{EI}$

Les conditions aux limites sont :

$x = 0 \begin{cases} w = 0 \\ M = 0 \rightarrow \quad w" = 0 \end{cases}$ Appui simple $\qquad x = L \begin{cases} w = 0 \\ w' = 0 \end{cases}$ encastrement parfait

L'équation aux différences finies de la 4eme dérivée de w(x) s'écrit :

$$w_{i-2} - 4w_{i-1} + 6w_i - 4w_i + w_{i+2} = \frac{P_i L^4}{256EI}$$

Exprimons cette équation pour chaque station :

Station (1) : conditions aux limites

$$w_1 = 0$$
$$M_1 = 0 \rightarrow w_2 - 2w_1 + w_2 = 0$$

D'où :

$$\boldsymbol{w_2 = -w_2}$$

Station (2) : $x_2 = h \quad P_2 = \frac{3}{4} P_{max}$

$$(-w_2) - 4\cancel{w_1} + 6w_2 - 4w_3 + w_4 = \frac{L^4}{256EI} * \frac{3}{4} P_{max}$$

$$5w_2 - 4w_3 + w_4 = \frac{3}{1024} P_{max} \frac{L^4}{EI} \qquad \text{(i)}$$

Station (3) : $x_3 = 2h \qquad P_3 = \frac{1}{2} P_{max}$

$$w_1 - 4w_2 + 6w_3 - 4w_4 + w_5 = \frac{L^4}{256EI} \frac{1}{2} P_{max}$$

$$-4w_2 + 6w_3 - 4w_4 = \frac{2}{1024} P_{max} \frac{L^4}{EI} \qquad \text{(j)}$$

Station(4) : $x_4 = 3h$

$$w_2 - 4w_3 + 6w_4 - 4w_5 + w_4 = \frac{1}{1024} P_{max} \frac{L^4}{EI}$$

Station (5) :

$$w'_5 = 0 \quad => \left(\frac{w_{4'} - w_4}{2h}\right) = 0 \quad => \quad \boldsymbol{w_{4'} = w_4}$$

$$w_2 - 4w_3 + 7w_4 = \frac{1}{1024} P_{max} \frac{L^4}{EI} \qquad \text{(k)}$$

Le système d'équations linéaires formé composé des équations (i), (j) et (k) s'écrit :

5	-4	1	w_2	3	
-4	6	-4	w_3	2	P_{max} L_4
1	-4	7	w_4	1	1024 EI

$$[\,A\,] = \begin{bmatrix} 5 & -4 & 1 \\ -4 & 6 & -4 \\ 1 & -4 & 7 \end{bmatrix} *$$

Sous la forme générale :

A* w = P

Après triangularisation de la matrice A on obtient les résultats suivants :

$$w_2 = 0.003018 \frac{P_{max} L^4}{EI}$$

$$w_3 = 0.003462 \frac{P_{max} L^4}{EI}$$

$$w_4 = 0.001687 \frac{P_{max} L^4}{EI}$$

Le moment M_i ou nœud i est obtenu directement par la relation :

$$M_i = -EIw''_i = \frac{-EI16}{L^2}[w_{i-1} + 2w_i + w_{i+1}]$$

Ainsi la valeur approchée du moment d'encastrement est égale à :

$$M_5 = -\frac{EI16}{L^2}[w_4 - 2w_5 + w_4] = -\frac{32}{L^2} w_4$$

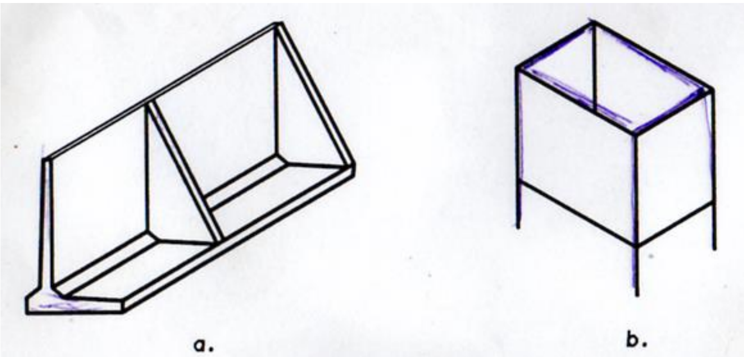
$$M_5 = -0.0540 P_{max} L^2$$

Ce qui représente une erreur de 7% par rapport à la valeur exacte du moment :

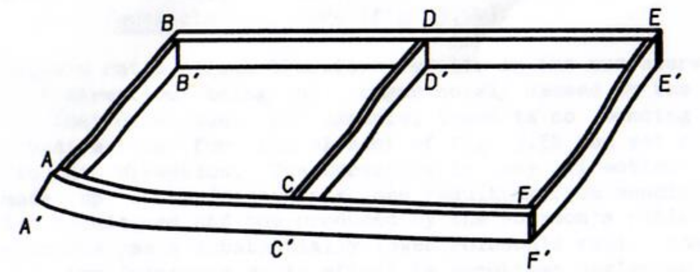
$$-\frac{7}{120}P_{max}L^2 = -0.0583P_{max}L^2$$

IV.4. Application de la méthode des différences finies au calcul des plaques

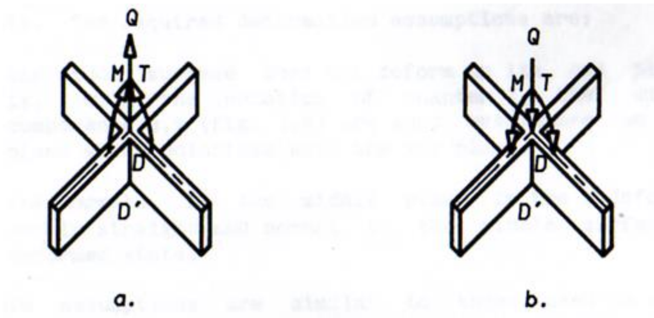
IV.4.1. Théorie des plaques minces

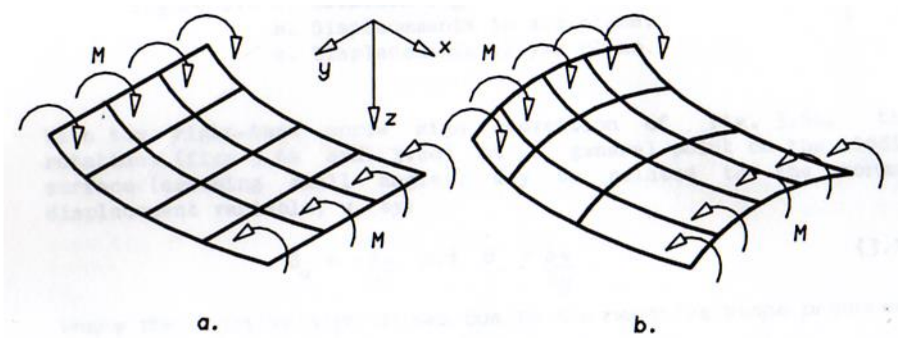


Voiles et diaphragmes

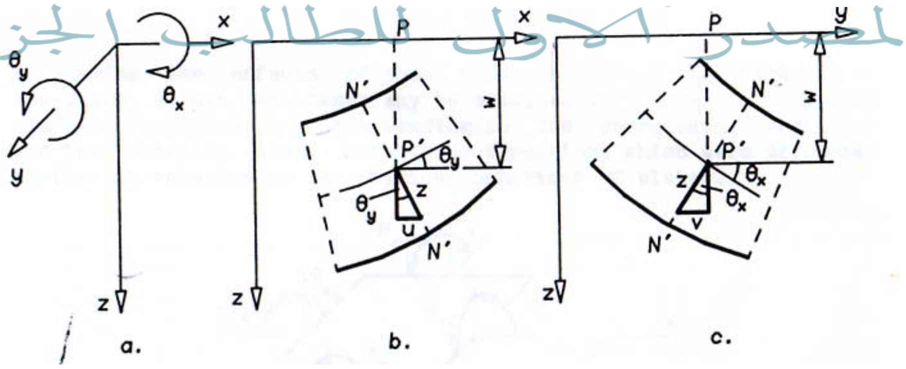


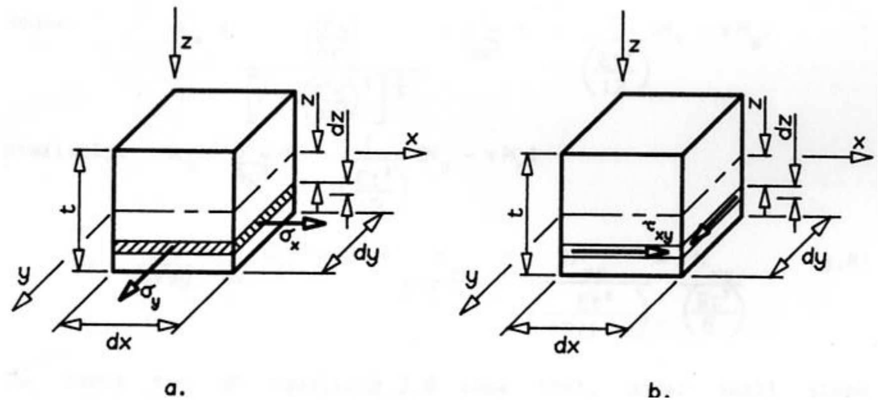
Dalles



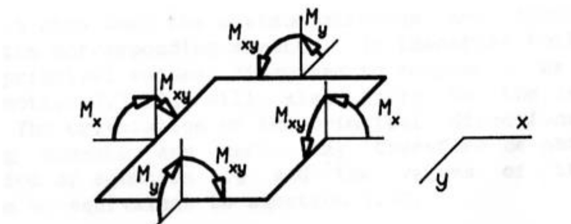


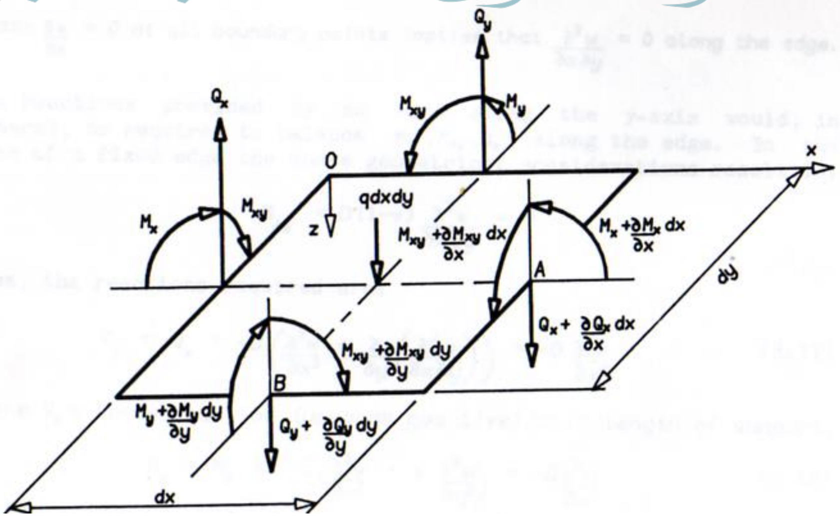
IV.4.2. Détermination des équations des dalles





Déformation d'un élément plaque





<u>**FIGURE IV.1 : Efforts internes agissant sur un élément de plaque**</u>

La figure précédente représente les efforts unitaires agissant sur un élément de dalle dx dy.

$M_x = -D\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + v\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right]$ Moment fléchissant autour de l'axe X

$M_y = -D\left[\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + v\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right]$ Moment fléchissant autour de l'axe Y

$Mxy = -D(1-v)\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$ Moment de torsion

$Q_x = \left(\frac{\partial}{\partial x}\nabla^2 w\right)(-D)$ Effort tranchant pur par rapport à l'axe X

$Q_y = \left(\frac{\partial}{\partial y}\nabla^2 w\right)(-D)$ Effort tranchant pur par rapport à l'axe Y

∇^2: Laplacien

$D = \frac{Et^3}{12(1-v^2)}$ est la rigidité flexionnelle de la plaque d'épaisseur t

E : Module de Young

v : Coefficient de poisson

Paramètres Dépendant du type de matériau

Ecrivons les équations d'équilibre des forces et des moments agissant sur l'élément plaque de la figure II.1 :

- Equilibre des forces dans la direction Y

- Equilibre des moments par rapport à l'axe X

- Equilibre des moments par rapport à l'axe Y

$$\boldsymbol{\Delta\Delta w = \nabla^4 w = \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{2\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{p(x,y)}{D}} \qquad \mathbf{(18)}$$

Où $w(x,y)$ et $p(x,y)$ désignent respectivement le déplacement transversal et la charge transversale appliquée.

La solution d'une plaque donc revient à trouver une surface fléchie $\boldsymbol{w = w(x,y)}$ qui vérifie l'équation de Lagrange et satisfait sur le contour les conditions de bord qui dépendent de la manière dont elle est appuyée.

IV.4.3 Forme finie de l’équation de Lagrange

L’étude d’une structure bidimensionnelle telle que les plaques, les dalles, les voiles et les diaphragmes est régie pour **l’équation différentielle de Lagrange (18) (équation de la surface fléchie). L’expression finie de cette équation de est obtenue en combinant les differences finies de chaque terme comment suit :**

- l’opérateur mathématique dénommé **« Laplacien » désigné par le symbole** $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ au point (i,j) est exprimé sous forme finie par la relation suivante :

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{1}{h^2}\begin{bmatrix} & -1 & \\ +1 & -4 & +1 \\ & +1 & \end{bmatrix} \qquad (12)$$

Par analogie le deuxième opérateur mathématique $\Delta\Delta$ s’écrit:

$$\Delta\Delta = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + \frac{2\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}$$

Les valeurs finies de chaque terme de l’operateur $\Delta\Delta$ au point (i,j) sont déterminées comme suit :

$$\left[\frac{\partial^4 f(x,y)}{\partial x^4}\right]_{i,j} = \frac{1}{h^4}\left[f_{i-2,j} - 4f_{i-1,j} + 6f_{i,j} - 4f_{i+1,j} + f_{i+2,j}\right]$$

$$\left[\frac{\partial^4 f(x,y)}{\partial y^4}\right]_{i,j} = \frac{1}{h^4}\left[f_{i,j-2} - 4f_{i,j-1} + 6f_{i,j} - 4f_{i,j+1} + f_{i,j+2}\right]$$

$$\left[\frac{\partial^4 f(x,y)}{\partial y^2 \partial x^2}\right]_{i,j} = \frac{1}{h^4}\left[6f_{i,j} - 2(f_{i+1,j} + f_{i-1,j} + f_{i,j} + f_{i,j+1} + f_{i,j-1} + f_{i+1,j+1} + f_{i+1,j-1+}f_{i-1,j+1} + f_{i-1,j-1}\right]$$

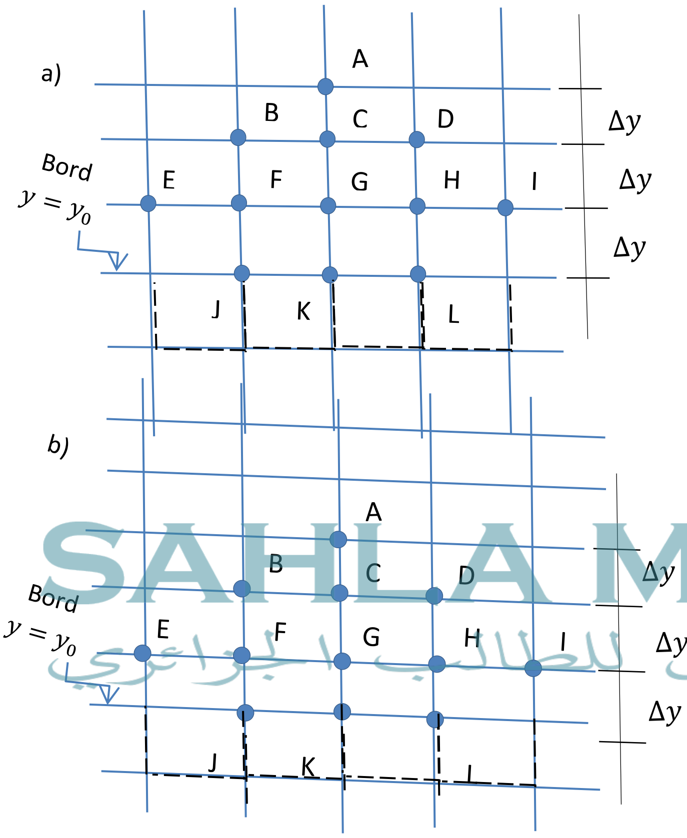
On peut ainsi combiner ces différences finies sur la forme schématique (schéma de Lamé) suivante:

$$\Delta\Delta = \frac{1}{h^4}\begin{pmatrix} & & 1 & & \\ & 2 & -8 & 2 & \\ 1 & -8 & 20 & -8 & 1 \\ & 2 & -8 & 2 & \\ & & 1 & & \end{pmatrix} \qquad (13)$$

Cette équation finie permet de résoudre numériquement l'équation **de Laplace** pour le vecteur des déplacements aux nœuds du maillage du modèle de la dalle.

IV.5. Application au calcul des plaques

Pour résoudre ce problème par la **M D F** on considère un maillage orthogonal de pas Δx et Δy et exprimer l'équation $\nabla^4 w(x,y) = \frac{p(x,y)}{D}$ en utilisant son expression aux différences finie (13). Considérons le cas la dalle avec différents conditions de bord :



a) Dans le cas de la figure (a) on a un bord simplement appuyé ou encastré (une rangée de nœuds fictifs suffit) : la maille fictive sera prolongé à partir du bord $y = y_0$
b) Dans le cas de la figure (b) on a un bord libre (deux rangées de nœuds fictifs sont nécessaires à partir du bord $y = y_0$)

En règle générale on prend $\Delta x = \Delta y = h$ donc la solution de l'équation de Lagrange sous forme finie s'écrit :

$$\begin{array}{ccccc} & & \boxed{1} & & \\ & \boxed{2} & \boxed{-8} & \boxed{2} & \\ \boxed{1} & \boxed{-8} & \boxed{20} & \boxed{-8} & \boxed{1} \\ & \boxed{2} & \boxed{-8} & \boxed{2} & \\ & & \boxed{1} & & \end{array} \quad (w) = \frac{ph^4}{D}$$

Si l'on exprime l'équation de Lagrange en un nœud proche du bord, le nœud G situé à une rangée des nœuds du bord $y = y_0$ (figure a.) on fait intervenir la valeur de w en un nœud fictif M situé à l'extérieur de contour.

- si on considère que le bord $y = y_0$ est encastré on a alors deux conditions de bord :

$$y = y_0 \rightarrow w(x,y) = 0 \rightarrow \frac{\partial w(x,y)}{\partial y} = 0$$

- si le bord est simplement appuyé on a :

$$y = y_0 \rightarrow w(x,y) \qquad M_y = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + v\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) = 0 \qquad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0$$

Dans les deux cas on obtient :

$$w_j = w_k = w_h = 0$$

Pour le nœud fictif M on a :

$w_M = w_G$ (Bord encastré)

$w_M = -w_G$ (Bord simplement appuyé)

Dans le cas d'un bord libre $y=y_0$ on a deux conditions :

$$M_y = 0 \text{ et } R_y = Q_y + \frac{\partial M_{yx}}{\partial x} = 0$$

Ry est appelée réaction de Kirchhoff. Cette quantité est statiquement équivalente à l'effort combiné de l'effort tranchant Qy et du moment de torsion Myx.

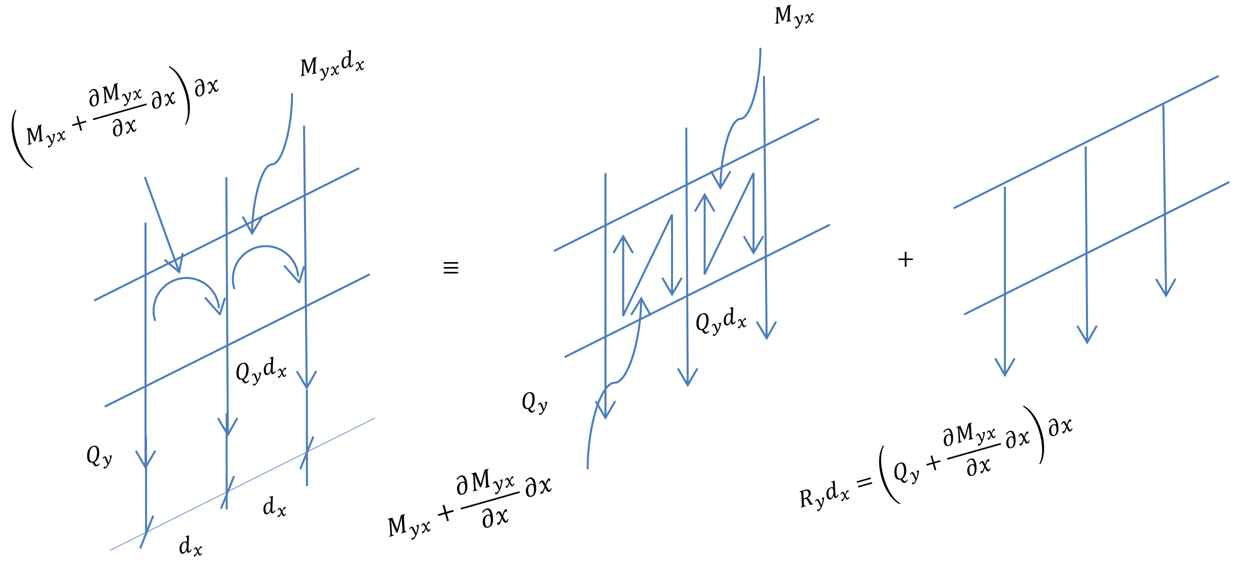


Figure IV.2. Représentation physique des réactions de Kirchhoff agissant sur le côté d_x

Si on considère le bord d_y on peut encore :

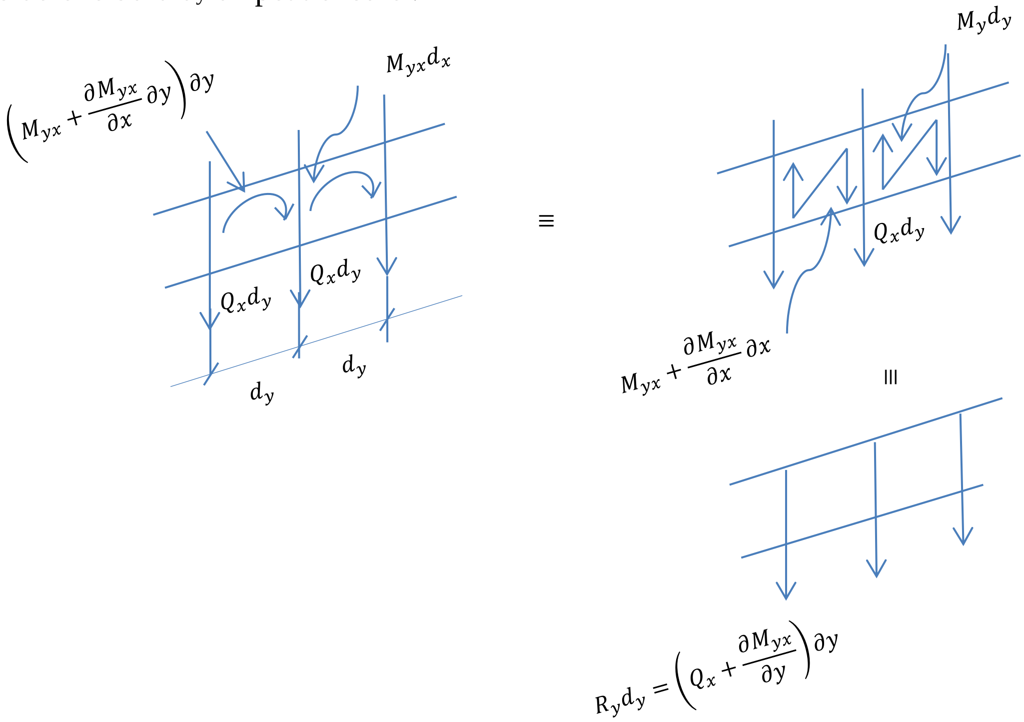
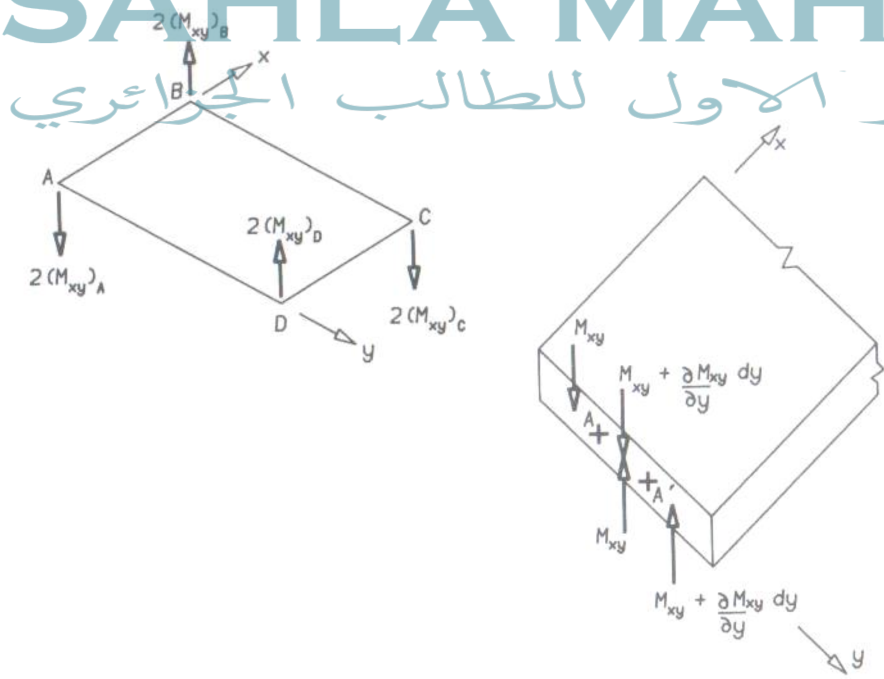


Figure IV.3. Représentation physique des réactions de Kirchhoff agissant sur le côté d_y



Rx et Ry sont connues sous l'appellation **« réactions de Kirchhoff »**

$Q_x = -D\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2}\right)$ ➔ $R_x = -D\left[\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2 - v)\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2}\right]$

$\frac{\partial M_{xy}}{\partial y} = -D(1 - v)\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2}$

Pour $v = 0$

$$R_x = -\left[\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + 2\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2}\right]$$

$Q_y = -D\left(\frac{\partial^3 w}{\partial y3} + \frac{\partial^3 w}{\partial y \partial x^2}\right)$ ➔ $R_y = -D\left[\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2)\frac{\partial^3 w}{\partial y \partial x^2}\right]$

Différences finies des réactions de Kirchhoff

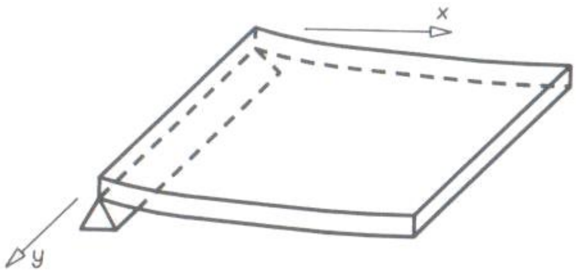
$$\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}=\frac{1}{2h^3}\left(\boxed{-1}\boxed{2}\boxed{0}\boxed{-2}\boxed{1}\right)(w)$$

$$\frac{\partial^3 w}{\partial x 2 y^2}=\frac{1}{2h^3}\begin{pmatrix}\boxed{-1} & \boxed{0} & \boxed{1}\\ \boxed{2} & \boxed{0} & \boxed{-2}\\ \boxed{-1} & \boxed{0} & \boxed{1}\end{pmatrix}(w)$$

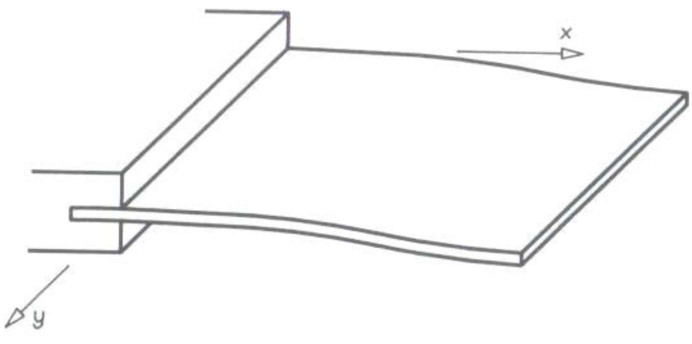
$$R_x=\frac{1}{2h^3}\begin{pmatrix} & \boxed{-2} & \boxed{0} & \boxed{2} & \\ \boxed{-1} & \boxed{6} & \boxed{0} & \boxed{6} & \boxed{1}\\ & \boxed{-2} & \boxed{0} & \boxed{2} & \end{pmatrix}(w)$$

$$R_y=\frac{1}{2h^3}\begin{pmatrix} & \boxed{-1} & \\ \boxed{-2} & \boxed{6} & \boxed{-2}\\ \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{0}\\ \boxed{2} & \boxed{-6} & \boxed{2}\\ & \boxed{1} & \end{pmatrix}(w)$$

Pour le bord libre les relations précédentes aux différences finies Ry (doivent être écrites au point G (figure b). On fait ainsi intervenir les valeurs des déplacements w aux points pivots fictifs J, K, L et M il faut donc considérer deux rangées de nœuds fictifs à l'extérieur du contour. Pour avoir autant d'équations que d'inconnues. L'équation de Lagrange doit être évaluée pour chaque nœud situé sur le bord libre.

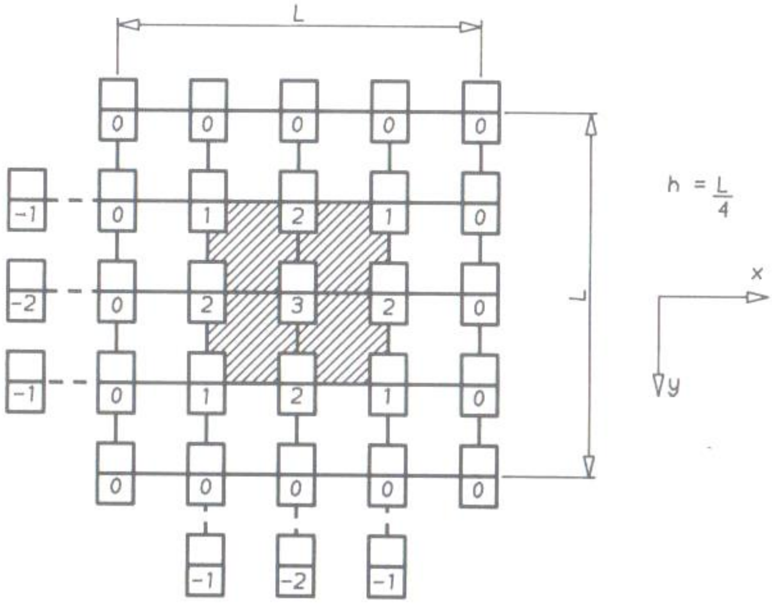


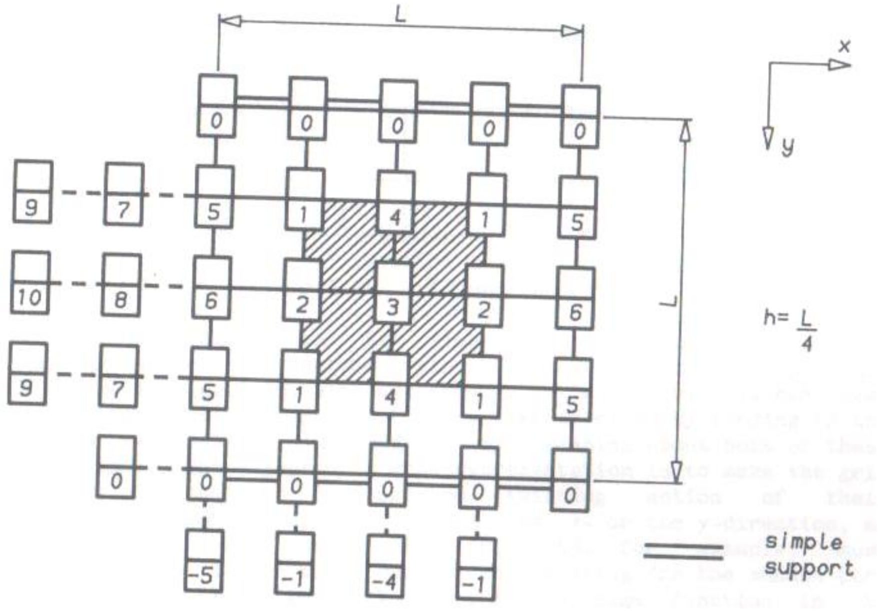
Bord libre

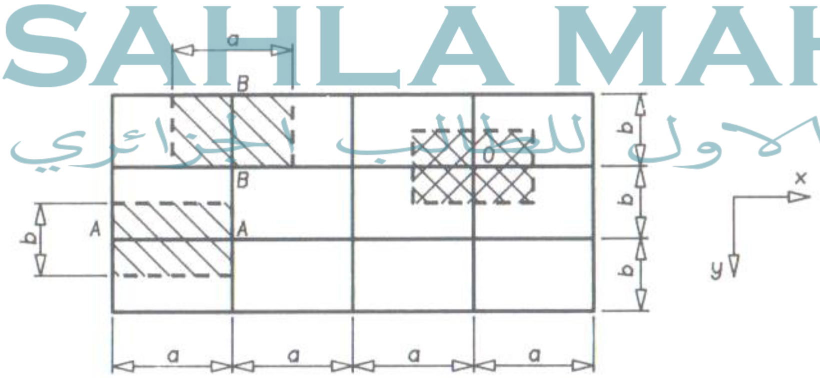


Bord encastré

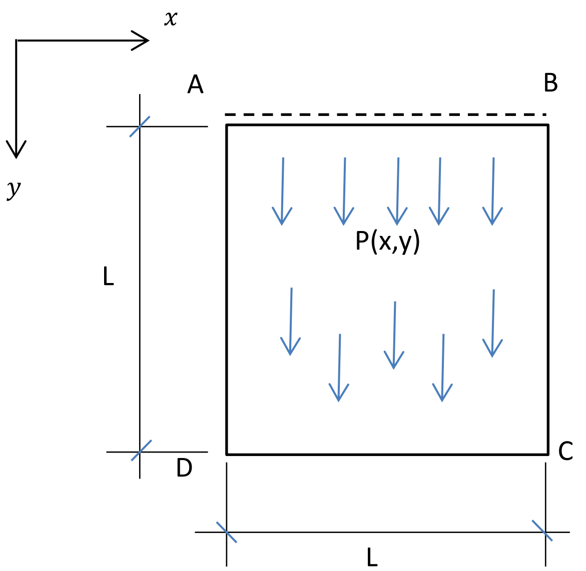
Modélisation d'une dalle par la MDF




L
x
y
h= L/4
simple
support


a
b
A
B
x
y

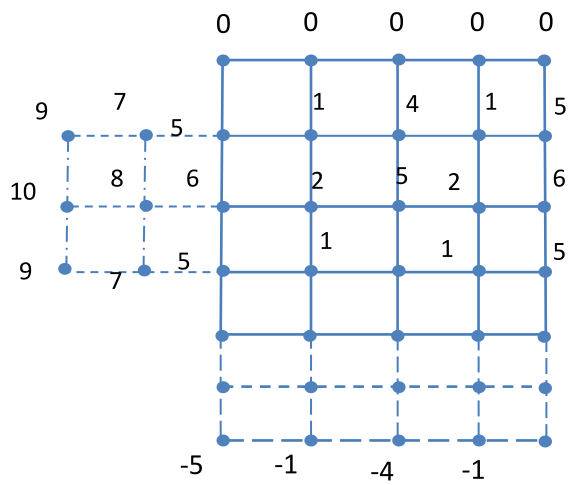
EXEMPLE (1) : soit une dalle carrée de côté L chargée uniformément par une charge p(x,y) = p :



AB *et* DC : *bords simplement appuyés*

AD *et* BC : *bords libres*

On prend un pas constant $h = \frac{L}{4}$ dans les deux directions x et y :



Les six premières équations sont obtenues en appliquant l'équation de Lagrange discrétisée (II.4.) aux nœuds (1, 2, 3, 4, 5, et 6).

Les équations 7ieme et 8 ieme sont :

$$M_{x5} = 0 \quad et \quad M_{x6} = 0$$

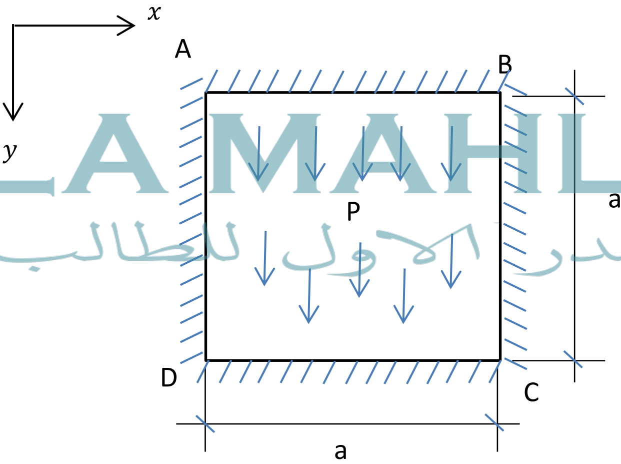
Les équations 9ieme et 10ieme sont données par :

$R_{x5} = 0$ et $R_{x6} = 0$

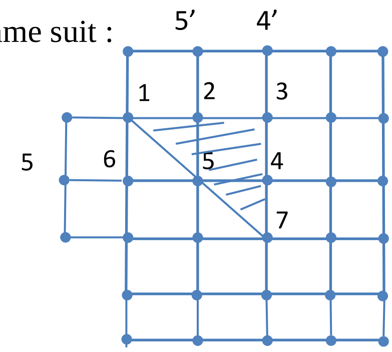
On obtient :

$$\begin{bmatrix} 21 & -8 & 2 & -8 & -8 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -16 & 21 & -8 & 4 & 4 & -8 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 8 & -16 & 20 & -16 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -16 & 4 & -8 & 20 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -8 & 2 & 0 & 1 & 20 & -8 & -8 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & -8 & 1 & 0 & -16 & 20 & 4 & -8 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -6 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 6 & -2 & -1 & 0 \\ 4 & -6 & 1 & 0 & 0 & 0 & -4 & 6 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ w_5 \\ w_6 \\ w_7 \\ w_8 \\ w_9 \\ w_{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \frac{ph^4}{D}$$

EXAMPLE (2) : soit la dalle carrée de côté a parfaitement encastrée sur les quatre bords :



Le modèle numérique MDF se présente comme suit :



On prend un pas constant $h = \frac{a}{4}$ dans les deux directions x et y

En tenant compte de la symétrie on considère 1/8 de la dalle, Les inconnues sont les déplacements $w_7, w_4, et\ w_5$.

En appliquant l'équation de Lagrange en chacun des nœuds on trouve :

Nœuds (7) : $20w_7 - 32w_4 + 8w_5 + w_3 + w_3 + w_3 + w_3 = \frac{ph^4}{D}$ (1)

Nœuds (4) : $20w_4 - 16w_5 - 8w_7 + 4w_4 + w_4 + w_4 = \frac{ph^4}{D}$

$$20w_4 - 16w_5 - 8w_7 = \frac{ph^4}{D} \qquad (2)$$

Nœuds (5) : $20w_5 - 16w_4 - 2w_7 + w_5 + w_5 + w_5 + w_5 = \frac{ph^4}{D}$

$$24w_5 - 16w_4 - 2w_7 = \frac{ph^4}{D} \qquad (3)$$