Turbulence

A. Azzi, FGMGP/USTHB, MDFA, ME 1

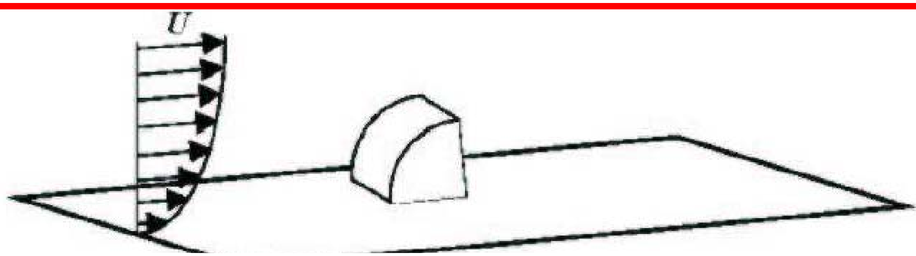
- **La turbulence** est l’état d’un fluide dont l’écoulement est irrégulier tel qu’en tout point de l’espace la vitesse varie aléatoirement

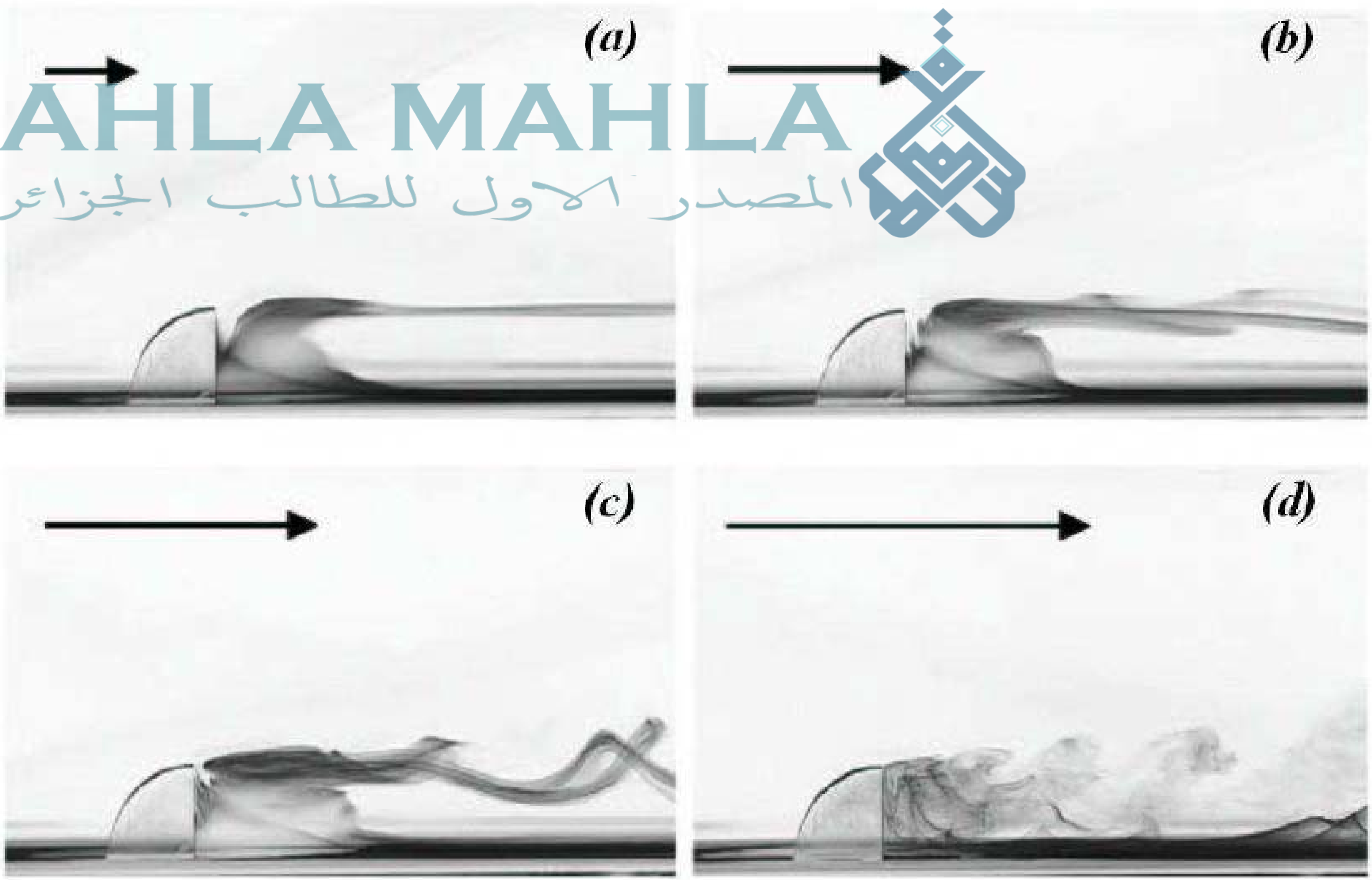
Sillage turbulent produit par une voiture.

- Les mouvements des fluides sont en fait complexes, désordonnés, bref... turbulents. Il est en fait très rare d’observer un écoulement complètement régulier

- Les écoulement sont turbulents et imprévisibles par nature.

Dans une expérience de laboratoire
bien contrôlée





Changement de la structure de l’écoulement en fonction de *U*, a) sillage stationnaire, b) et c) sillage instationnaire périodique, d) turbulent

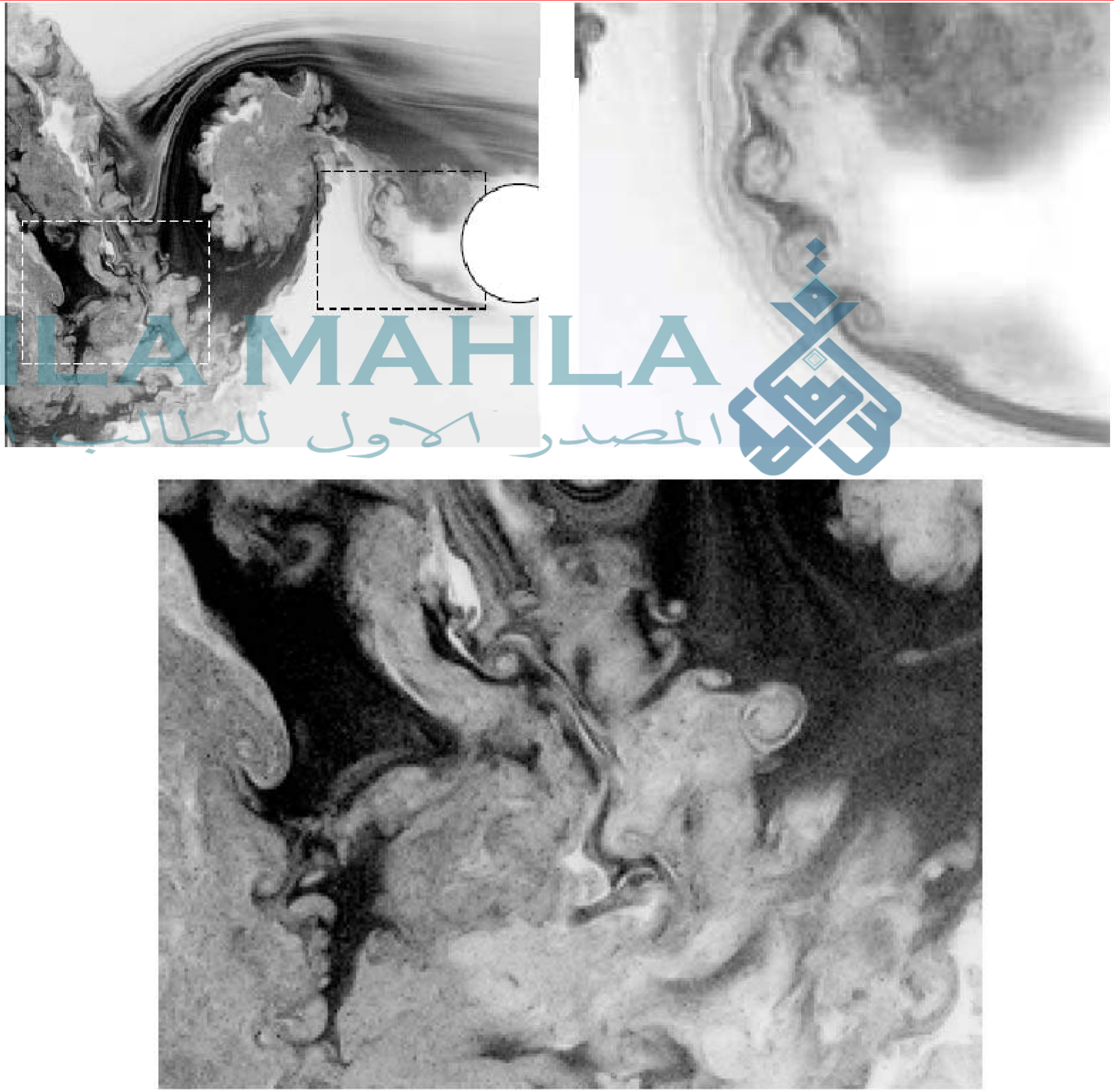
- on observe que l’écoulement autour d’un obstacle subissant un forçage stationnaire (profil des vitesses amont indépendant du temps) transitera irrémédiablement vers un écoulement désordonné dépendant du temps, au-dessus d’une certaine valeur de la vitesse U

- La réponse instationnaire à une excitation stationnaire témoigne du caractère non-linéaire de la dynamique des fluides.

- Actuellement, la turbulence est au cœur des problèmes fondamentaux de la physique classique.

- Elle est essentiellement caractérisée par l’existence de mouvements de toutes tailles, à l’inverse à de l’écoulement laminaire qui a lieu à une échelle précise

- Ces mouvements correspondent entre autres à des tourbillons de tailles différentes dont les plus petits sont transportés par les plus grands



Sillage turbulent d’un cylindre

Pour voir la vidéo

https://www.youtube.com/watch?v=P43hIF1uoVk

1. Pourquoi et comment un écoulement devient-il turbulent ?
2. Quelles sont les propriétés des échelles de la turbulence ?
3. Pourquoi modéliser la turbulence et comment calculer un écoulement moyen ?
4. Quelle est la dynamique responsable de la production des petites échelles et le lien avec la dissipation d’énergie ?

Nombre de Reynolds

Dynamique des fluides, Equation de Navier Stokes pour un fluide incompressible

$$\vec{\nabla}.\vec{v} = 0, \quad (1)$$

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho(\vec{v}.\vec{\nabla})\vec{v} = -\vec{\nabla} p + \rho \vec{f}_{ext} + \mu \Delta \vec{v}. \quad (2)$$

en divisant par ρ, elle devient:

$$\boxed{\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}.\vec{\nabla})\vec{v} = -\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}(p - p_0) + \nu \Delta \vec{v}.} \quad (3)$$

Terme non linéaire représentant le transport convectif de la vitesse; il est non linéaire car c'est une forme quadratique de la vitesse

Terme linéaire représentant le transport de quantité de mouvement (par unité de masse) par diffusion moléculaire

Types de transports de quantité de mouvement

1- Transport diffusif

La structure de l’équation de transport par diffusion s’écrit pour une grandeur physique quelconque *X* comme:

$$\frac{\partial X}{\partial t} = D\Delta X \qquad (4)$$

D est le coefficient de diffusion de la quantité *X* transportée. Il ne dépend que du fluide; on a $[D] = L^2T^{-1}$. On tire un temps caractéristique correspondant à la durée nécessaire pour diffuser sur une distance δ :

$$\tau_D = \frac{\delta^2}{D} \qquad (5)$$

Considérons le terme non linéaire de l’équation (3) égale à 0, exemple écoulement parallèle, $\vec{v} = u(y)\vec{e}_x$ et sans gradient de pression selon $\vec{e}_x$ on aura:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \nu\Delta\vec{v}. \qquad (6)$$

Equation de diffusion comme (4). La grandeur vectorielle qui est transportée par diffusion moléculaire est la quantité de mouvement par unité de masse (i.e. la vitesse). Le coefficient de diffusion *D* est la viscosité cinématique ν. Puisque l’équation est linéaire, l’écoulement restera parallèle tout au long de sa dynamique. Le temps caractéristique pour transporter la quantité de mouvement sur une longueur δ est :

$$\boxed{\tau_\nu = \frac{\delta^2}{\nu}.}$$ (7) . Ce dernier ne dépend pas de la vitesse qui est transportée

2- Transport Convectif

Dans le cas du transport convectif, c'est la vitesse elle même qui transporte la quantité de mouvement. Considérons l'équation de la dynamique sans le terme diffusif. Dans ce cas l'équation est non-linéaire (équation d'Euler) :

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}.\vec{\nabla})\vec{v} = -\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}(p - p_0) \qquad (8)$$

on observe une évolution très différente : l'écoulement ne reste pas parallèle, et on assiste à la formation d'un tourbillon. Le temps caractéristique pour transporter la vitesse sur une longueur δ est :

$$\boxed{\tau_C = \frac{\delta}{U}.} \qquad (9)$$

Forme adimensionnelle de l'équation de Navier-Stokes

Ecrivons l'équation de Navier-Stokes à l'aide de combinaisons sans dimensions (qui seront notées par des primes) des différentes grandeurs qui y interviennent. Soient *L* et *U* les échelles respectives de taille et de vitesse de l'écoulement, on a :

$$\vec{r} = L\vec{r}\,' \;\; ; \;\; \vec{v} = U\vec{v}\,' \;\; ; \;\; p - p_0 = (\rho U^2)p' \;\; ; \;\; t = \frac{L}{U}t'. \qquad (10)$$

N-S devient:

$$\frac{\partial \vec{v}\,'}{\partial t'} + (\vec{v}\,'.\vec{\nabla}\,')\vec{v}\,' = -\vec{\nabla}\,'p' + \frac{1}{Re}\Delta\,'\vec{v}\,', \qquad (11)$$

$$Re = \frac{UL}{\nu} \qquad (12)$$

On reconnait le nombre sans dimension, *Re* qui est une combinaison de *L, U* et ν : le nombre de Reynolds. Il pondère le terme de diffusion visqueuse par rapport aux autres termes de l'équation. Le nombre de Reynolds se lit comme le rapport de deux temps :

$$\boxed{Re = \frac{UL}{\nu} = \frac{\frac{L^2}{\nu}}{\frac{L}{U}} = \frac{\tau_\nu}{\tau_C}} \quad (13) \qquad Re = \frac{\textit{effet convectif}}{\textit{effet diffusif}}. \quad (14)$$

$$Re = \frac{\rho[(\vec{v}.\vec{\nabla})\vec{v}]}{\eta[\Delta\vec{v}]} = \frac{\textit{forces inertielles}}{\textit{forces visqueuses}} \quad (15)$$

La nature des solutions de l'équation de **N-S** va dépendre crucialement de la valeur du nombre de Reynolds :

-Si Re << 1 , l'équation est linéaire et les effets diffusifs sont dominants
-Si Re >> 1, l'équation est non linéaire et les effets convectifs sont dominants. Les non linéarités produiront : des ***effets instationnaires*** pour un forçage stationnaire, des brisures de symétries par rapport aux conditions aux limites initiales, bref... **la turbulence**.

Le nombre de Reynolds est défini arbitrairement en prenant certaines échelles d'un écoulement, ainsi la transition entre **transport diffusif dominant et transport convectif dominant** s'opère autour d'un nombre de Reynolds relatif aux échelles choisies : il n'y a donc pas de raison pour que le Reynolds de transition soit Re = 1

Le développement de la turbulence en fonction du nombre de Reynolds qui augmente.

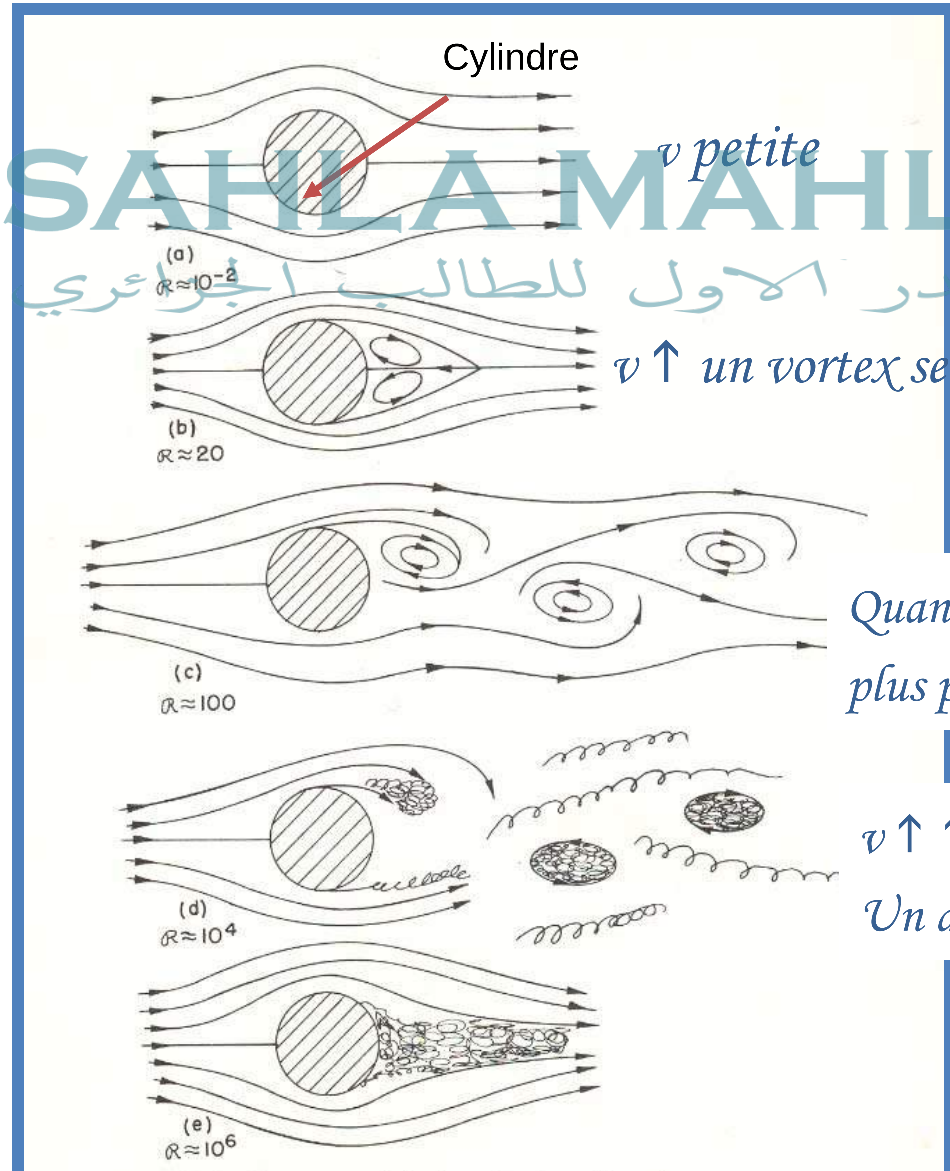
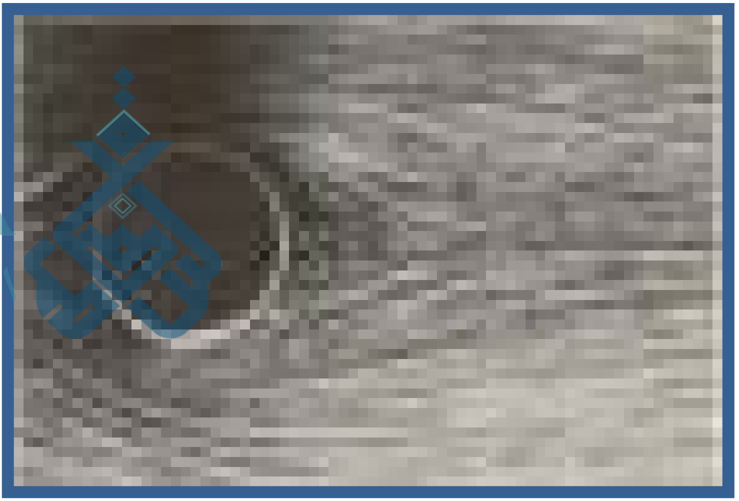


Fig. 41–6. Flow past a cylinder for various Reynolds numbers.



v petite

v ↑ un vortex se forme

Quand v ↑ plus les vortex deviennent de plus en plus petits et turbulent

v ↑ ↑ , un vortex se détache , est emporté par le flot. Un autre se forme

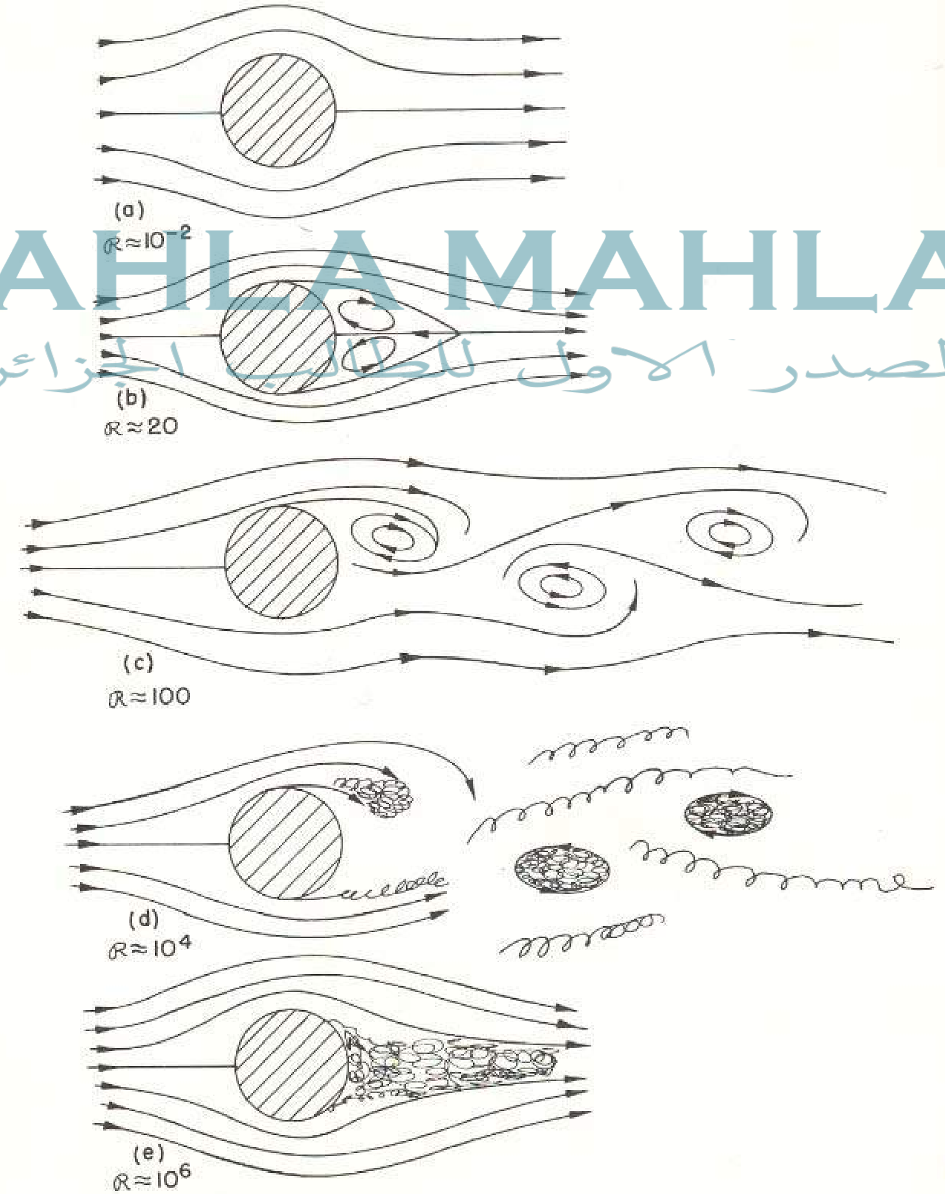
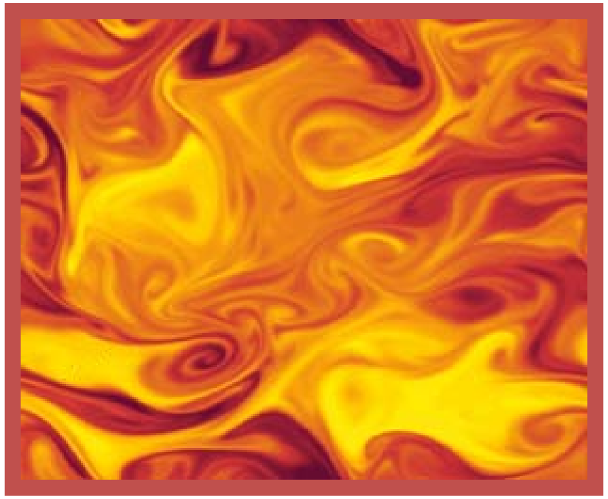


Fig. 41–6. Flow past a cylinder for various Reynolds numbers.

Nous savons que $v=0$ à la surface du cylindre et doit augmenter rapidement ; cette grande variation de vitesse engendre les vortex.



Origines de la turbulence

L'origine du désordre de l'écoulement turbulent repose sur le terme non linéaire de l'équation de Navier-Stokes qui est le terme inertiel de transport par convection. Plus *Re* est grand et plus ce terme a un poids dans la dynamique et plus les écoulements sont complexes.

Les causes ou origines de la turbulence sont:

1) Les instabilités

- Instabilités de cisaillement
- Instabilité centrifuge
- Instabilité de tourbillon

2) Le phénomène de décollement de couche limite

Transition vers la turbulence (cas de la transition à caractère sous-critique)

- Transition brutale et imprévisible

- Caractère sous-critique

- Brusquement laminaire à turbulent par intermittence

- La turbulence ne se déclare pas dans tout l’écoulement, mais dans des zones appelées Spots Turbulents

- Plus *Re* augmente et plus la taille des zones turbulents croît jusqu’à ce que la turbulence envahisse l’écoulement tout entier

- Dans ces spots on voit la formation de petites structures de vorticité

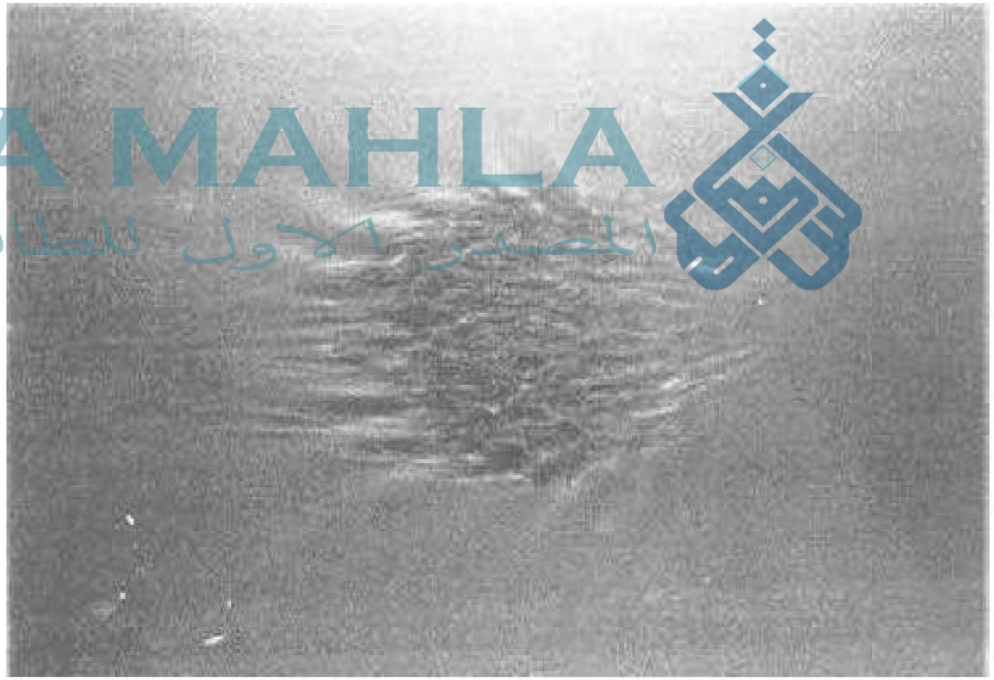


Fig. 3.11 – Spot observé dans un écoulement de Couette plan, autour du spot l'écoulement est parfaitement laminaire.

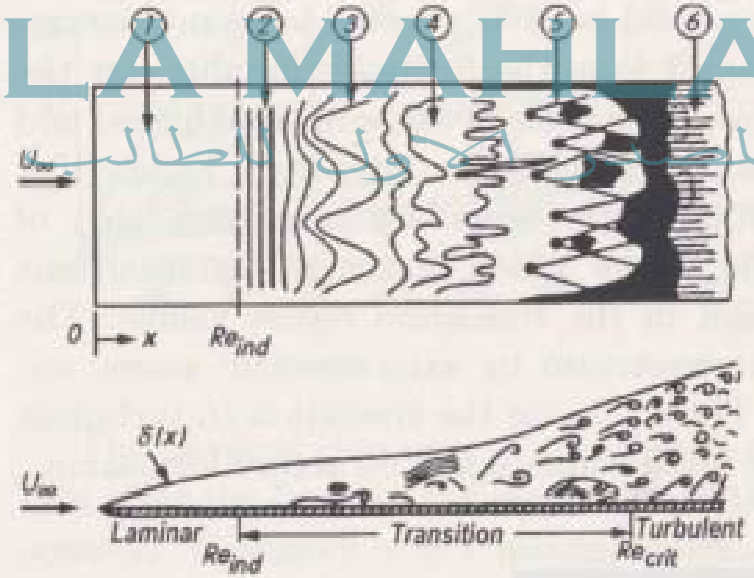


Fig. 15.5. Sketch of laminar–turbulent transition in the boundary layer on a flat plate at zero incidence, after F.M. White (1974)
(*1*) stable laminar flow
(*2*) unstable Tollmien–Schlichting waves
(*3*) three-dimensional waves and vortex formation (Λ-structures)
(*4*) vortex decay
(*5*) formation of turbulent spots
(*6*) fully turbulent flow

FIG. 3.13 – Scénario de transition dans la couche limite de laminaire à gauche à turbulent à droite.

Propriétés de la turbulence

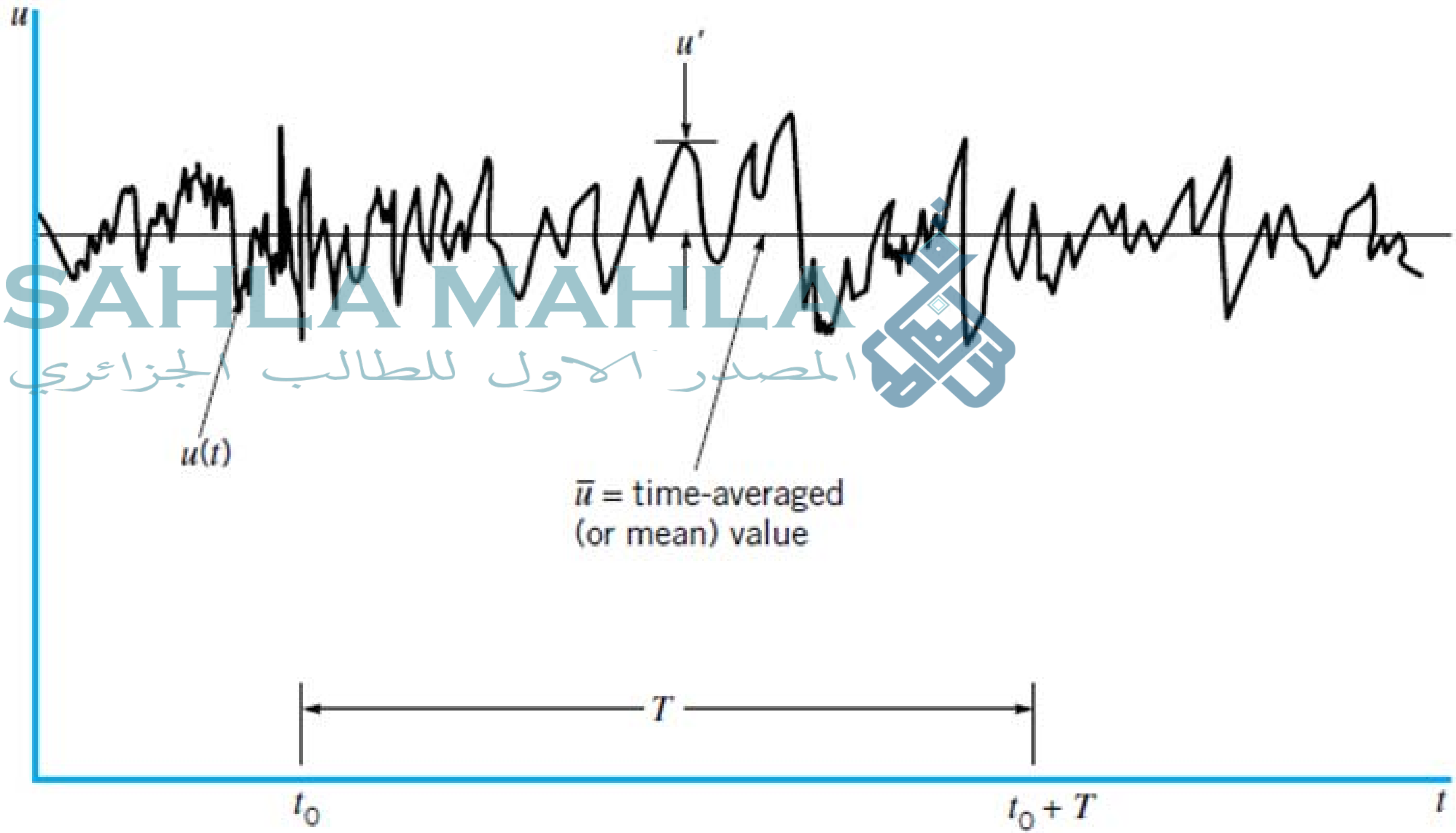
On s’intéressera aux propriétés statistiques de la turbulence.
Les zones très turbulentes présentent une grande gamme d’échelles spatiales.

Les questions que nous allons nous poser sont les suivantes :

- Comment une gamme d’échelles spatiales est-elle produite ?

- Qu’est ce qui détermine la largeur de cette gamme ?

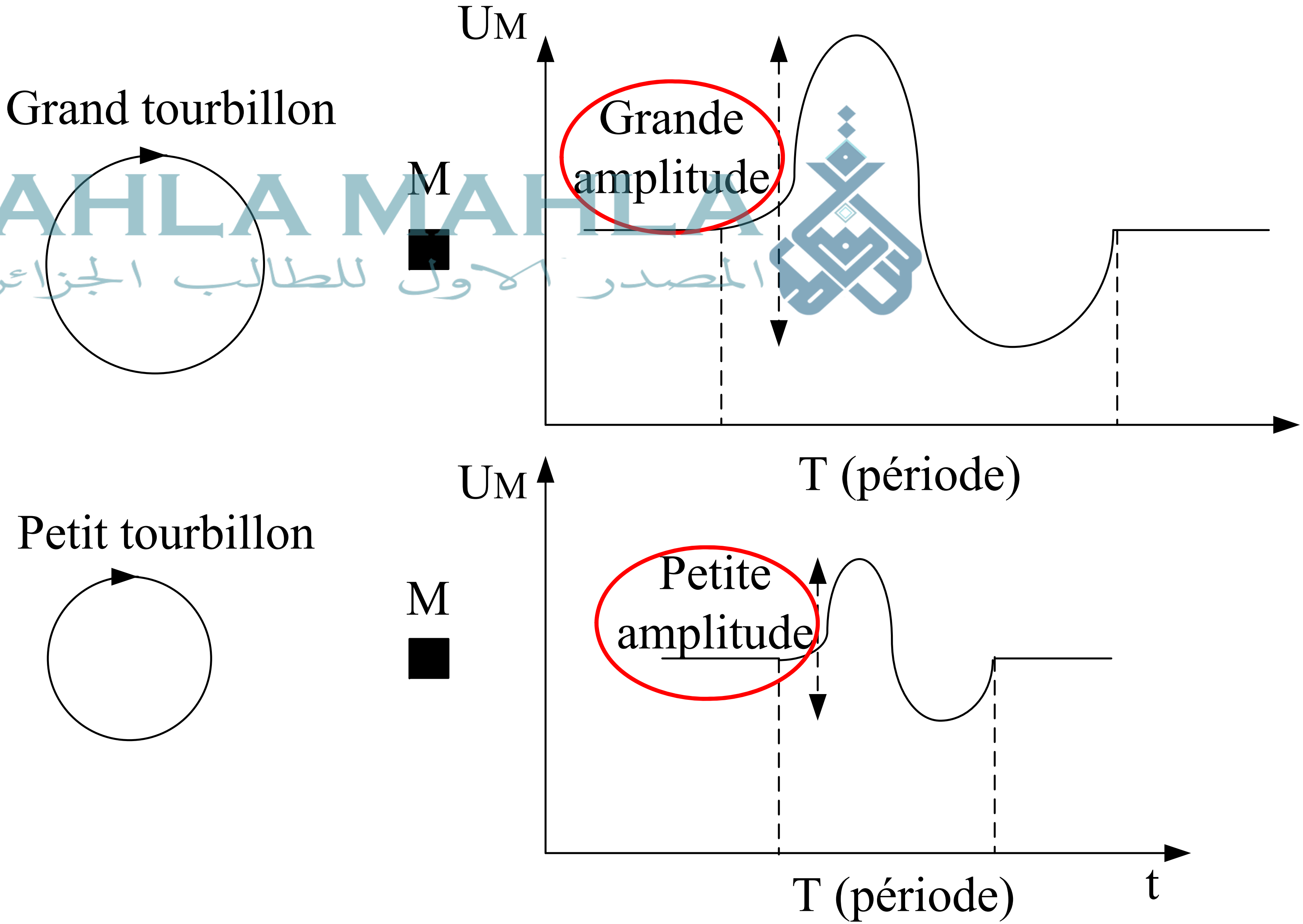
- Quel est le rôle des petites échelles spatiales dans la physique de la turbulence ?



$\overline{u}$, : **Moyenne temporelle de la vitesse**

u' : **fluctuation de la vitesse**

Grande Période = Basse fréquence



Petite Période = Haute fréquence

La variance du signal u(t) est proportionnelle à l’énergie cinétique du mouvement turbulent. Elle caractérise l’intensité de la turbulence au point considéré.

Le signal u(t) représente les différentes échelles de temps correspondant aux différentes tailles de tourbillons présents dans l’écoulement

La description de Kolmogorov

Kolmogorov a décrit la ***turbulence incompressible*** en terme de la formation d'une cascade de tourbillons: un gros tourbillon se forme qui lui est, par la suite, divisé en d'autres tourbillons de plus en plus petits et nombreux.

Du point de vue de l'énergie, il s'agit donc d'une cascade vers des tailles de plus en plus petites. Dans ce formalisme, les grandes échelles sont dites énergétiques car l'injection d'énergie à l'origine de la turbulence se fait à ces échelles. Il n'y a pas de dissipation d'énergie à grande échelle. Les petites échelles, quant à elles, sont dites dissipatives car l'énergie, à ces échelles, se transforme en chaleur. À ces échelles, le terme de diffusion devient comparable au terme d'advection (Re~1).

Kolmogorov a postulé que les **propriétés statistiques** de l'écoulement sont **indépendantes de l'échelle**, c'est ce que l'on appelle **l'invariance d'échelle**.

Le taux de transfert d'énergie d'une échelle à l'autre, ε, est invariant de l'échelle. Pour les échelles non-dissipatives, ce taux est approximativement donné par :

$$\boxed{\varepsilon \sim \mathrm{v}_l^{\,2} / \tau_l}$$

où v_l^2 est l'énergie cinétique par unité de masse à l'échelle l et

τ_l est le temps de transfert d'énergie à l'échelle l.

τ_l est essentiellement le temps de vie d'une fluctuation de vitesse et est donné environ par $\tau_l \sim l\,/\,v_l$, on peut exprimer ce terme comme :

$$\boxed{\varepsilon \sim \frac{\mathrm{v}_l^{\,2}}{l/\mathrm{v}_l} \sim \frac{\mathrm{v}_l^{\,3}}{l}} \quad ,$$

et donc la vitesse à l'échelle l est reliée directement à la taille :

$$\boxed{\mathrm{v}_l \sim (\varepsilon l)^{1/3}} \quad (*)$$

Donc, l'énergie dissipée aux dernières échelles (l_d), ε_d, est : $\varepsilon_d = \varepsilon = v_{ld}^3 / l_d$.
Or, à l_d, Le nombre de Reynolds, *Re* est approximativement égal à un:

$$\boxed{\mathrm{Re} = \frac{l_d v_{ld}}{\nu} \cong 1 \rightarrow v_{ld} \cong \frac{\nu}{l_d}}$$

,

ce qui permet d'écrire:

$$\frac{\nu}{l_d} \sim \left(\varepsilon\, l_d\right)^{1/3}$$

,

et donc $\boxed{l_d = \left(\frac{\nu^3}{\varepsilon}\right)^{1/4}}$. La dissipation visqueuse transforme l'énergie en chaleur.

On peut aussi définir le *spectre de puissance de l'énergie cinétique*, E. Introduisons aussi le nombre d'onde : $k=2\pi/l$. On a que :

$$\langle v_l^2 \rangle = \int_{2\pi/l}^{\infty} E(k')dk'$$

E(k') est l'énergie cinétique moyenne par unité de masse entre les nombre d'onde k, et k'+dk'

où l'intégrale se fait de l'échelle *l* jusqu'aux plus petites tailles.

En utilisant l'équation (*) ($v_l \sim (\varepsilon l)^{1/3}$) ceci s'exprime comme,

$$\int_{2\pi/l}^{\infty} E(k')dk' = (\varepsilon l)^{2/3} \approx \left(\varepsilon/k\right)^{2/3}$$

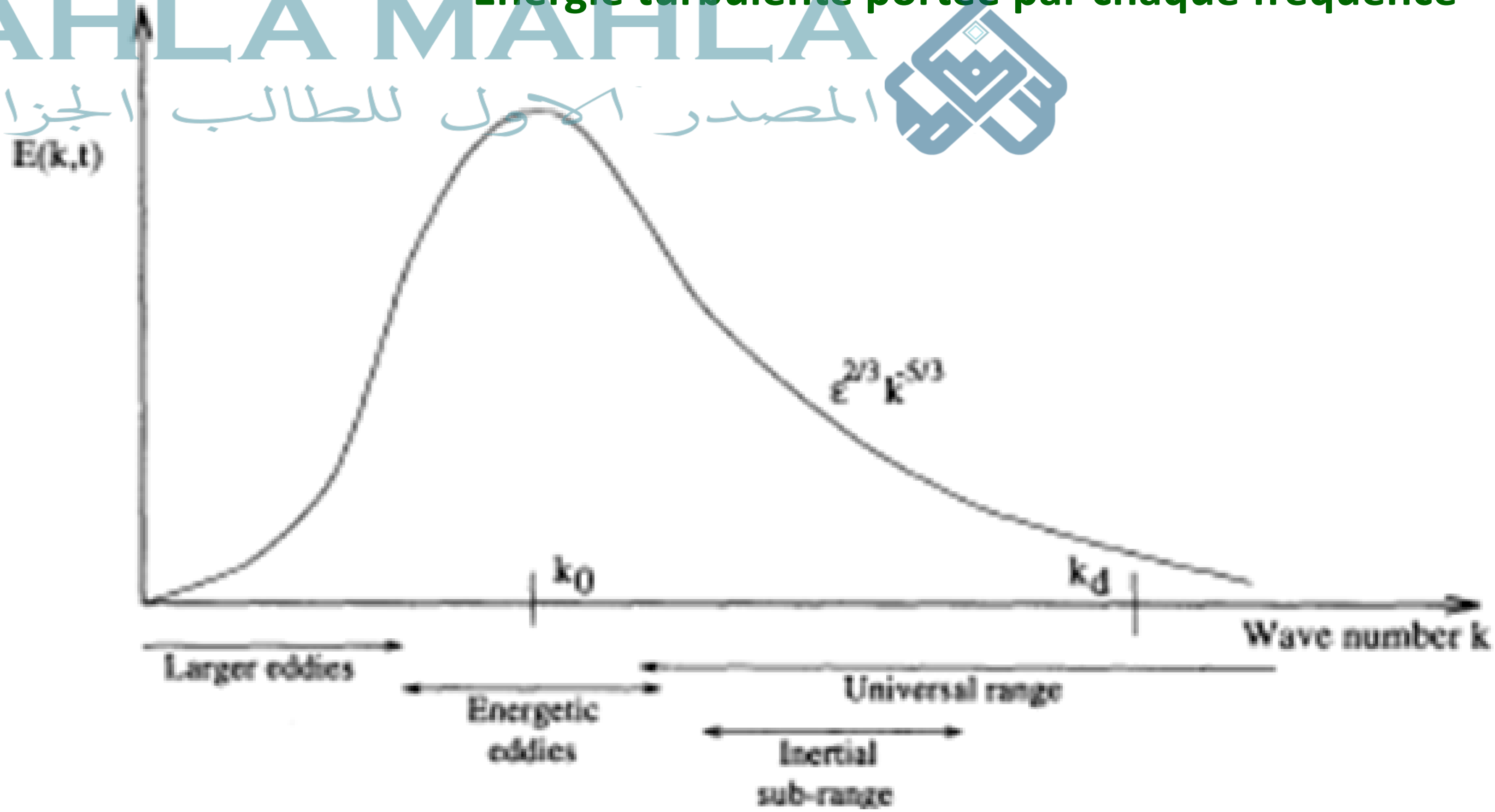
En différentiant, comme ε est constant, on trouve:

$$E(k) \approx \frac{\varepsilon^{2/3}}{k^{5/3}}$$

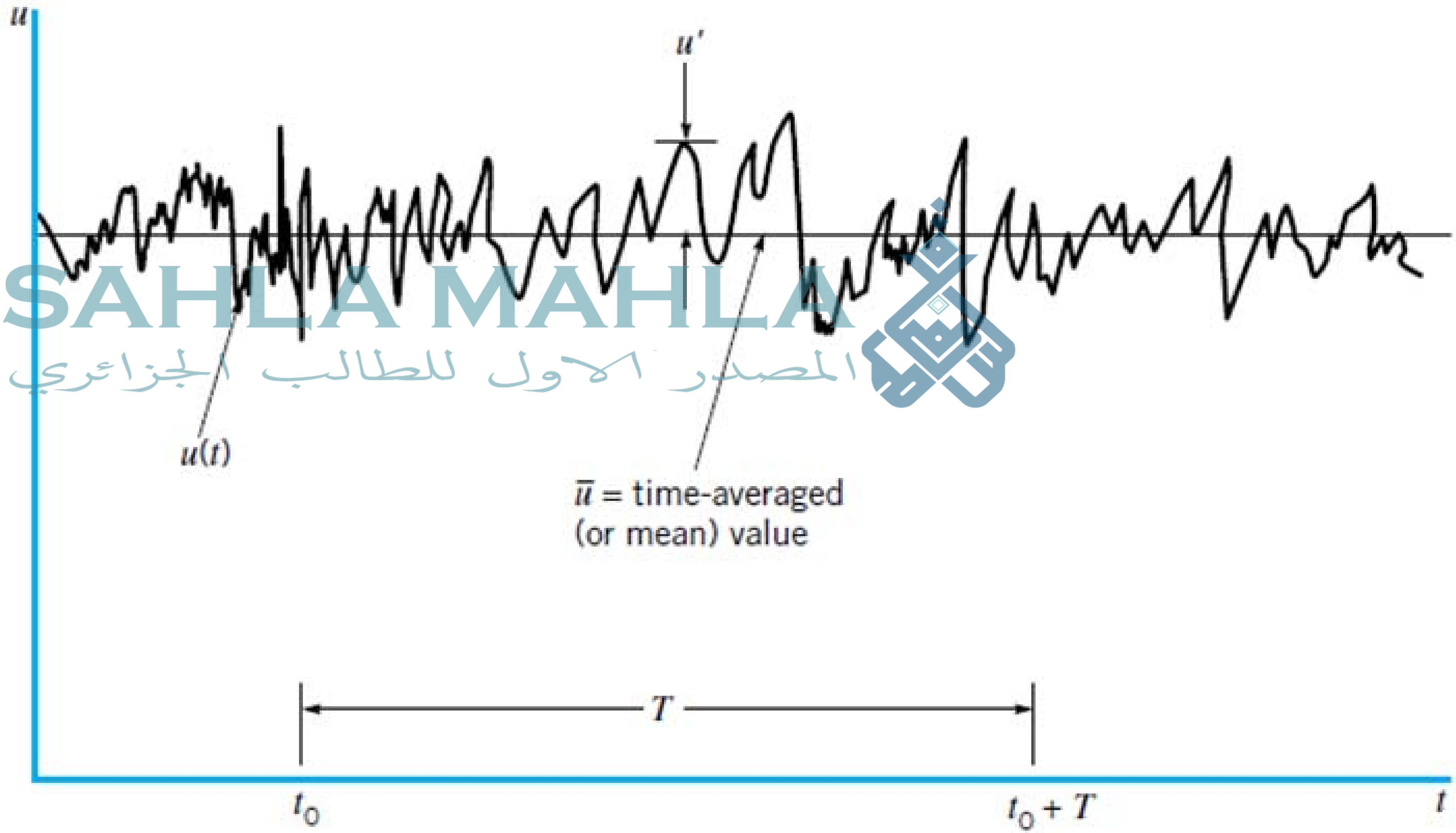
$$\boxed{E(k) \approx \frac{\varepsilon^{2/3}}{k^{5/3}}}$$

C'est la *Loi de Kolmogorov*

Energie turbulente portée par chaque fréquence



Cette expression nous informe que l'énergie cinétique est principalement contenue dans les *grandes* échelles.

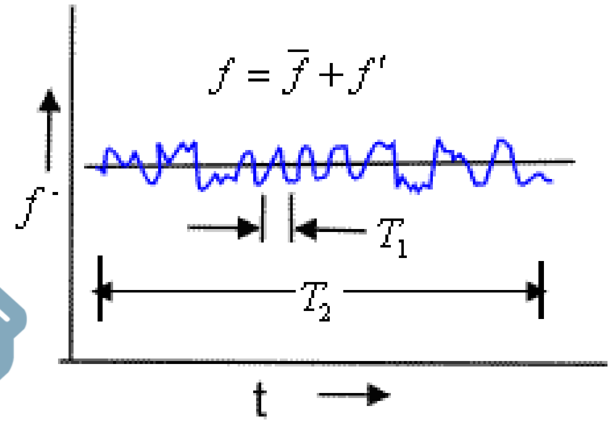


$\bar{u}$, : **Moyenne temporelle de la vitesse**

u' : **fluctuation de la vitesse**

Proprietés générales d’une quantité turbulente

- Pour une quantité turbulente *f* on a:



$$f = \overline{f} + f'$$

$$\overline{f} = \lim_{T \to \infty} \frac{\int_0^T f\,dt}{T} = \lim_{T \to \infty} \frac{\int_0^T (\overline{f} + f')\,dt}{T} = \overline{f} + \overline{f'}$$

$$T_1 \ll T \ll T_2$$

$$\Rightarrow \overline{f'} = 0$$

- Pour deux quantités turbulentes *f* et *g on a*:

$$\overline{f'} = 0 \qquad \overline{\overline{f}} = \overline{f} \qquad \overline{f\overline{g}} = \overline{f}\ \overline{g} \qquad \overline{\overline{f}g'} = 0 \qquad \overline{f'g'} \neq 0$$

$$\overline{f + g} = \overline{f} + \overline{g} \qquad \overline{fg} = \overline{f}\,\overline{g} + \overline{f'g'}$$

$$\overline{\frac{\partial f}{\partial x_i}} = \frac{\partial \overline{f}}{\partial x_i} \qquad \overline{\int f dx} = \int \overline{f} dx$$

La moyenne de Reynolds

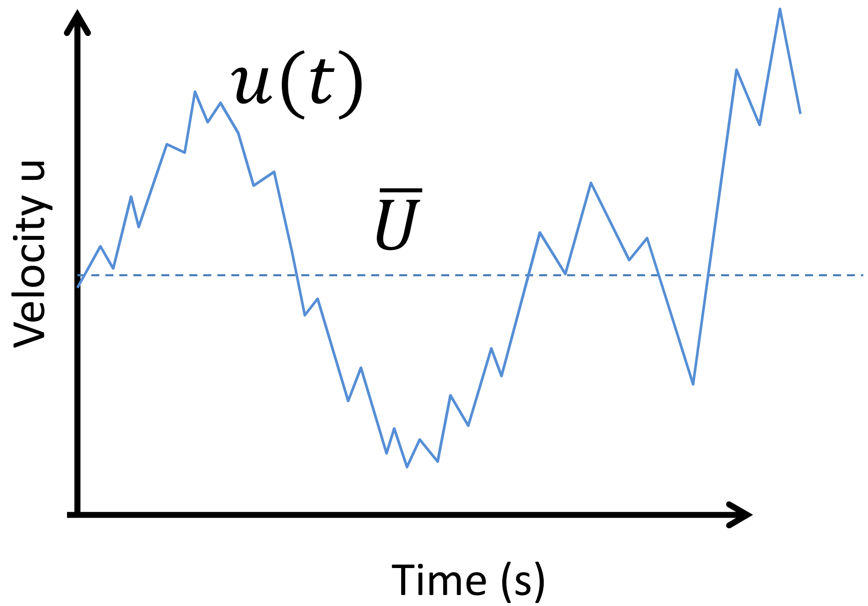
- En écoulement turbulent et à grande echelle, la direction de l'écoulement est définie. Par exemple un jet d'air a une direction générale de l'écoulement. Les tourbillons "eddies" se comportent comme des sous-écoulements tout en rajoutant le caractère aléatoire à l'écoulement générale.

- Ceci signifie qu'il existe une vitesse moyenne "mean velocity" autour de laquelle la vitesse locale fluctue.

- Soit la vitesse moyenne: $\overline{U}$

- La fluctuation instantanée peut être prise comme: $u'(t)$

- Ainsi: $u = \overline{U} + u'(t)$



- La moyenne dans le temps de la vitesse est définie comme:

$$\frac{\int_{t_0}^{t_0+T} \boldsymbol{u} dt}{\int_{t_0}^{t_0+T} dt} = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} \boldsymbol{u} dt = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} (\overline{\boldsymbol{U}} + \boldsymbol{u}')dt$$

$$\frac{1}{T}\overline{\boldsymbol{U}} = \frac{1}{T}\overline{\boldsymbol{U}} + \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} \boldsymbol{u}' dt$$

$$\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} \boldsymbol{u}' dt = \overline{\boldsymbol{u}'} = 0$$

- Ceci est connu comme la moyenne de Reynolds
- Donc moyenner peut simplifier le treatment de l'écoulement turbulent

- Si on considère les 3 composantes de vitesse,

$$\overline{\boldsymbol{u}'} = \overline{\boldsymbol{v}'} = \overline{\boldsymbol{w}'} = \boldsymbol{0}$$

Equation de continuité

- Appliquons la moyenne de Reynolds à l'équation de continuité (supposons un fluide incompressible)

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)+\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)=0$$

$$\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T}\frac{\partial}{\partial x}(\bar{U}+u')dt+\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T}\frac{\partial}{\partial y}(\bar{V}+v')dt+\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T}\frac{\partial}{\partial z}(\bar{W}+w')dt=0$$

$$\overline{\frac{\partial}{\partial x}(\bar{U}+u')}+\overline{\frac{\partial}{\partial y}(\bar{V}+v')}+\overline{\frac{\partial}{\partial z}(\bar{W}+w')}=0$$

$$\frac{\overline{\partial \bar{U}}}{\partial x}+\frac{\overline{\partial u'}}{\partial x}+\frac{\overline{\partial \bar{V}}}{\partial y}+\frac{\overline{\partial v'}}{\partial y}+\frac{\overline{\partial \bar{W}}}{\partial z}+\frac{\overline{\partial w'}}{\partial z}=0$$

- Comme la procedure de moyenne est effectuée sur un temps assez long, la differentiation spaciale et la moyenne temporelle peuvent être changées. ceci donne:

$$\frac{\partial \overline{U}}{\partial x}+\frac{\partial \overline{u'}}{\partial x}+\frac{\partial \overline{V}}{\partial y}+\frac{\partial \overline{v'}}{\partial y}+\frac{\partial \overline{W}}{\partial z}+\frac{\partial \overline{w'}}{\partial z}=0$$

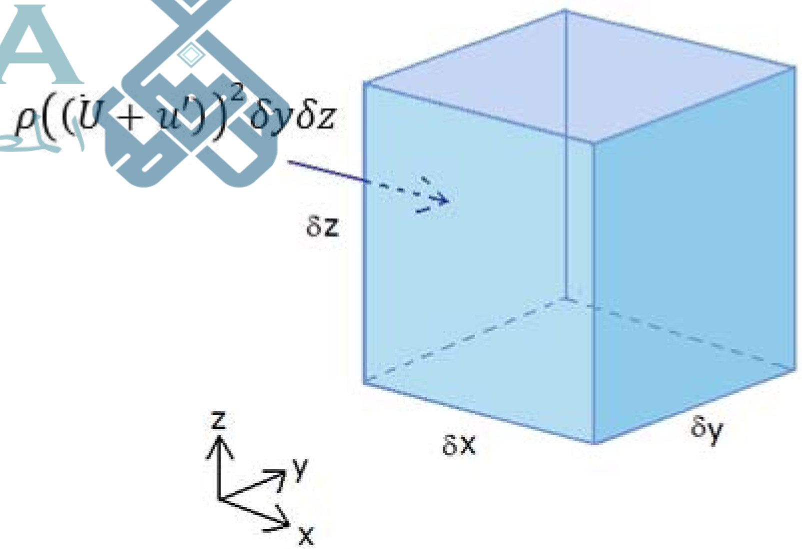
$$\boldsymbol{\frac{\partial \overline{U}}{\partial x}+\frac{\partial \overline{V}}{\partial y}+\frac{\partial \overline{W}}{\partial z}=0}$$

- **En écoulement turbulent, seulement le champ de la vitesse moyenne qui doit satisfaire la condition de continuité.**

Transfert de quantité de mouvement en écoulement turbulent

- Considérons un élément fluide de volume δxδyδz comme le montre la figure

Soit la quantité de mouvement transportée dans la direction x, M_{xx}



$$M_{xx} = Débit\ massique\ .vitesse$$

$$= (\rho u \delta y \delta z)u$$

$$= \rho u^2 \delta y \delta z$$

- Le transport de quantité de mouvement à travers une surface unitaire, ou le flux moyen de quantité de mouvement peut être écrit comme:

$$\bar{M}_{xx} = \rho\left(\bar{U}^2 + \overline{(u')^2}\right)$$

- Il ya une composante de la quantité de mouvement dans la direction *x* associé au même flux de quantité de mouvement due à la vitesse *v* dans la direction y. Soit la quantité de mouvement dans la direction x sur la surface perpendiculaire à l'axe y, M_{xy}

$$M_{xy} = (\rho v \delta x \delta z)u$$

$$= \rho \delta x \delta z v u$$
$$= \rho \delta x \delta z(\bar{V} + v')(\bar{U} + u')$$
$$= \rho \delta x \delta z(\bar{V}\,\bar{U} + \bar{V}u' + \bar{U}v' + v'u')$$

- Le flux de quantité de mouvement selon x sur la surface perpendiculaire à l'axe y est:

$$\overline{M_{yx}} = \rho\left(\bar{U}\,\bar{V} + \overline{u'v'}\right)$$

- De même, le flux de quantité de mouvement selon x sur la surface perpendiculaire à z peut s'écrire comme:

$$\overline{M_{zx}} = \rho\left(\bar{U}\,\bar{W} + \overline{u'w'}\right)$$

- On considère le terme $\overline{U}^2$

- Même si en réalité le flux de quantité de mouvement agit comme contrainte normale à l'axe x, il peut être considére comme une contrainte normale apparente due au gradient de la vitesse moyenne.

- Les termes *u'u', u'v',* et *u'w'* donnent les contraintes de cisaillement sur les surfaces normales auxs axes y et z, ces contraintes apparentes dues aux fluctuations de vitese sont appelées **Contraintes de Reynolds**

- Similaire au tenseur de contraintes de cisaillement, il ya le tenseur de contraintes de Reynolds

$$\tau^{RS} = -\rho \begin{bmatrix} \overline{u'u'} & \overline{u'v'} & \overline{u'w'} \\ \overline{v'u'} & \overline{v'v'} & \overline{v'w'} \\ \overline{w'u'} & \overline{w'v'} & \overline{w'w'} \end{bmatrix}$$

Moyenne de Reynolds appliquée à l'équation de Navier Stokes = Reynolds Average Navier Stokes equation (RANS)

Equation de continuité: $\dfrac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0$

Remplaçons $\underline{u_j = \overline{u}_j + u'_j}$ et prenons la moyenn de l'équation

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\overline{u}_j + u'_j\right) = 0$$

$$\frac{\partial \overline{u}_j}{\partial x_j} + \frac{\overline{\partial u'_j}}{\partial x_j} = \frac{\partial \overline{u}_j}{\partial x_j} + \frac{\partial\, \cancel{\overline{u'}_j}^{\,0}}{\partial x_j} = 0$$

$$\underbrace{\frac{\partial \overline{u}_j}{\partial x_j} = 0}_{\text{Equation de continuité pour l'écoulement principal}} \qquad (1)$$

$$\underbrace{\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} = 0}_{\text{Equation de continuité pour le champ fluctuant turbulent}}$$

Equation de conservation de quantité de mouvement selon la direction *i*

$$\rho\left[\frac{\partial u_i}{\partial t}+u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right]=-\frac{\partial p}{\partial x_i}+\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\mu\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)$$

$$\Rightarrow\rho\left[\frac{\partial u_i}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_j}\left(u_iu_j\right)\right]=-\frac{\partial p}{\partial x_i}+\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\mu\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)$$

Changeons $u_i=\overline{u}_i+u_i'$, $u_j=\overline{u}_j+u_j'$, and $p=\overline{p}+p'$

$$\rho\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\overline{u}_i+u_i'\right)+\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\left(\overline{u}_i+u_i'\right)\left(\overline{u}_j+u_j'\right)\right]\right]=-\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\overline{p}+p'\right)+\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\mu\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\overline{u}_i+u_i'\right)\right)$$

Prenons la moyenne de l’équation toute entière

$$\rho\left[\overline{\frac{\partial}{\partial t}\left(\overline{u}_i+u_i'\right)}+\overline{\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\left(\overline{u}_i+u_i'\right)\left(\overline{u}_j+u_j'\right)\right]}\right]=-\overline{\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\overline{p}+p'\right)}+\overline{\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\mu\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\overline{u}_i+u_i'\right)\right)}$$

$$\rho\left[\frac{\partial}{\partial t}\overline{\left(\overline{u}_i+u_i'\right)}+\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\overline{\left(\overline{u}_i+u_i'\right)\left(\overline{u}_j+u_j'\right)}\right]\right]=-\frac{\partial}{\partial x_i}\overline{\left(\overline{p}+p'\right)}+\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\mu\frac{\partial}{\partial x_j}\overline{\left(\overline{u}_i+u_i'\right)}\right)$$

$$\rho\left[\frac{\partial\overline{u}_i}{\partial t}+\cancel{\frac{\partial\overline{u_i'}}{\partial t}}^{0}+\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\overline{u}_i\overline{u}_j+\overline{u_i'u_j'}+\cancel{\overline{\overline{u}_iu_j'}}^{0}+\cancel{\overline{u_i'\overline{u}_j}}^{0}\right]\right]=-\frac{\partial\overline{p}}{\partial x_i}-\cancel{\frac{\partial\overline{p'}}{\partial x_i}}^{0}+\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\mu\frac{\partial\overline{u}_i}{\partial x_j}\right)+\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\mu\cancel{\frac{\partial\overline{u_i'}}{\partial x_j}}^{0}\right)$$

$$\rho\left[\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\overline{u}_i\overline{u}_j+\overline{u_i'u_j'}\right]\right]=-\frac{\partial \overline{p}}{\partial x_i}+\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\mu\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_j}\right)$$

$$\Rightarrow \rho\left[\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\overline{u}_i\overline{u}_j\right)\right]=-\frac{\partial \overline{p}}{\partial x_i}+\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\mu\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_j}\right)-\underbrace{\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\rho\overline{u_i'u_j'}\right)}_{\text{Term A}} \qquad (2)$$

Equations (2) est connue comme **Reynolds average Navier Stokes (RANS) equations.**

The processus de moyenne temporelle a crée un nouveau terme (terme A).

Contraintes de Reynolds ou contraintes turbulentes

$$-\rho\overline{u_i'u_j'}=-\rho\underbrace{\begin{bmatrix}\overline{u_1'^2} & \overline{u_1'u_2'} & \overline{u_1'u_3'}\\ \overline{u_1'u_2'} & \overline{u_2'^2} & \overline{u_2'u_3'}\\ \overline{u_1'u_3'} & \overline{u_2'u_3'} & \overline{u_3'^2}\end{bmatrix}}_{\text{2nd order tensor}}$$

Dans les equations du RANS, il y a six inconnues additionnelles:

$$-\rho\overline{u_1'^2},-\rho\overline{u_2'^2},-\rho\overline{u_3'^2},-\rho\overline{u_1'u_2'},-\rho\overline{u_2'u_3'},-\rho\overline{u_1'u_3'}$$

Problème de ferméture en turbulence:
Necessité de modélisation de la turbulence

Dans les équations du RANS, les termes de contraintes de Reynolds donnent des inconnues additionnelles $-\rho \overline{u_i' u_j'}$, et il n'y a pas d'équations differentielles gouvernantes pour

ces inconnues additionnelles.

- **3** composantes de vitesse, **1** pression et **6** termes de contraintes de Reynolds stress = **10** inconnues

- No. d'équations = **4** (**1** Continuité + **3** quantité de movement)

- Comme No. d'inconnues **>** No. d'équations, le problem est indeterminé. On a besoin de cloturer le problem pour avoir la solution. **Problème de fermeture en turbulence.**

- La modélisation de la turbulence essaye d'exprimer les contraintes de Reynolds en termes de moyennes temporelle des composantes de vitesses.

- Les modèles de turbulence habituels sont classés sur la base du nombre additionnel d'équations de transports necessaires à résoudre simultanement avec les équations du RANS.