

# Programme dual et dual du simplexe

---

Mme OULD MOHAMED Ryma

3 avril 2021

Université d'Alger 1  
Faculté des Sciences  
Département MI



# Preuve du Théorème 4

Soient  $(P)$  un programme primal et  $(D)$  son dual

$$(P) \begin{cases} AX \leq b \\ CX = \max Z(X) \\ X \geq 0 \end{cases} \quad (D) \begin{cases} YA \geq C \\ Yb = \min W(X) \\ Y \geq 0 \end{cases}$$

# Preuve du Théorème 4

Soient  $(P)$  un programme primal et  $(D)$  son dual

$$(P) \begin{cases} AX \leq b \\ CX = \max Z(X) \\ X \geq 0 \end{cases} \quad (D) \begin{cases} YA \geq C \\ Yb = \min W(X) \\ Y \geq 0 \end{cases}$$

## Théorème

Pour tout couple de solutions réalisables  $\bar{X}$  et  $\bar{Y}$  de  $(P)$  et  $(D)$  respectivement, on a

$$\underbrace{C\bar{X}}_{=\bar{Z}} \leq \underbrace{\bar{Y}b}_{=\bar{W}}$$

# Preuve du Théorème 4

**Démonstration.**

Soit  $\bar{X}$  une solution réalisable de  $(P)$  et  $\bar{Y}$  une solution réalisable de  $(D)$ . On a

# Preuve du Théorème 4

## Démonstration.

Soit  $\bar{X}$  une solution réalisable de  $(P)$  et  $\bar{Y}$  une solution réalisable de  $(D)$ . On a

$$\begin{cases} A\bar{X} \leq b \\ C \leq \bar{Y}A \end{cases}$$

## Preuve du Théorème 4

**Démonstration.**

Soit  $\bar{X}$  une solution réalisable de  $(P)$  et  $\bar{Y}$  une solution réalisable de  $(D)$ . On a

$$\begin{cases} A\bar{X} \leq b \\ C \leq \bar{Y}A \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \bar{Y}A\bar{X} \leq \bar{Y}b \\ C\bar{X} \leq \bar{Y}A\bar{X} \end{cases}$$

## Preuve du Théorème 4

**Démonstration.**

Soit  $\bar{X}$  une solution réalisable de  $(P)$  et  $\bar{Y}$  une solution réalisable de  $(D)$ . On a

$$\begin{cases} A\bar{X} \leq b \\ C \leq \bar{Y}A \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \bar{Y}A\bar{X} \leq \bar{Y}b \\ C\bar{X} \leq \bar{Y}A\bar{X} \end{cases}$$

d'où

$$C\bar{X} \leq \bar{Y}A\bar{X} \leq \bar{Y}b.$$



## Preuve du Corollaire 5

### Corollaire

*Soient  $\bar{X}$  une solution réalisable de (P) et  $\bar{Y}$  une solution réalisable de (D), si  $C\bar{X} = \bar{Y}b$  alors  $\bar{X}$  et  $\bar{Y}$  sont des solutions optimales de (P) et (D), respectivement.*

# Preuve du Corollaire 5

## Corollaire

*Soient  $\bar{X}$  une solution réalisable de  $(P)$  et  $\bar{Y}$  une solution réalisable de  $(D)$ , si  $C\bar{X} = \bar{Y}b$  alors  $\bar{X}$  et  $\bar{Y}$  sont des solutions optimales de  $(P)$  et  $(D)$ , respectivement.*

## Démonstration.

Soient  $\bar{X}$  une solution réalisable de  $(P)$  et  $\bar{Y}$  une solution réalisable de  $(D)$ .

# Preuve du Corollaire 5

## Corollaire

*Soient  $\bar{X}$  une solution réalisable de  $(P)$  et  $\bar{Y}$  une solution réalisable de  $(D)$ , si  $C\bar{X} = \bar{Y}b$  alors  $\bar{X}$  et  $\bar{Y}$  sont des solutions optimales de  $(P)$  et  $(D)$ , respectivement.*

## Démonstration.

Soient  $\bar{X}$  une solution réalisable de  $(P)$  et  $\bar{Y}$  une solution réalisable de  $(D)$ .

Par l'absurde, supposons que  $C\bar{X} = \bar{Y}b$  et que

# Preuve du Corollaire 5

## Corollaire

*Soient  $\bar{X}$  une solution réalisable de  $(P)$  et  $\bar{Y}$  une solution réalisable de  $(D)$ , si  $C\bar{X} = \bar{Y}b$  alors  $\bar{X}$  et  $\bar{Y}$  sont des solutions optimales de  $(P)$  et  $(D)$ , respectivement.*

## Démonstration.

Soient  $\bar{X}$  une solution réalisable de  $(P)$  et  $\bar{Y}$  une solution réalisable de  $(D)$ .

Par l'absurde, supposons que  $C\bar{X} = \bar{Y}b$  et que

- $\bar{X}$  n'est pas une solution optimale de  $(P)$ .

# Preuve du Corollaire 5

## Corollaire

*Soient  $\bar{X}$  une solution réalisable de  $(P)$  et  $\bar{Y}$  une solution réalisable de  $(D)$ , si  $C\bar{X} = \bar{Y}b$  alors  $\bar{X}$  et  $\bar{Y}$  sont des solutions optimales de  $(P)$  et  $(D)$ , respectivement.*

## Démonstration.

Soient  $\bar{X}$  une solution réalisable de  $(P)$  et  $\bar{Y}$  une solution réalisable de  $(D)$ .

Par l'absurde, supposons que  $C\bar{X} = \bar{Y}b$  et que

- $\bar{X}$  n'est pas une solution optimale de  $(P)$ .
- ou  $\bar{Y}$  n'est pas une solution optimale de  $(D)$ .

## Preuve du Corollaire 5

### Démonstration.

Autrement dit, il existe  $X'$ ,  $Y'$  deux solutions réalisables de  $(P)$  et  $(D)$  respectivement, telles que

## Preuve du Corollaire 5

**Démonstration.**

Autrement dit, il existe  $X'$ ,  $Y'$  deux solutions réalisables de  $(P)$  et  $(D)$  respectivement, telles que

$$\begin{cases} C\bar{X} < CX' \text{ ou} \\ \bar{Y}b > Y'b \end{cases}$$

## Preuve du Corollaire 5

**Démonstration.**

Autrement dit, il existe  $X'$ ,  $Y'$  deux solutions réalisables de  $(P)$  et  $(D)$  respectivement, telles que

$$\begin{cases} C\bar{X} < CX' \text{ ou} \\ \bar{Y}b > Y'b \end{cases}$$

comme  $C\bar{X} = \bar{Y}b$

## Preuve du Corollaire 5

**Démonstration.**

Autrement dit, il existe  $X'$ ,  $Y'$  deux solutions réalisables de  $(P)$  et  $(D)$  respectivement, telles que

$$\begin{cases} C\bar{X} < CX' \text{ ou} \\ \bar{Y}b > Y'b \end{cases}$$

comme  $C\bar{X} = \bar{Y}b$

$$\begin{cases} \bar{Y}b < CX' \text{ ou} \\ C\bar{X} > Y'b \end{cases}$$

contradiction.

# Vecteur multiplicateur

Soit  $(P)$  un programme linéaire écrit sous forme standard

$$(P) \begin{cases} AX = b \\ CX = \max Z(X) \end{cases} \quad X \geq 0$$

# Vecteur multiplicateur

Soit  $(P)$  un programme linéaire écrit sous forme standard

$$(P) \begin{cases} AX = b & X \geq 0 \\ CX = \max Z(X) \end{cases}$$

et  $(P_J)$  le programme linéaire  $(P)$  écrit sous forme canonique par rapport à une base  $J$ .

$$(P_J) \begin{cases} X_J + (A^J)^{-1} A^{\bar{J}} X_{\bar{J}} = (A^J)^{-1} b & X_J, X_{\bar{J}} \geq 0 \\ (C^{\bar{J}} - \pi A^{\bar{J}}) X_{\bar{J}} = \max Z(X) - \pi b \end{cases}$$

# Vecteur multiplicateur

Soit  $(P)$  un programme linéaire écrit sous forme standard

$$(P) \begin{cases} AX = b & X \geq 0 \\ CX = \max Z(X) \end{cases}$$

et  $(P_J)$  le programme linéaire  $(P)$  écrit sous forme canonique par rapport à une base  $J$ .

$$(P_J) \begin{cases} X_J + (A^J)^{-1} A^{\bar{J}} X_{\bar{J}} = (A^J)^{-1} b & X_J, X_{\bar{J}} \geq 0 \\ (C^{\bar{J}} - \pi A^{\bar{J}}) X_{\bar{J}} = \max Z(X) - \pi b \end{cases}$$

avec

- $A^J$  inversible.

# Vecteur multiplicateur

Soit  $(P)$  un programme linéaire écrit sous forme standard

$$(P) \begin{cases} AX = b & X \geq 0 \\ CX = \max Z(X) \end{cases}$$

et  $(P_J)$  le programme linéaire  $(P)$  écrit sous forme canonique par rapport à une base  $J$ .

$$(P_J) \begin{cases} X_J + (A^J)^{-1} A^{\bar{J}} X_{\bar{J}} = (A^J)^{-1} b & X_J, X_{\bar{J}} \geq 0 \\ (C^{\bar{J}} - \pi A^{\bar{J}}) X_{\bar{J}} = \max Z(X) - \pi b \end{cases}$$

avec

- $A^J$  inversible.
- $\pi = C^J (A^J)^{-1}$  le vecteur multiplicateur relativement à la base  $J$ .

# Vecteur multiplicateur

Soit  $(P)$  un programme linéaire écrit sous forme standard

$$(P) \begin{cases} AX = b & X \geq 0 \\ CX = \max Z(X) \end{cases}$$

et  $(P_J)$  le programme linéaire  $(P)$  écrit sous forme canonique par rapport à une base  $J$ .

$$(P_J) \begin{cases} X_J + (A^J)^{-1} A^{\bar{J}} X_{\bar{J}} = (A^J)^{-1} b & X_J, X_{\bar{J}} \geq 0 \\ (C^{\bar{J}} - \pi A^{\bar{J}}) X_{\bar{J}} = \max Z(X) - \pi b \end{cases}$$

avec

- $A^J$  inversible.
- $\pi = C^J (A^J)^{-1}$  le vecteur multiplicateur relativement à la base  $J$ .
- et  $C(J) = C - \pi A$  le vecteur coût relativement à la base  $J$ .

# Vecteur multiplicateur

Soit  $(D)$  le programme linéaire dual de  $(P)$

$$(D) \begin{cases} YA \geq C \\ Yb = \min W(Y) \end{cases} \quad Y \in \mathbb{R}$$

# Vecteur multiplicateur

Soit  $(D)$  le programme linéaire dual de  $(P)$

$$(D) \begin{cases} YA \geq C \\ Yb = \min W(Y) \end{cases} \quad Y \in \mathbb{R}$$

## Théorème

*Le vecteur multiplicateur  $\pi^*$  relativement à une base optimale  $J^*$  du programme linéaire  $(P)$  est une solution optimale du dual de  $(P)$ , de plus*

$$W^* = Z^*.$$

# Vecteur multiplicateur

## Démonstration.

Soient

- $J^*$  une base optimale de  $(P)$ ,

# Vecteur multiplicateur

## Démonstration.

Soient

- $J^*$  une base optimale de  $(P)$ ,
- $X^*$  la solution de base de  $(P)$  par rapport à  $J^*$  ( $X^*$  est optimale),

# Vecteur multiplicateur

## Démonstration.

Soient

- $J^*$  une base optimale de  $(P)$ ,
- $X^*$  la solution de base de  $(P)$  par rapport à  $J^*$  ( $X^*$  est optimale),
- et  $\pi^*$  le vecteur multiplicateur de  $(P)$  par rapport à  $J^*$ .

# Vecteur multiplicateur

## Démonstration.

Soient

- $J^*$  une base optimale de  $(P)$ ,
- $X^*$  la solution de base de  $(P)$  par rapport à  $J^*$  ( $X^*$  est optimale),
- et  $\pi^*$  le vecteur multiplicateur de  $(P)$  par rapport à  $J^*$ .

# Vecteur multiplicateur

## Démonstration.

Soient

- $J^*$  une base optimale de  $(P)$ ,
- $X^*$  la solution de base de  $(P)$  par rapport à  $J^*$  ( $X^*$  est optimale),
- et  $\pi^*$  le vecteur multiplicateur de  $(P)$  par rapport à  $J^*$ .

Montrons en premier lieu que  $\pi^*$  est une solution réalisable de  $(D)$ . A l'optimum on a

# Vecteur multiplicateur

## Démonstration.

Soient

- $J^*$  une base optimale de  $(P)$ ,
- $X^*$  la solution de base de  $(P)$  par rapport à  $J^*$  ( $X^*$  est optimale),
- et  $\pi^*$  le vecteur multiplicateur de  $(P)$  par rapport à  $J^*$ .

Montrons en premier lieu que  $\pi^*$  est une solution réalisable de  $(D)$ . A l'optimum on a

$$\begin{aligned} C(J^*) &\leq 0, & \text{où } C(J^*) &= C - \pi^* A \\ \pi^* A &\geq C \end{aligned}$$

# Vecteur multiplicateur

## Démonstration.

Soient

- $J^*$  une base optimale de  $(P)$ ,
- $X^*$  la solution de base de  $(P)$  par rapport à  $J^*$  ( $X^*$  est optimale),
- et  $\pi^*$  le vecteur multiplicateur de  $(P)$  par rapport à  $J^*$ .

Montrons en premier lieu que  $\pi^*$  est une solution réalisable de  $(D)$ . A l'optimum on a

$$\begin{aligned} C(J^*) &\leq 0, & \text{où } C(J^*) &= C - \pi^* A \\ \pi^* A &\geq C \end{aligned}$$

$\pi^*$  est donc une solution réalisable de  $(D)$ .

# Vecteur multiplicateur

## Démonstration.

Montrons à présent que  $\pi^*$  est optimale, on a :

$$(C^{\overline{J^*}} - \pi A^{\overline{J^*}})X_{\overline{J^*}} = Z^* - \pi^* b$$

# Vecteur multiplicateur

## Démonstration.

Montrons à présent que  $\pi^*$  est optimale, on a :

$$(C\overline{J^*} - \pi A\overline{J^*})X_{\overline{J^*}} = Z^* - \pi^*b$$

comme  $X_{\overline{J^*}} = 0$

$$Z^* = \pi^*b = CX^*$$

# Vecteur multiplicateur

## Démonstration.

Montrons à présent que  $\pi^*$  est optimale, on a :

$$(C\overline{J^*} - \pi A\overline{J^*})X_{\overline{J^*}} = Z^* - \pi^*b$$

comme  $X_{\overline{J^*}} = 0$

$$Z^* = \pi^*b = CX^*$$

ainsi

$$W_{\min} = \pi^*b = Z^*$$

# Vecteur multiplicateur

## Démonstration.

Montrons à présent que  $\pi^*$  est optimale, on a :

$$(C\overline{J^*} - \pi A\overline{J^*})X_{\overline{J^*}} = Z^* - \pi^*b$$

comme  $X_{\overline{J^*}} = 0$

$$Z^* = \pi^*b = CX^*$$

ainsi

$$W_{\min} = \pi^*b = Z^*$$

d'après le Corollaire 5  $\pi^*$  est une solution optimale du dual de  $(D)$ .

# Exemple 1

soit le tableau optimale du simplexe associé au premier PL de l'exercice 4 de la série de TD 3.

| $J$   | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $b$ |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-----|
| $x_2$ | 0     | 1     | 0     | -1    | 1     | 0   |
| $x_3$ | 0     | 0     | 1     | -1    | 0     | 1   |
| $x_1$ | 1     | 0     | 0     | 0     | -1    | 3   |
|       | 0     | 0     | 0     | 2     | 1     | -9  |

## Exemple 1

soit le tableau optimale du simplexe associé au premier PL de l'exercice 4 de la série de TD 3.

| $J$   | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $b$ |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-----|
| $x_2$ | 0     | 1     | 0     | -1    | 1     | 0   |
| $x_3$ | 0     | 0     | 1     | -1    | 0     | 1   |
| $x_1$ | 1     | 0     | 0     | 0     | -1    | 3   |
|       | 0     | 0     | 0     | 2     | 1     | -9  |

•  $J^* = \{2, 3, 1\},$

## Exemple 1

soit le tableau optimale du simplexe associé au premier PL de l'exercice 4 de la série de TD 3.

| $J$   | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $b$ |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-----|
| $x_2$ | 0     | 1     | 0     | -1    | 1     | 0   |
| $x_3$ | 0     | 0     | 1     | -1    | 0     | 1   |
| $x_1$ | 1     | 0     | 0     | 0     | -1    | 3   |
|       | 0     | 0     | 0     | 2     | 1     | -9  |

- $J^* = \{2, 3, 1\},$

- $(A^{J^*})^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$

## Exemple 1

soit le tableau optimale du simplexe associé au premier PL de l'exercice 4 de la série de TD 3.

| $J$   | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $b$ |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-----|
| $x_2$ | 0     | 1     | 0     | -1    | 1     | 0   |
| $x_3$ | 0     | 0     | 1     | -1    | 0     | 1   |
| $x_1$ | 1     | 0     | 0     | 0     | -1    | 3   |
|       | 0     | 0     | 0     | 2     | 1     | -9  |

- $J^* = \{2, 3, 1\},$
- $(A^{J^*})^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$
- $C^{J^*} = (2 \quad 0 \quad 3),$

## Exemple 1

soit le tableau optimale du simplexe associé au premier PL de l'exercice 4 de la série de TD 3.

| $J$   | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $b$ |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-----|
| $x_2$ | 0     | 1     | 0     | -1    | 1     | 0   |
| $x_3$ | 0     | 0     | 1     | -1    | 0     | 1   |
| $x_1$ | 1     | 0     | 0     | 0     | -1    | 3   |
|       | 0     | 0     | 0     | 2     | 1     | -9  |

- $J^* = \{2, 3, 1\},$
- $(A^{J^*})^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$
- $C^{J^*} = (2 \quad 0 \quad 3),$
- $\pi^{J^*} = C^{J^*} \times (A^{J^*})^{-1} = (0 \quad 2 \quad 1),$

## Exemple 1

soit le tableau optimale du simplexe associé au premier PL de l'exercice 4 de la série de TD 3.

| $J$   | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $b$ |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-----|
| $x_2$ | 0     | 1     | 0     | -1    | 1     | 0   |
| $x_3$ | 0     | 0     | 1     | -1    | 0     | 1   |
| $x_1$ | 1     | 0     | 0     | 0     | -1    | 3   |
|       | 0     | 0     | 0     | 2     | 1     | -9  |

- $J^* = \{2, 3, 1\},$

- $(A^{J^*})^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$

- $C^{J^*} = (2 \quad 0 \quad 3),$

- $\pi^{J^*} = C^{J^*} \times (A^{J^*})^{-1} = (0 \quad 2 \quad 1),$

- $W^* = \pi^{J^*} b = (0 \quad 2 \quad 1) \times (2 \quad 3 \quad 3)^t = 9 = Z^*.$

# Remarques

- Si le primal est borné alors le dual n'admet pas de solution réalisable, et inversement.
- Il se peut également que ni le primal ni le dual n'admettent de solutions réalisables.

# Théorèmes des écarts complémentaires

Considérons le Primal suivant et son dual

$$(P) \begin{cases} AX \leq b & X \geq 0 \\ CX = Z_{\max} \end{cases} \quad \text{et} \quad (D) \begin{cases} YA \geq C & Y \geq 0 \\ Yb = Z_{\min} \end{cases}$$

## Théorème (forme symétrique)

*Soient  $\bar{X}$  et  $\bar{Y}$  des solutions réalisables respectivement pour les problèmes primal et dual (ci-dessus). Alors  $\bar{X}$  et  $\bar{Y}$  sont des solutions optimales pour ces problèmes si et seulement si pour tout  $j = 1, \dots, n$  et pour tout  $i = 1, \dots, m$  on a*

$$x_j > 0 \Rightarrow yA^j = c_j \quad (1)$$

$$yA^j > c_j = 0 \Rightarrow x_j = 0 \quad (2)$$

$$y^i > 0 \Rightarrow A_iX = b_i \quad (3)$$

$$A_iX < b_i = 0 \Rightarrow y_i = 0 \quad (4)$$

## Exemple 2

Considérons le PL suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 - x_2 + x_3 \leq 4 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 6 \\ -x_1 + 2x_3 \leq 3 \\ x_1 + x_2 + x_3 \leq 8 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = Z_{\max} \end{array} \right. \quad x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

- Donner son dual.

## Exemple 2

Considérons le PL suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 - x_2 + x_3 \leq 4 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 6 \\ -x_1 + 2x_3 \leq 3 \\ x_1 + x_2 + x_3 \leq 8 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = Z_{\max} \end{array} \right. \quad x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

- Donner son dual.

$$(D) \left\{ \begin{array}{l} y_1 + 2y_2 - y_3 + y_4 \geq 3 \\ -y_1 + y_2 + y_4 \geq 2 \\ y_1 + 3y_2 + 2y_3 + y_4 \geq 1 \\ 4y_1 + 6y_2 + 3y_3 + 8y_4 = W_{\min} \end{array} \right. \quad y_1, y_2, y_3, y_4 \geq 0$$

## Exemple 2

- Nous désirons vérifier que la solution  $X = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$  est optimale ?

## Exemple 2

- Nous désirons vérifier que la solution  $X = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$  est optimale ?

Vérifions que  $X = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$  est réalisable.

## Exemple 2

- Nous désirons vérifier que la solution  $X = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$  est optimale ?

Vérifions que  $X = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$  est réalisable.

$$\begin{cases} -6 < 4 \\ 6 = 6 \\ 0 < 3 \\ 6 < 8 \\ X \geq 0 \end{cases}$$

## Exemple 2

- Nous désirons vérifier que la solution  $X = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$  est optimale ?

Vérifions que  $X = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$  est réalisable.

$$\begin{cases} -6 < 4 \\ 6 = 6 \\ 0 < 3 \\ 6 < 8 \\ X \geq 0 \end{cases}$$

- $X$  est réalisable.

## Exemple 2

- Cherchons à présent la solution dual correspondante en utilisant le Théorème des écarts complémentaires.

## Exemple 2

- Cherchons à présent la solution dual correspondante en utilisant le Théorème des écarts complémentaires.

On a

- la première contrainte  $x_1 - x_2 + x_3 \leq 4$  n'est pas saturée (n'atteint pas sa borne) pour la solution  $X$ ,  $\Rightarrow y_1 = 0$ .

## Exemple 2

- Cherchons à présent la solution dual correspondante en utilisant le Théorème des écarts complémentaires.

On a

- la première contrainte  $x_1 - x_2 + x_3 \leq 4$  n'est pas saturée (n'atteint pas sa borne) pour la solution  $X$ ,  $\Rightarrow y_1 = 0$ .
- la deuxième contrainte  $2x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 6$  est saturée (atteint sa borne) pour la solution  $X$ , on ne peut rien dire.

## Exemple 2

- Cherchons à présent la solution dual correspondante en utilisant le Théorème des écarts complémentaires.

On a

- la première contrainte  $x_1 - x_2 + x_3 \leq 4$  n'est pas saturée (n'atteint pas sa borne) pour la solution  $X$ ,  $\Rightarrow y_1 = 0$ .
- la deuxième contrainte  $2x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 6$  est saturée (atteint sa borne) pour la solution  $X$ , on ne peut rien dire.
- la troisième contrainte  $-x_1 + 2x_3 \leq 3$  n'est pas saturée (n'atteint pas sa borne) pour la solution  $X$ ,  $\Rightarrow y_3 = 0$ .

## Exemple 2

- Cherchons à présent la solution dual correspondante en utilisant le Théorème des écarts complémentaires.

On a

- la première contrainte  $x_1 - x_2 + x_3 \leq 4$  n'est pas saturée (n'atteint pas sa borne) pour la solution  $X$ ,  $\Rightarrow y_1 = 0$ .
- la deuxième contrainte  $2x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 6$  est saturée (atteint sa borne) pour la solution  $X$ , on ne peut rien dire.
- la troisième contrainte  $-x_1 + 2x_3 \leq 3$  n'est pas saturée (n'atteint pas sa borne) pour la solution  $X$ ,  $\Rightarrow y_3 = 0$ .
- la quatrième contrainte  $x_1 + x_2 + x_3 \leq 8$  n'est pas saturée (n'atteint pas sa borne) pour la solution  $X$ ,  $\Rightarrow y_4 = 0$ .

## Exemple 2

- Cherchons à présent la solution dual correspondante en utilisant le Théorème des écarts complémentaires.

On a

- la première contrainte  $x_1 - x_2 + x_3 \leq 4$  n'est pas saturée (n'atteint pas sa borne) pour la solution  $X$ ,  $\Rightarrow y_1 = 0$ .
- la deuxième contrainte  $2x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 6$  est saturée (atteint sa borne) pour la solution  $X$ , on ne peut rien dire.
- la troisième contrainte  $-x_1 + 2x_3 \leq 3$  n'est pas saturée (n'atteint pas sa borne) pour la solution  $X$ ,  $\Rightarrow y_3 = 0$ .
- la quatrième contrainte  $x_1 + x_2 + x_3 \leq 8$  n'est pas saturée (n'atteint pas sa borne) pour la solution  $X$ ,  $\Rightarrow y_4 = 0$ .
- la variable  $x_2 > 0 \Rightarrow -y_1 + y_2 + y_4 = 2$ , (deuxième contrainte du dual saturée),  $y_2 = 2$ .

## Exemple 2

- Cherchons à présent la solution dual correspondante en utilisant le Théorème des écarts complémentaires.

On a

- la première contrainte  $x_1 - x_2 + x_3 \leq 4$  n'est pas saturée (n'atteint pas sa borne) pour la solution  $X$ ,  $\Rightarrow y_1 = 0$ .
- la deuxième contrainte  $2x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 6$  est saturée (atteint sa borne) pour la solution  $X$ , on ne peut rien dire.
- la troisième contrainte  $-x_1 + 2x_3 \leq 3$  n'est pas saturée (n'atteint pas sa borne) pour la solution  $X$ ,  $\Rightarrow y_3 = 0$ .
- la quatrième contrainte  $x_1 + x_2 + x_3 \leq 8$  n'est pas saturée (n'atteint pas sa borne) pour la solution  $X$ ,  $\Rightarrow y_4 = 0$ .
- la variable  $x_2 > 0 \Rightarrow -y_1 + y_2 + y_4 = 2$ , (deuxième contrainte du dual saturée),  $y_2 = 2$ .

## Exemple 2

- Cherchons à présent la solution dual correspondante en utilisant le Théorème des écarts complémentaires.

On a

- la première contrainte  $x_1 - x_2 + x_3 \leq 4$  n'est pas saturée (n'atteint pas sa borne) pour la solution  $X$ ,  $\Rightarrow y_1 = 0$ .
- la deuxième contrainte  $2x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 6$  est saturée (atteint sa borne) pour la solution  $X$ , on ne peut rien dire.
- la troisième contrainte  $-x_1 + 2x_3 \leq 3$  n'est pas saturée (n'atteint pas sa borne) pour la solution  $X$ ,  $\Rightarrow y_3 = 0$ .
- la quatrième contrainte  $x_1 + x_2 + x_3 \leq 8$  n'est pas saturée (n'atteint pas sa borne) pour la solution  $X$ ,  $\Rightarrow y_4 = 0$ .
- la variable  $x_2 > 0 \Rightarrow -y_1 + y_2 + y_4 = 2$ , (deuxième contrainte du dual saturée),  $y_2 = 2$ .

la solution du dual est  $Y = (0, 2, 0, 0)$ , est réalisable.

## Exemple 2

- Vérifions à présent que cette solution est optimale.

## Exemple 2

- Vérifions à présent que cette solution est optimale.

Pour ce faire, on doit calculer la valeur des fonctions objectifs de la paire Primal-dual pour les solutions  $X$  et  $Y$ .

## Exemple 2

- Vérifions à présent que cette solution est optimale.

Pour ce faire, on doit calculer la valeur des fonctions objectifs de la paire Primal-dual pour les solutions  $X$  et  $Y$ .

on a :

$$Z(X) = 12 = W(Y).$$

## Exemple 2

- Vérifions à présent que cette solution est optimale.

Pour ce faire, on doit calculer la valeur des fonctions objectifs de la paire Primal-dual pour les solutions  $X$  et  $Y$ .

on a :

$$Z(X) = 12 = W(Y).$$

D'après le corollaire 5,  $X, Y$  sont des solutions optimales du Primal respectivement du dual.