

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ  
الْحَمْدُ لِلَّهِ الَّذِي هَدَانَا لِهَذَا وَمَا كُنَّا لِنَشْكُرَهُ لَوْلَا تَعَاوَنُ الرَّسُولِ  
لَفِطْرَتٌ فَاسِقَةٌ لَئِن لَّمْ يَأْتِ الْبَشَرُ إِلَّا بِنُورٍ أَوْ كِتَابٍ

# Notes de cours de gazodynamique

*Par : A. Boukhari*

SAHLA MAHLA

المصدر الأول للطالب الجزائري



**SAHLA MAHLA**

المصدر الأول للطالب الجزائري



# SOMMAIRE

## CHAPITRE I : INTRODUCTION A LA GAZODYNAMIQUE

I-1 Introduction .....	1
I-1.1 Définitions .....	1
I-1.2 Quelques concepts de la thermodynamique .....	3
I-1.3 Relations des gaz parfaits .....	4
I-1.4 Relations isentropiques .....	4
I-2 Thermodynamique et physique du son .....	5
I-2.1 Propagation des ondes sonores .....	5
I-2.2 La vitesse sonore d'après l'équation d'état .....	7
I-2.3 Nombre de Mach .....	8
I-2.4 Ondes de Mach .....	9

## CHAPITRE II : ECOULEMENT COMPRESSIBLE UNIDIMENSIONNEL

II-1 Equations de base d'un écoulement compressible unidimensionnel .....	11
II-2 Etat générateur .....	12
II-3 Propriétés isentropiques et de stagnation d'un écoulement .....	13
II-4 Seuil de compressibilité .....	14
II-5 Ecoulements isentropiques dans les canalisations .....	15
II-6 Conditions critiques .....	16

## CHAPITRE III : ECOULEMENT ISENTROPIQUE AVEC CHANGEMENT DE SECTION

III-1 Ecoulement isentropique avec changement de section .....	17
III-2 Débit massique d'une canalisation de section variable .....	19
III-3 Tuyère convergente .....	21
III-4 Tuyère convergente-divergente .....	23
III-5 Equation du rapport des sections .....	25

## CHAPITRE IV : ONDES DE CHOC NORMALES

IV-1 Ondes de choc normales .....	26
IV-2 Equations de base .....	27
IV-3 Equation de Prandtl .....	30
IV-4 Changement d'entropie à travers un choc .....	30

## **CHAPITRE V : ONDES DE CHOC OBLIQUES**

V-1 Les ondes de choc obliques .....	31
V-2 Equations de base .....	31
V-3 Equation de Prandtl .....	33
V-4 Adaptations des tables du choc normal aux chocs obliques .....	33
V-5 Les ondes de choc faibles .....	35
V-6 Ecoulement autour d'un coin .....	36
V-7 Réflexion et réfraction des ondes obliques .....	36

## **CHAPITRE VI : ECOULEMENT COMPRESSIBLE AVEC FRICTION (THÉORIE DE FANNO)**

VI-1 Ecoulement compressible dans les conduites avec friction (Théorie de FANNO) .....	38
VI-2 Relations en nombre de Mach .....	39

## **CHAPITRE VII : ÉCOULEMENT COMPRESSIBLE AVEC ECHANGE DE CHALEUR (THÉORIE DE RAYLEIGH)**

VII-1 Écoulement dans les conduites avec transfert de chaleur et sans friction (Théorie de RAYLEIGH) .....	44
VII-2 Relations de nombre de Mach .....	46
VII-3 Les effets de suffocation en raison de chauffage simple .....	48

**TABLE I :** Écoulement isentropique d'un gaz parfait.....51

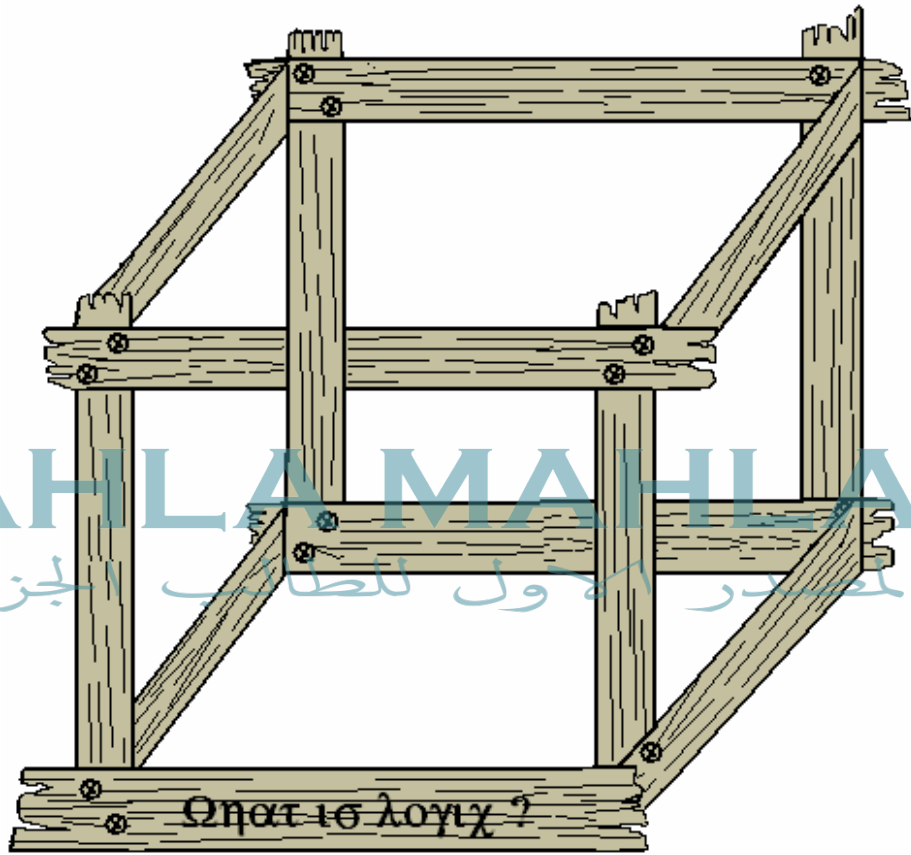
**TABLE II :** Écoulement à onde de choc d'un gaz parfait .....54

**TABLE III :** Ecoulement adiabatique d'un fluide visqueux dans une canalisation de section constante, gaz parfait (Courbes de Fanno).....58

**TABLE IV :** Ecoulement compressible non visqueux avec transfert de chaleur dans une canalisation de section constante, gaz parfait (Courbes de Rayleigh) .....62

**APPENDICE I :** Quelques facteurs de conversion.....66

**APPENDICE II :** Formules utiles.....67



SAHILA MAHILA  
المصدر الأول للطالب الجزائري



# CHAPITRE I

## I-1 Introduction :

Ce cours traite quelques concepts de la discipline de l'aérodynamique des écoulements de fluide visqueux compressible. Quand un fluide se meurt à des vitesses comparables à sa vitesse de son, les variations en densités seront considérable et l'écoulement sera nommé compressible. Ce type d'écoulements est difficile de le réaliser pour les liquides, puisque la génération des vitesses soniques nécessite de hautes pressions de l'ordre de 1000 atm. Cependant dans les gaz, un doublement de pression peut causer un écoulement sonique, de ce fait que la science qui étudie l'écoulement compressible des gaz est souvent appelée Gazodynamique.

### I-1.1 Définitions :

**La gazodynamique** : (Gasdynamics ديناميكا الغازات) est la branche de la dynamique qui s'occupe du mouvement de l'air et d'autres fluides gazeux, et des forces réagissant sur un corps en mouvement relatif aux pareils fluides.:

De tels écoulements compressibles se rencontrent dans les conduites transportant du gaz naturel, ou à travers le diffuseur d'un turboréacteur d'un avion, aux seins des turbines et des compresseurs. Probablement, les deux effets les plus importants de la compressibilité de l'écoulement sont :

1. La suffocation : où la vitesse de l'écoulement dans la conduite (interne) est étroitement limitée par la condition sonique.
2. Les ondes de choc : qui sont des petites discontinuités dans les propriétés de l'écoulements supersonique.

L'objectif de ce cours est d'expliquer tels phénomènes et les quantifier en utilisant les équations fondamentales suivantes :

- équation de continuité.
- équations de quantité de mouvement (Navier Stokes).
- équation de l'énergie.
- équation d'état des gaz.

Et en les résolvant simultanément pour quatre inconnues ; pression, densité (masse volumique), température et la vitesse d'écoulement ( $p, \rho, T, V$ ). Toutefois la théorie des écoulements compressibles est assez compliquée, notamment c'est la raison de supposer la réversibilité et l'adiabaticité de l'écoulement.

Alors, la gazodynamique étudie les cas où le parcours libre moyen ( $\Omega$ ) (Mean free path) des particules du gaz est négligeable devant la longueur caractéristique du domaine de l'écoulement ( $L$ ), c.-à-d. si  $\frac{\Omega}{L} \ll \frac{1}{100}$  le gaz est considéré comme milieu continu. Ce rapport  $\frac{\Omega}{L} \equiv Kn$  est appelé nombre de Knudsen.

**Gaz :** est un type de fluides qui déplacent sous l'action des contraintes de cisaillement  $\tau \equiv \mu \frac{\partial u}{\partial y}$ , et l'influence de la compressibilité est plus importante en comparaison avec l'état de repos.

**Système :** C'est l'ensemble mobile d'une matière, ayant des propriétés bien déterminées et des limites extérieures nommées les frontières du système. La caractéristique fondamentale d'un système au repos ou en écoulement est la quantité de matière (masse) contenue dans ce système.

**Volume de contrôle :** Un volume fictif et fixe dans l'intervalle du mouvement du système, utilisé essentiellement pour étudier l'écoulement passant à travers lui. Ces frontières se nomment surface de contrôle.

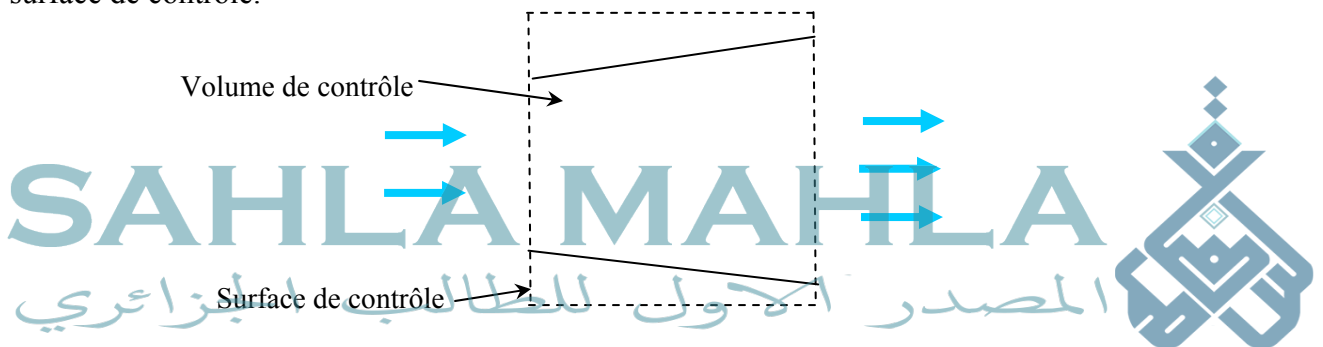


Fig. I-1 : Volume de contrôle.

**Processus (Evolution) :** la transformation d'un état à un autre, avec généralement un échange de chaleur et de travail.

Exemples :

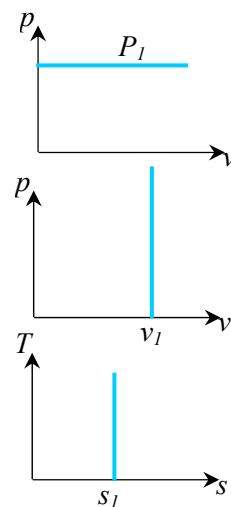
Evolution isobarique : à pression constante

Evolution isochore : à volume constant

Evolution isentropique : à entropie constante

Evolution isotherme : à température constante

Evolution adiabatique : sans échange de chaleur avec l'extérieur.



**Cycle** : processus qui retourne en son état initial.

**Viscosité** : est définie par le quotient de la contrainte de cisaillement  $\tau$  au gradient de vitesse ( $\frac{\partial u}{\partial y}$ ; aussi c'est la tension) :  $\tau \equiv \mu \frac{\partial u}{\partial y} \left[ \frac{kg}{m.s} \right]$ , et mesure la résistance du fluide aux cisaillements.

**Viscosité cinématique** : est définie par  $\nu \equiv \frac{\mu}{\rho} \left[ \frac{m^2}{s} \right]$ , qui mesure la propagation du mouvement au sein du fluide en mouvement.

### I-1.2 Quelques concepts de la thermodynamique :

**Propriété** : caractéristique thermodynamique de l'état d'un système :

- extensive : Propriété proportionnelle à la masse du système, exp. :  $U, S, H$ .

- intensive : Propriété indépendante de la masse du système, exp. :  $u, s, h, T, P$ .

Toutes propriété thermodynamique intensive peut être exprimée en fonction de deux propriétés thermodynamiques intensives au maximum.

**Premier principe de la thermodynamique** :

$$dU = dQ + dW \quad : U \text{ l'énergie interne [J]}$$

**Seconde principe de la thermodynamique** :

$$dS \geq \frac{dQ}{T} \quad : S \text{ l'entropie du système [J/K]}$$

**Travail spécifique** : d'un écoulement est défini par :

$$w_{1-2} = - \int_1^2 p dv \quad [J/kg]$$

**Quantité de chaleur réversible** : par unité de masse :

$$q_{1-2} = \int_1^2 T \cdot ds \quad [J/kg] \quad : s \text{ l'entropie spécifique [J/kg.K]}$$

**Enthalpie spécifique** : est définie par :

$$h \equiv u + pv \quad [J/kg] \quad : u \text{ énergie interne spécifique}$$

$$: pv \text{ travail spécifique}$$

$$\text{Chaleur spécifique à volume constant} : c_v \equiv \left. \frac{\partial u}{\partial T} \right|_v$$

$$\text{Chaleur spécifique à pression constante} : c_p \equiv \left. \frac{\partial h}{\partial T} \right|_p$$

$$\text{Rapport des chaleurs spécifiques} : \gamma = \frac{c_p}{c_v}$$

**Loi de Laplace** : pour un processus isentropique  $pv^\gamma = Const$



### I-1.3 Relations des gaz parfaits :

La majorité des calculs des écoulements compressibles est effectuée pour un gaz parfait (c.-à-d. idéal, chaleurs spécifiques constantes), ayant l'équation d'état :

$$PV = RT \quad \text{I-1}$$

où  $R$  : est la constante du gaz :  $R = R_0 / M_{gaz}$  ,

et  $R_0$  est la constante universelle des gaz ( $R_0 = 8314 \text{ J/kg.K} = 8314 \text{ m}^2/\text{s}^2.\text{K}$ )

$M_{gaz}$  la masse molaire du gaz.

Si on utilise les quantités spécifiques où  $\rho v = 1$  l'équation (I-1) devient :

$$p = \rho RT \quad \text{I-2}$$

Ainsi pour l'air (supposé comme gaz parfait), on a  $M_{air} = 28.96$  donc :  $R = 287 \text{ J/kg.K}$ ,

$R = c_p - c_v = \text{Const}$  et  $\gamma = \frac{c_p}{c_v} = \text{Const}$  d'où :

$$c_v = \frac{R}{\gamma - 1} = 718 \text{ J/kg.K} ; \quad c_p = \frac{\gamma R}{\gamma - 1} = 1005 \text{ J/kg.K}$$

Aussi pour un gaz parfait :

$$\Delta u = c_v \Delta T ; \quad \Delta h = c_p \Delta T$$

### I-1.4 Relations isentropiques :

En thermodynamique des écoulements compressibles, les relations qui décrivent les processus isentropiques ( $s = \text{Constante}$ ) présentent de grande importance.

D'après le deuxième principe thermodynamique :

$$ds \geq \frac{dq}{T}$$

Si le processus est réversible :  $ds = \frac{dq}{T}$

Si le processus est adiabatique :  $dq = 0 \Rightarrow ds = 0$  , d'où un processus isentropique est adiabatique et réversible.

La variation d'entropie sera d'après le premier et le second principe thermodynamique :

$$Tds = dh - \frac{dp}{\rho}$$

Mais comme  $dh = c_p dT$  pour un gaz parfait; et  $\rho T = \frac{p}{R}$  on aura :

$$\int_1^2 ds = \int_1^2 c_p \frac{dT}{T} - R \int_1^2 \frac{dp}{p}$$

$$\text{en intégrant nous obtenons : } \Delta s = s_2 - s_1 = c_p \ln \frac{T_2}{T_1} - R \ln \frac{p_2}{p_1} \quad \text{I-3}$$

$$\text{Ou: } \Delta s = s_2 - s_1 = c_v \ln \frac{T_2}{T_1} - R \ln \frac{\rho_2}{\rho_1} \quad \text{I-4}$$

Et pour un processus isentropique  $s_2 = s_1$  on aura les relations en puissances des gaz parfaits :

$$\frac{T_2}{T_1} = \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = \left( \frac{\rho_2}{\rho_1} \right)^{\gamma-1} \quad \text{I-5}$$

## I-2 Thermodynamique et physique du son :

### I-2.1 Propagation des ondes sonores :

Il est bien connu que lorsqu'une minuscule perturbation se développe dans un gaz, la variation résultant de la pression se propage dans toutes les directions sous forme d'une onde de compression (onde longitudinale), c'est ce que l'on entend comme du son. Sa vitesse de propagation est la vitesse du son.

Pour des raisons de simplification, on suppose une onde plane dans un fluide stationnaire (au repos) dans un tube de section uniforme  $A$  (figure I-2).

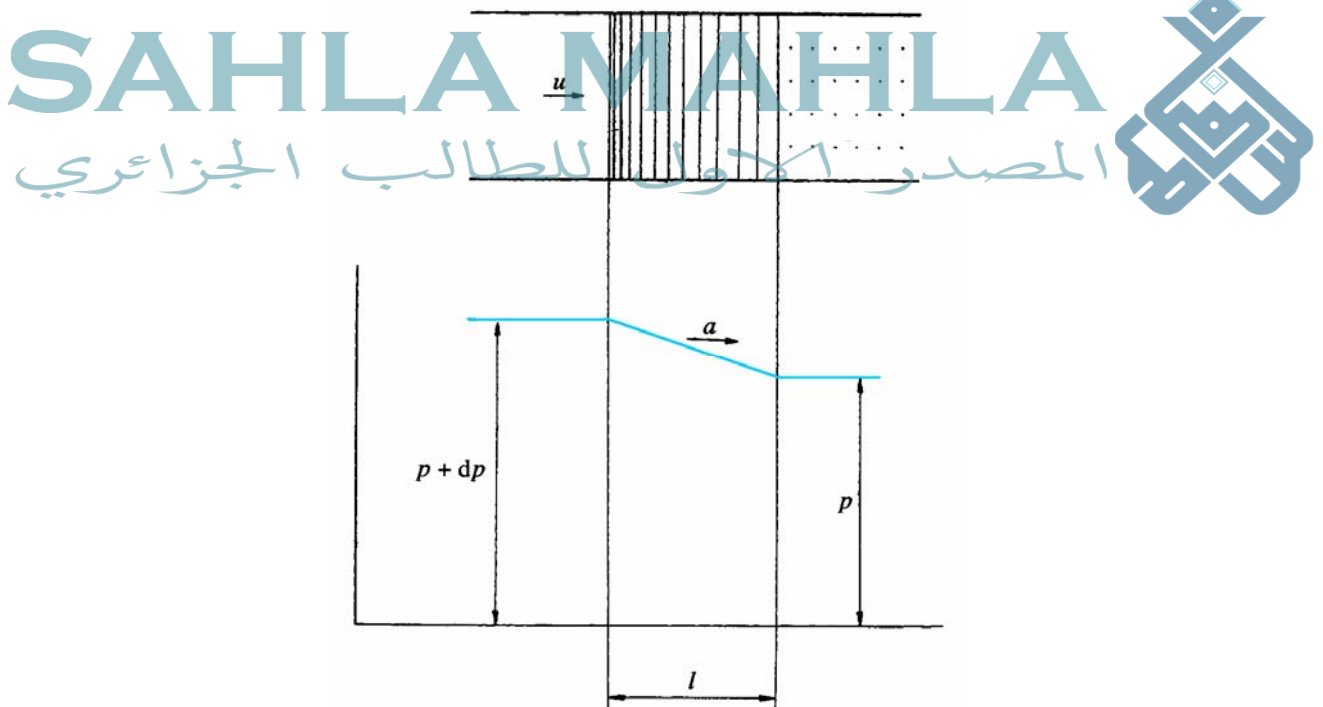


Fig. I-2 : Propagation de l'onde de compression.

Des augmentations de la vitesse, la pression et la densité ( $u, dp, d\rho$ ) résultent de ladite perturbation.

Entre le front d'onde qui avance à la vitesse sonique  $a$  et l'autre plan où il était née cette perturbation, il y'en a une section de longueur  $l$  où la pression était augmentée.

Puisque la durée de l'augmentation de la pression dans l'onde est :  $t=l/a$ , la masse par unité du temps confinée dans cette section est augmentée par :  $Al d\rho/t = Aa d\rho$ . Donc, le gaz de masse  $Au(\rho+d\rho)=Au\rho$  s'écoule à travers cette section et l'équation de continuité sera :

$$Aa d\rho = Au\rho$$

ou  $a d\rho = u\rho$  I-6

la vitesse du fluide dans cette section change de 0 à  $u$  dans un laps du temps  $t$ , de ce fait on peut la regarder comme ayant une accélération uniforme  $\frac{u}{t} = \frac{ua}{l}$ .

Puisque la masse est  $Al\rho$  en négligeant  $d\rho$  devant  $\rho$  ; l'équation du mouvement (2ème loi de Newton) sera :

$$Al\rho \cdot \frac{ua}{l} = A dp \quad \Rightarrow$$

$$\rho u a = dp \quad \text{I-7}$$

En éliminant  $u$  des équations (I-6) et (I-7) nos obtenons :

$$a = \sqrt{dp/d\rho}$$

Mais puisque le soudain changement de la pression est considéré comme adiabatique (pas de gradients de température sauf à l'intérieur de l'onde) ; donc ce processus est isentropique, et l'expression de la vitesse sonore sera :

$$a = \sqrt{\left. \frac{dp}{d\rho} \right|_s}$$

I-8

Valide pour tout fluide, gaz ou liquide, et même pour un solide (voir tableau suivant).

	Substance	$a$ [ft/s]	$a$ [m/s]
<u>Gaz</u>	H <sub>2</sub>	4246	1294
	He	3281	1000
	Air	1117	340
	Ar	1040	317
	CO <sub>2</sub>	873	266
	CH <sub>4</sub>	607	185
<u>Liquides</u>	Glycérine	6100	1860
	Eau	4890	1490
	Mercure	4760	1450
	Ethyle	3940	1200
<u>Solides</u>	Aluminium	16900	5150
	Acier	16600	5060
	Glace	10500	3200

Tab. I-1 : la célérité sonore pour divers matériaux à 60°F (15.5°C) et 1 atm.

Il est remarquable que la forme de la dernière équation de la célérité sonore (I-8) ne soit pas pratique dans tous les cas.

**I-2.2 La vitesse sonore d'après l'équation d'état:**

Pour une quelconque substance, on a :  $a = \sqrt{\left(\frac{dp}{d\rho}\right)_s}$

le premier principe de la thermodynamique donne :  $dq = du + p dv$

Et pour un processus réversible  $dq = T ds$  d'où  $T ds = du + p dv$

On a aussi, d'après les relations de Maxwell :  $du = c_v dT + \left(T \frac{\partial p}{\partial T}\bigg|_v - p\right) dv$

On aura :  $T ds = \left[ c_v dT + \left(T \frac{\partial p}{\partial T}\bigg|_v - p\right) dv \right] + p dv$

$$\Rightarrow T ds = c_v dT + \left(T \frac{\partial p}{\partial T}\bigg|_v\right) dv$$

mais puisque  $v = \frac{1}{\rho}$  et  $dv = -\frac{d\rho}{\rho^2}$ , on a :  $T ds = c_v dT - \left(\frac{T}{\rho^2} \frac{\partial p}{\partial T}\bigg|_\rho\right) d\rho$

et quand  $p = p(T, \rho)$  :




$dp = \frac{\partial p}{\partial T}\bigg|_\rho dT + \frac{\partial p}{\partial \rho}\bigg|_T d\rho \Rightarrow dT = \frac{dp - \frac{\partial p}{\partial \rho}\bigg|_T d\rho}{\frac{\partial p}{\partial T}\bigg|_\rho}$

المصدر الاول للطالب الجزائري

en substituant pour  $dT$  :

$$T ds = c_v \left[ \frac{dp - \frac{\partial p}{\partial \rho}\bigg|_T d\rho}{\frac{\partial p}{\partial T}\bigg|_\rho} \right] - \left(\frac{T}{\rho^2} \frac{\partial p}{\partial T}\bigg|_\rho\right) d\rho$$

Groupons les termes en  $dp$  et  $d\rho$  on obtient :

$$T ds = \left(\frac{c_v}{\frac{\partial p}{\partial T}\bigg|_\rho}\right) dp - \left(c_v \frac{\frac{\partial p}{\partial \rho}\bigg|_T}{\frac{\partial p}{\partial T}\bigg|_\rho} + \frac{T}{\rho^2} \frac{\partial p}{\partial T}\bigg|_\rho\right) d\rho$$

Si le processus est isentropique ( $ds \equiv 0$ )

$$\frac{\partial p}{\partial \rho}\bigg|_s = \frac{1}{c_v} \frac{\partial p}{\partial T}\bigg|_\rho \left( c_v \frac{\frac{\partial p}{\partial \rho}\bigg|_T}{\frac{\partial p}{\partial T}\bigg|_\rho} + \frac{T}{\rho^2} \frac{\partial p}{\partial T}\bigg|_\rho \right)$$

$$\left. \frac{\partial p}{\partial \rho} \right|_s = \left. \frac{\partial p}{\partial \rho} \right|_T + \frac{T}{c_v \rho^2} \left( \left. \frac{\partial p}{\partial T} \right|_\rho \right)^2$$

Finalement :

$$a(T, \rho) = \sqrt{\left. \frac{\partial p}{\partial \rho} \right|_T + \frac{T}{c_v \rho^2} \left( \left. \frac{\partial p}{\partial T} \right|_\rho \right)^2} \quad \text{I-9}$$

**Exemple :**

Pour un gaz parfait :  $p(T, \rho) = \rho RT$

Par dérivation on a :  $\left. \frac{\partial p}{\partial \rho} \right|_T = RT$  ;  $\left. \frac{\partial p}{\partial T} \right|_\rho = \rho R$

$$\begin{aligned} \text{D'où : } a(T, \rho) &= \sqrt{RT + \frac{T}{c_v \rho^2} (\rho R)^2} \\ &= \sqrt{RT \left( 1 + \frac{R}{c_v} \right)} \\ &= \sqrt{RT \left( 1 + \frac{c_p - c_v}{c_v} \right)} \quad \Rightarrow \quad a = \sqrt{\gamma RT} \end{aligned}$$

Pour un gaz parfait, La vitesse de son dépend uniquement de la température.

# SAHLA MAHLA

## I-2.3 Nombre de Mach :

المصدر الأول للطالب الجزائري  
Le rapport de la vitesse  $V$  à la vitesse du son  $a$ , c.-à-d.  $M=V/a$ , est appelé nombre de Mach.

Donc, si on considère un corps placé à la direction d'un écoulement uniforme de vitesse  $V$ , au point de stagnation (d'arrêt), la pression augmente de  $\Delta p = \rho V^2 / 2$  ce qui implique une augmentation de la densité de  $\Delta \rho = \Delta p / a^2$  ; par conséquent :

$$M = \frac{V}{a} = \frac{1}{a} \sqrt{\frac{2\Delta p}{\rho}} = \sqrt{\frac{2\Delta p}{\rho}} \quad \text{I-10}$$

En d'autres termes, le nombre de Mach est un nombre adimensionnel qui exprime l'effet de compressibilité d'un fluide en écoulement. D'après l'équation (I-10), le nombre de Mach  $M$  correspondant à une variation de 5% est environ 0.3, pour cette raison un écoulement stationnaire peut être supposé incompressible jusqu'à un Mach de 0.3.

Le nombre de Mach est le paramètre dominant dans l'étude de l'écoulement compressible. L'aérodynamique notamment utilise une classification des écoulements en fonction des diverses valeurs du nombre de Mach :

$M < 0.3$  : écoulement incompressible, où les effets de la densité sont négligeables.

$0.3 < M < 0.8$  : écoulement subsonique, où les effets de la densité sont importants mais sans apparition des ondes de choc.

$0.8 < M < 1.2$  : écoulement transsonique, où les ondes de choc apparaissent, en divisant l'écoulement en régions subsonique et supersonique.

$1.2 < M < 5.0$  : écoulement supersonique, où les ondes de choc existent sans aucune région subsonique.

$5.0 < M$  : écoulement hypersonique, où les ondes de choc et d'autres variations des propriétés de l'écoulement sont spécialement fortes.

Ces cinq catégories sont essentiellement utilisées dans les écoulements compressibles externes. Alors, pour les écoulements internes, la question sera simplement si que l'écoulement est subsonique ( $M < 1$ ) ou supersonique ( $M > 1$ ).

**I-2.4 Ondes de Mach :**

Si on considère la propagation d'une onde sonore, une minuscule variation (comme un son) se propage à une vitesse sonique  $a$  depuis la source sonore dans toute les directions (figure I-3a).

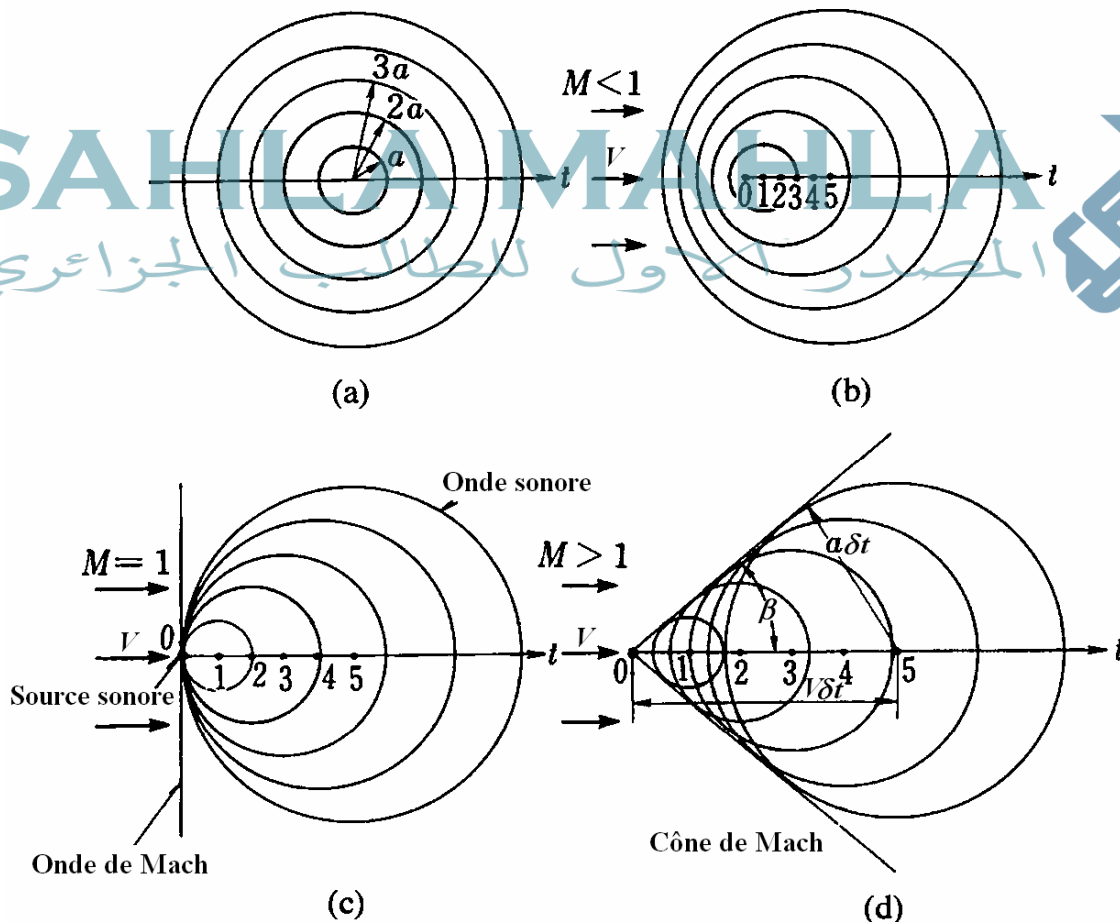


Fig. I-3 : Nombre de Mach et les propagations des ondes sonores : (a) repos ; (b) subsonique ( $M < 1$ ) ; (c) sonique ( $M = 1$ ) ; (d) supersonique ( $M > 1$ ).

Une succession d'ondes sonores est produite continûment d'une source sonore placée dans la direction d'un écoulement de vitesse  $V$ . Quand  $V$  est inférieure à  $a$  (figure I-3b) ; c.-à-d.  $M < 1$ , les fronts d'onde se propagent à la vitesse  $a-V$  en amont, mais à  $a+V$  en aval de l'écoulement. Par conséquent, l'intervalle entre les fronts d'ondes est plus dense en amont qu'en aval.

Quand  $V = a$ , c.-à-d.  $M = 1$ , la vitesse de propagation ( $V-a$ ) sera nulle, et le son se propage seulement en aval de l'écoulement (figure I-3c), en produisant une onde appelée onde de Mach normale à la direction de l'écoulement. Si un observateur est situé en amont de l'écoulement, il ne peut pas entendre le mouvement s'approchant.

Si  $V > a$ , c.-à-d.  $M > 1$ , les fronts d'ondes cessent de se propager en amont (figure I-3d), mais ils continuent de se propager en aval. L'enveloppe de ces ondes forme le cône de Mach, et le son est confiné dans le cône. Si l'angle au sommet du cône de mach est  $2\beta$ , on a :

$$\sin \beta = \frac{a \delta t}{V \delta t} = \frac{a}{V} = \frac{1}{M} \tag{I-11}$$

Cet angle est appelé angle de mach.

Plus que le nombre de Mach  $V/a$  est élevé, plus le cône est pointu, par exemple ;  $\beta = 30^\circ$  à  $M = 2.0$  et  $11.5^\circ$  à  $M = 5.0$ . Pour le cas limite de l'écoulement sonique,  $M = 1$  ;  $\beta = 90^\circ$ , le cône de mach deviendra un plan déplaçant avec la particule ; ce qui est en agrément avec la figure (I-3c). L'observateur ne peut entendre les perturbations supersoniques seulement s'il se trouve dans le cône de Mach (zone d'action), et la zone en dehors du cône est appelée zone de silence.

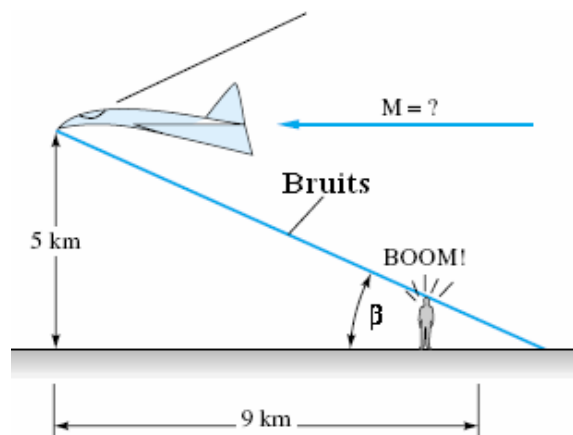
**Exemple :**

Un observateur ne peut entendre le bruit causé par un avion volant à 5 km d'altitude, jusqu'il s'éloigne de lui de 9 km. Quel est le nombre de Mach de l'avion ? en supposant des petites perturbations et négligeant les variations de la vitesse du son avec l'altitude.

**Solution :**

$$\text{tg } \beta = \frac{5 \text{ km}}{9 \text{ km}} = 0.5556 \quad \Rightarrow \quad \beta = 29.05^\circ$$

et de l'équation (I-11) :  $M = \frac{1}{\sin \beta} = 2.06.$



## CHAPITRE II

### II-1 Equations de base d'un écoulement compressible unidimensionnel :

En appliquant le premier principe de la thermodynamique à un gaz s'écoulant à travers un volume de contrôle comme représenté sur la figure II-1, nous pouvons écrire l'équation de l'énergie entre les 2 sections comme suit :

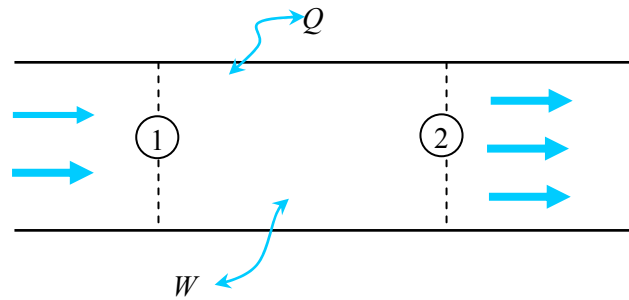


Fig. II-1 : Volume de contrôle.

$$C_1 + u_1 + p_1 v_1 + g z_1 + \frac{1}{2} V_1^2 + Q_1 + W_1 = C_2 + u_2 + p_2 v_2 + g z_2 + \frac{1}{2} V_2^2 + Q_2 + W_2$$

Où :

$\Delta C = C_2 - C_1$  : la variation de l'énergie chimique.

$\Delta u$  : la variation de l'énergie interne.

$\Delta Q$  : la quantité de chaleur échangée.

$\Delta W = W_2 - W_1$  : le travail mécanique entre la sortie et l'entrée.

$g \Delta z$  : la variation de l'énergie potentielle.

$p_2 v_2 - p_1 v_1$  : la variation du travail spécifique (énergie de pression).

Si on suppose un écoulement sans échanges de chaleur avec l'extérieur, de travail mécanique ou de l'énergie chimique (c'est le cas des écoulements dans les conduites) :

On obtient :

$$u_1 + p_1 v_1 + g z_1 + \frac{1}{2} V_1^2 = u_2 + p_2 v_2 + g z_2 + \frac{1}{2} V_2^2$$

d'où :

$$u + \frac{p}{\rho} + g z + \frac{1}{2} V^2 = Cte$$

II-1

Cette équation décrit l'énergie totale d'un écoulement de fluide interne (dans les conduites).



Si le fluide en écoulement est incompressible ( $\rho = Cte$ ) avec une négligeable variation de la température qui entraîne une constance de l'énergie interne ; et l'équation (II-1) sera :

$$\frac{p}{\rho} + gz + \frac{1}{2}V^2 = Cte$$

Que l'on appelle l'équation de Bernoulli, ou sous une autre forme :

$$p_t = p + \rho gz + \frac{1}{2}\rho V^2 = Cte$$

où :  $p$  : la pression statique.

$$\frac{1}{2}\rho V^2 : \text{ la pression dynamique.}$$

$$\rho gz : \text{ la pression de potentiel ( de la pesanteur).}$$

$$p_t = Cte : \text{ la pression totale.}$$

Pour un fluide compressible, sans transfert de chaleur, et en introduisant le concept de l'enthalpie on a :

$$h_t = h + gz + \frac{1}{2}V^2 = Cte$$

avec :  $h = u + \frac{p}{\rho}$  : est l'enthalpie statique

et  $h_t = Cte$  : est l'enthalpie totale (ou de stagnation).

$$\text{Donc : } h_t = h_1 + gz_1 + \frac{1}{2}V_1^2 = h_2 + gz_2 + \frac{1}{2}V_2^2$$

Mais comme, les variations de l'énergie potentielle sont extrêmement petites devant celles de l'enthalpie et l'énergie cinétique, on peut négliger les termes  $gz_1$  et  $gz_2$  dans nos analyses gazodynamiques, donc l'équation de l'énergie sera finalement :

$$h_t = h + \frac{1}{2}V^2 = Cste \quad \text{II-2}$$

qui donne l'énergie totale d'un écoulement d'un gaz dans les conduites.

## II-2 Etat générateur :

En supposant que le fluide compressible se décharge d'un réservoir de très grandes dimensions; les conditions dans cet état (générateur) seront appelées les conditions initiales, ce qui entraîne  $V = V_0 \approx 0$  (avec l'indice 0 marquant les propriétés au réservoir), et si on considère un

$$\text{gaz parfait : } c_p \equiv \left. \frac{\partial h}{\partial T} \right|_p \quad \text{et} \quad c_p = Cste$$

on aura :

$$c_p T_i \equiv c_p T_0 = c_p T + \frac{1}{2} V^2$$

Sachant que :

$$\begin{cases} \gamma = \frac{c_p}{c_v} \\ c_p - c_v = R \end{cases} \Rightarrow c_p = \frac{\gamma R}{\gamma - 1}$$

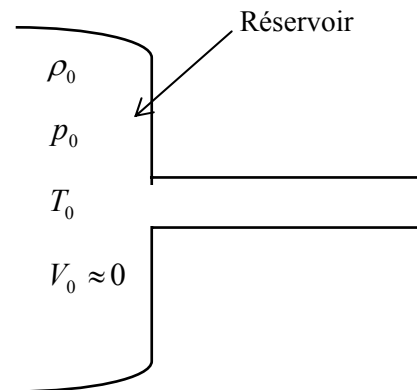


Fig. II-2 : Conditions initiales.

Qui donne :

$$\frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p_0}{\rho_0} = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} V^2$$

Et puisque la vitesse du son pour un gaz parfait est donnée par :  $a^2 = \gamma RT = \gamma \frac{p}{\rho}$ , on obtient :

$$\frac{a_0^2}{\gamma - 1} = \frac{a^2}{\gamma - 1} + \frac{1}{2} V^2 \tag{II-3}$$

où  $a_0$  et  $a$  dénotent respectivement les vitesses du son aux conditions initiales (au réservoir) et statique.

En introduisant le nombre de Mach comme paramètre ( $M = V/a$ ), l'équation (II-2) peut être réécrite comme suit :

$$\frac{a_0^2}{a^2} = 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2$$

Et avec  $a^2 = \gamma RT$  le rapport des températures totale et statique est :

$$\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2$$

Où :  $T_0$  : la température totale

$T$  : la température statique.

$M$  : le nombre de Mach.

### II-3 Propriétés isentropiques et de stagnation d'un écoulement :

Si l'écoulement est isentropique ( $\frac{p}{\rho^\gamma} = Cste$ ), les rapports des pressions et des densités

pour un gaz parfait ( $p = \rho RT$ ) sont calculées par :

$$\frac{p_0}{p} = \left( 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}}$$

et

$$\frac{\rho_0}{\rho} = \left( \frac{p_0}{p} \right)^{\frac{1}{\gamma}} = \left( 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right)^{\frac{1}{\gamma - 1}}$$

où  $p_0$  et  $\rho_0$  dénotent respectivement la pression et la densité isentropiques de stagnation.

Ces formules sont applicables dans les écoulements des fluides compressibles entre le point de stagnation et un point quelconque au sein du fluide.

**II-4 Seuil de compressibilité :**

Afin de déterminer la seuil de compressibilité (limite entre l'écoulement compressible incompressible), on note  $p_\infty$  la pression statique en un point quelconque dans le fluide où  $M < 1$ , et d'après l'équation de Bernoulli :

$$p_0 = p_\infty + \frac{1}{2} \rho V^2$$

Et l'équation u rapport des pressions donne :

$$\frac{p_0}{p_\infty} = \left( 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}}$$

Développons la dernière équation d'après la formule du binôme de Newton (ou en série de Taylor, voir appendice II); en posant :  $\frac{\gamma}{\gamma - 1} = m$  et  $\frac{\gamma - 1}{2} M^2 = Y$

$$(1 + Y)^m = 1 + \frac{m}{1!} Y + \frac{m(m - 1)}{2!} Y^2 + \dots (Y < 1)$$

on aura :

$$\frac{p_0}{p_\infty} = 1 + \frac{\gamma}{2} M^2 + \frac{\gamma}{8} M^4 + \frac{\gamma(2 - \gamma)}{48} M^6 + \dots$$

$$p_0 - p_\infty = \frac{\gamma p M^2}{2} \left[ 1 + \frac{M^2}{4} + \frac{(2 - \gamma)}{24} M^4 + \dots \right]$$

et on a :  $\frac{\gamma p M^2}{2} = \frac{1}{2} \rho V^2$

donc :  $\frac{p_0 - p_\infty}{\frac{1}{2} \rho V^2} = 1 + \frac{M^2}{4} + \frac{(2 - \gamma)}{24} M^4 + \dots$

Dressons le tableau suivant en fonction du nombre de Mach avec  $\gamma = 1.4$  :

M	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8
$(p_0 - p_\infty) / \frac{1}{2} \rho V^2 = c$	1.000	1.003	1.010	1.023	1.041	1.064	1.093	1.129	1.170
Erreur relative (%) $E = (c - 1) / c$	0	0.30	0.99	2.25	3.94	6.02	8.52	11.42	14.53

On peut remarquer évidemment que l'utilisation de l'équation de Bernoulli (utilisée pour les écoulements incompressibles), commet une erreur de 1% pour le nombre de Mach  $M=0.2$ , et cette erreur peut atteindre 2% à  $M=0.3$  ; c'est ce que l'on appelle la seuil de compressibilité.

**II-5 Écoulements isentropiques dans les canalisations :**

Considérons le cas de l'écoulement compressible d'un gaz parfait entre deux sections du canal (figure II-3).

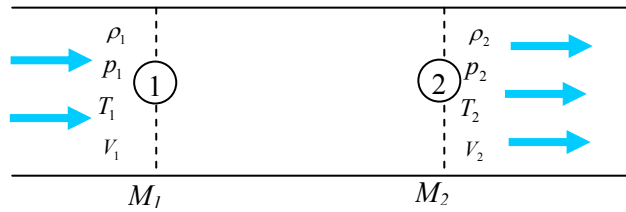


Fig. II-3 : Écoulement dans une conduite.

L'équation (II-2) donne :

$$h_0 = h + \frac{1}{2}V^2 = Cste \quad \Rightarrow \quad h_0 = h_1 + \frac{1}{2}V_1^2 = h_2 + \frac{1}{2}V_2^2 = Cste$$

d'où :

$$\frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p_1}{\rho_1} + \frac{1}{2}V_1^2 = \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p_2}{\rho_2} + \frac{1}{2}V_2^2$$

$$\Rightarrow \frac{V_1^2 - V_2^2}{2} = \frac{\gamma}{\gamma-1} \left[ \frac{p_2}{\rho_2} - \frac{p_1}{\rho_1} \right]$$

et pour un écoulement isentropique:  $p / \rho^\gamma = Cste$

SAHLA MAHLA  
المصدر الأول للطالب الجزائري

On obtient :

$$\frac{V_1^2 - V_2^2}{2} = \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p_1}{\rho_1} \left[ \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right]$$

II-4

Cette équation permet de calculer la vitesse  $V$  dans une section quelconque du canal, en connaissant seulement la pression statique.

L'équation de Barré de Saint-Venant est un cas spécial de l'équation (II-4) où les suppositions suivantes sont prises :

$$\begin{cases} V_1 = V_0 = 0 \\ p_1 = p_0 \\ p_2 = p \\ V_2 = V \end{cases}$$

on obtient :

$$-\frac{V^2}{2} = \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p_0}{\rho_0} \left[ \left( \frac{p}{p_0} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right] \quad \Rightarrow$$

$$V = \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1} \frac{p_0}{\rho_0} \left[ 1 - \left( \frac{p}{p_0} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right]} \quad \text{II-5}$$

L'équation de Saint-Venant donne la vitesse du gaz dans une section à conditions de connaître les conditions initiales (au réservoir) et la pression statique à cette section, ou sous la forme suivante :

$$V = \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1} RT_0 \left[ 1 - \left( \frac{p}{p_0} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right]}$$

Et l'équation S.V montre que l'annulation de la pression engendre une augmentation de la vitesse jusqu'à une valeur limite :

$$V_L = V_{\max} = \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1} RT_0} = \sqrt{2c_p T_0}$$

aussi :  $V_L = \sqrt{\frac{2}{\gamma-1}} a_0$

### II-6 Conditions critiques :

Les propriétés de stagnation ( $a_0, T_0, p_0, \rho_0$ ) sont utiles comme référence pour l'écoulement compressible, mais ils existent d'autres propriétés d'une utilité comparable à savoir les conditions où l'écoulement est sonique,  $M=1.0$ . Ces conditions soniques ou critiques seront notées par un astérisque :  $p^*, \rho^*, a^*$ , et  $T^*$ . il présentent certains rapports aux conditions de stagnation (totales) donnés par les équations suivantes avec  $M=1$  et  $\gamma=1.4$  :

$$\left. \begin{aligned} \frac{p^*}{p_0} &= \left( \frac{2}{\gamma+1} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = 0.5283 & \frac{\rho^*}{\rho_0} &= \left( \frac{2}{\gamma+1} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} = 0.6339 \\ \frac{T^*}{T_0} &= \frac{2}{\gamma+1} = 0.8333 & \frac{a^*}{a_0} &= \left( \frac{2}{\gamma+1} \right)^{\frac{1}{2}} = 0.9129 \end{aligned} \right\} \quad \text{II-6}$$

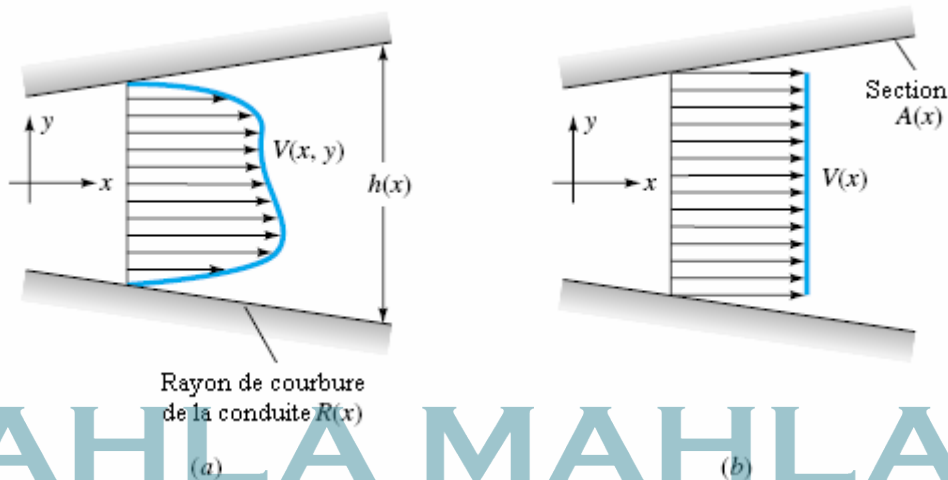
Dans tous les écoulements isentropiques, les propriétés critiques sont constantes. La vitesse critique  $V^*$  est égale à la vitesse du son critique  $a^*$  par définition et souvent utilisée comme vitesse de référence pour l'écoulement isentropique :

$$V^* = a^* = (\gamma RT^*)^{1/2} = \left( \frac{2\gamma}{\gamma+1} RT_0 \right)^{\frac{1}{2}}$$

## CHAPITRE III

### III-1 Écoulement isentropique avec changement de section :

En combinant les relations isentropiques d'un écoulement compressible avec l'équation de continuité, on peut étudier des problèmes pratiques des écoulements compressibles. La figure III-1 illustre le cas d'un écoulement unidimensionnel. Un fluide réel (figure III-1a) a la propriété de non-glissement à la paroi, et le profil de vitesse  $V(x, y)$  variable à travers la section de la conduite.



SAHLA MAHLA

Fig. III-1 : Écoulement compressible dans une canalisation : (a) Profil de vitesse d'un fluide réel, (b) Approximation unidimensionnelle.

Cependant, si la variation de la section est petite et le rayon de courbure est grand :

$$\frac{dh}{dx} \ll 1 \qquad h(x) \ll R(x)$$

L'écoulement est approximativement unidimensionnel (figure III-1b) avec  $V \approx V(x)$ , ce qui simplifie la théorie.

Pour l'écoulement unidimensionnel stationnaire, l'équation de continuité informe que le débit massique soit constant :  $\dot{m} = \rho VA = \text{Const}$

En différenciant logarithmiquement (voir appendice II), on obtient :

$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{dV}{V} + \frac{dA}{A} = 0 \qquad \text{III-1}$$

L'équation d'Euler décrivant le mouvement stationnaire le long d'une ligne de courant est :

$$\frac{1}{\rho} \frac{dp}{d\ell} + \frac{d}{d\ell} \left( \frac{1}{2} V^2 \right) = 0 \qquad \text{où : } \ell \text{ est l'abscisse curviligne.}$$

Ou bien : 
$$\frac{dp}{\rho} + VdV = 0 \tag{III-2}$$

La vitesse du son est  $a^2 = \frac{dp}{d\rho}$  d'où :

$$dp = a^2 d\rho$$

En éliminant  $dp$  dans l'équation (III-2), on obtient :

$$\frac{a^2 d\rho}{\rho} + VdV = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d\rho}{\rho} = -\frac{VdV}{a^2}$$

Puisque  $M^2 = V^2/a^2$  :

$$\frac{d\rho}{\rho} = -M^2 \frac{dV}{V} \tag{III-3}$$

Si on substitue  $\frac{d\rho}{\rho}$  dans l'équation (III-1), on aura :

$$\frac{dV}{V} = \frac{1}{(M^2 - 1)} \frac{dA}{A} \tag{III-4}$$

Qui est la première équation de la théorie d'Hugoniot donnant la relation entre le changement de la section d'une canalisation et la vitesse de l'écoulement compressible.

Aussi on a d'après l'équation (III-2) :

$$\frac{dV}{V} = -\frac{1}{M^2 a^2} \frac{dp}{\rho}$$

et puisque  $a^2 = \frac{\gamma p}{\rho}$  :

$$\frac{dV}{V} = -\frac{1}{\gamma M^2} \frac{dp}{p} \tag{III-5}$$

Qui représente la deuxième équation d'Hugoniot.

L'inspection de ces deux équations (III-4 et III-5) nous révélera un aspect fascinant de l'écoulement compressible : les variations des propriétés ont des sens opposés pour les écoulements subsonique et supersonique à cause du terme  $M^2 - 1$ . Il y'a quatre combinaisons du changement de section et du nombre de Mach.

1. Si  $M=1$  ; écoulement sonique, puisque une accélération infinie est physiquement impossible (équation III-4), donc  $dA = 0$ , qui signifie mathématiquement une section minimale (col) ou maximale (figure III-2), mais ce dernier cas (maximum) n'a pas de sens physique. Par conséquent, si l'écoulement est sonique, il aura lieu dans la section minimale de la canalisation (appelée le col).



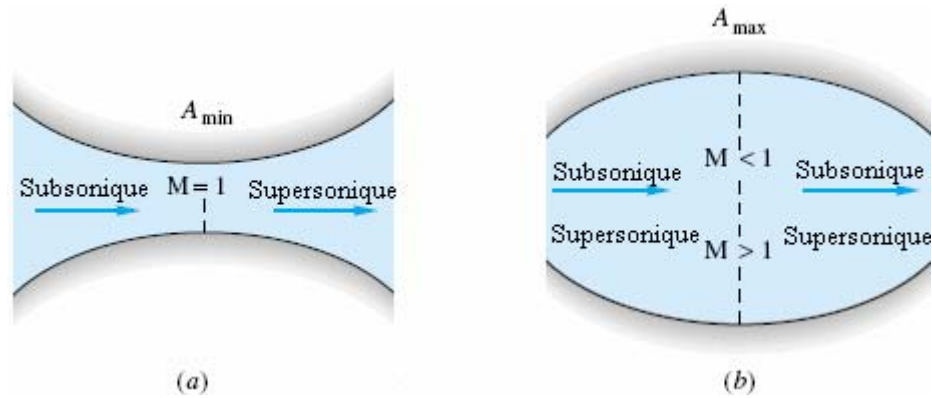


Fig. III-2 : Écoulement compressible dans une canalisation de section variable : (a) l'écoulement accélère graduellement de l'état subsonique au supersonique; (b) l'écoulement dans cette configuration n'est plus sonique de point de vue physique.

2. Si  $M < 1$  ; écoulement subsonique, quand la section  $A$  augmente la vitesse  $V$  diminue et vice-versa.
3. Si  $M > 1$  ; écoulement supersonique, toute augmentation de la section  $A$  implique une augmentation de la vitesse  $V$  et vice-versa.
4. Ainsi d'après l'équation (III-5), toute variation de la vitesse  $V$  entraîne une variation de la pression  $p$  dans le sens inverse. La table suivante récapitule les quatre cas déjà cités :

Propriétés	Écoulement			
	Subsonique		Supersonique	
Section	-	+	-	+
Vitesse / nombre de Mach	+	-	-	+
Densité / pression / température	-	+	+	-

### III-2 Débit massique d'une canalisation de section variable :

Le point essentiel dans l'étude des écoulements compressibles dans les canalisations avec changement de section, est la détermination du débit massique  $\dot{m}$  en fonction des autres propriétés de l'écoulement, on a l'équation :

$$\dot{m} = \rho VA$$

Substituons  $V$  par son expression d'après l'équation de Saint-Venant (II-5) :

$$\dot{m} = \rho A \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1} \frac{p_0}{\rho_0} \left[ 1 - \left( \frac{p}{p_0} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right]}$$



Et puisque l'écoulement est isentropique :  $\frac{p_0}{\rho_0^\gamma} = \frac{p}{\rho^\gamma} = Const$

$$\Rightarrow \rho = \rho_0 \left( \frac{p}{p_0} \right)^{1/\gamma}$$

D'où :

$$\dot{m} = \rho_0 A \left( \frac{p}{p_0} \right)^{\frac{1}{\gamma}} \sqrt{\frac{2\gamma p_0}{\gamma-1 \rho_0} \left[ 1 - \left( \frac{p}{p_0} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right]}$$

$$\Rightarrow \dot{m} = \rho_0 A \sqrt{\frac{2\gamma p_0}{\gamma-1 \rho_0}} \left( \frac{p}{p_0} \right)^{\frac{1}{\gamma}} \sqrt{1 - \left( \frac{p}{p_0} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}}$$

III-6

$$\Rightarrow \dot{m} = \rho_0 A V_{\max} \Psi$$

Avec :  $V_{\max} = V_L = \sqrt{\frac{2\gamma p_0}{\gamma-1 \rho_0}}$

Et :  $\Psi = \left( \frac{p}{p_0} \right)^{\frac{1}{\gamma}} \sqrt{1 - \left( \frac{p}{p_0} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}}$

Posons  $\frac{p}{p_0} = x$ , donc :

SAHLA MAHLA  
المصدر الأول للطلاب الجزائري

$$\frac{d\Psi}{dx} = 0 \Rightarrow x = \frac{p}{p_0} = \left( \frac{2}{\gamma+1} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

Quand  $p/p_0$  a la valeur  $\left( \frac{2}{\gamma+1} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$ , la fonction  $\Psi$  est maximum, puisque  $\Psi = \Psi\left(\frac{p}{p_0}\right)$

s'annule si  $p = 0$  et  $p = p_0$  (figure III-3).

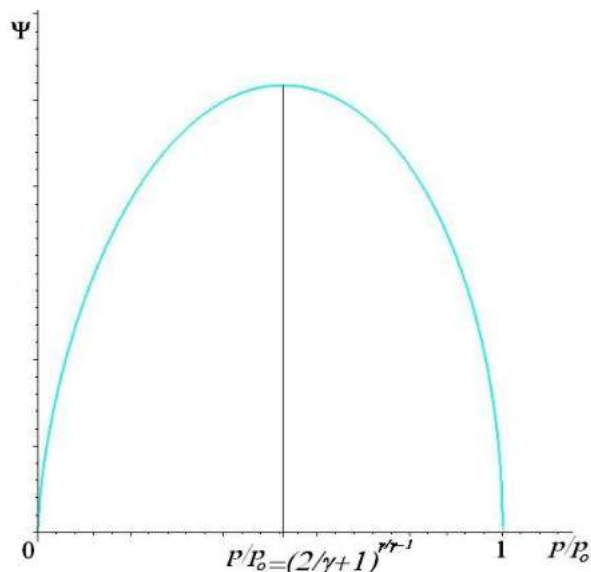


Fig. III-3 : Tracé de la fonction  $\Psi$ .

La pression correspondante est appelée pression critique et s'écrit :

$$\frac{p^*}{p_0} = \left( \frac{2}{\gamma + 1} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}}$$

elle s'obtiendra au col d'après la théorie d'Hugoniot, et le débit massique maximal sera :

$$\begin{aligned} \dot{m}_{\max} &= \rho_0 A V_{\max} \left( \frac{2}{\gamma + 1} \right)^{\frac{1}{\gamma - 1}} \sqrt{1 - \frac{2}{\gamma + 1}} \\ \Rightarrow \dot{m}_{\max} &= \rho_0 A \left( \frac{2}{\gamma + 1} \right)^{\frac{1}{\gamma - 1}} \sqrt{\frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}} \end{aligned} \quad \text{III-7a}$$

Aussi au col on a :  $a^* = V^*$  où :

$$V^* = a^* = a_0 \sqrt{\frac{2}{\gamma + 1}}$$

Et le débit massique critique sera:

$$\begin{aligned} \dot{m}_{\max} &= \rho^* A^* V^* \\ \Rightarrow \dot{m}_{\max} &= A^* \rho_0 a_0 \left( \frac{2}{\gamma + 1} \right)^{\frac{\gamma + 1}{2(\gamma - 1)}} \end{aligned} \quad \text{III-7b}$$

Cette expression donne le débit massique maximum au col de la tuyère, où règne les conditions critiques. Pour  $\gamma = 1.4$  on a :

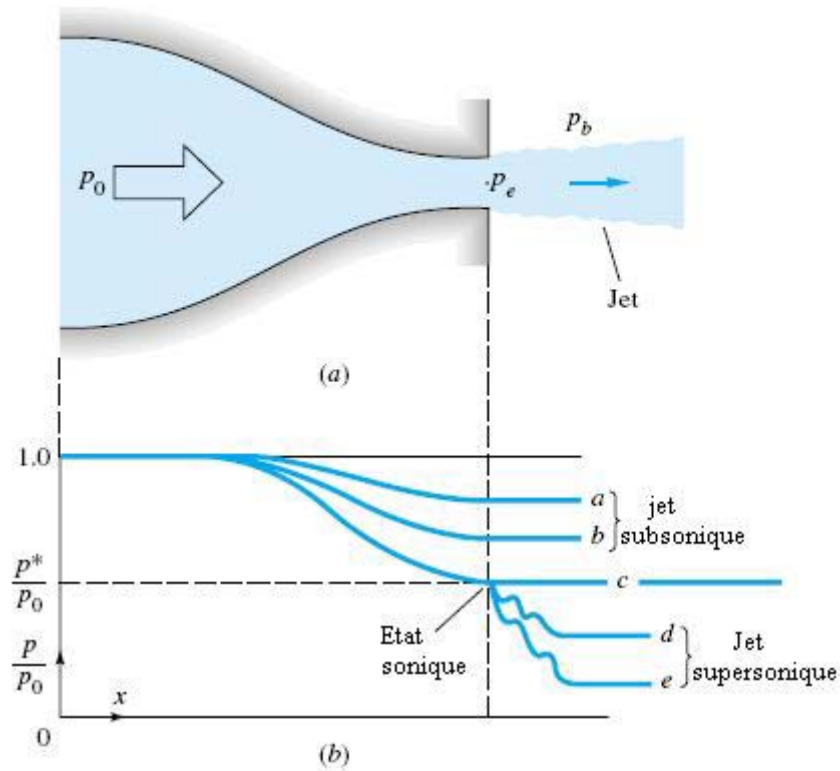
$$\dot{m}_{\max} = 0.685 \cdot A^* \rho_0 a_0$$

### III-3 Tuyère convergente :

Un gaz de pression  $p_0$ , densité  $\rho_0$  et de température  $T_0$  s'écoule isentropiquement depuis un réservoir de grandes dimensions ( $V_0 \approx 0$ ) à travers une tuyère convergente (figure III-4a) vers un compartiment de décharge où règne la pression en aval  $p_b$  inférieure à  $p_0$ . Adoptons que la pression et la vitesse de sortie  $p_e$  et  $V$ , d'après la formule de Saint Venant :

$$V = \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma - 1} \frac{p_0}{\rho_0} \left[ 1 - \left( \frac{p_e}{p_0} \right)^{\frac{\gamma - 1}{\gamma}} \right]}$$

et  $\dot{m} = \rho VA$  on étudie les différents états de l'écoulement dans la tuyère convergente en changeant la pression en aval  $p_b$  à diverses valeurs modérées.



SAHLA MAHLA

المصدر الأول للطالب الجزائري



Fig. III-4 : Tuyère convergente : (a) Géométrie et pressions caractéristiques de la tuyère ; (b) distribution des pressions causée par divers pressions aval  $p_b$  ; (c) débit massique.

☆ Si on considère des valeurs de  $p_b$  comme dans le cas  $a$  et  $b$  (figure III-4b), la pression au col est supérieure à la pression critique  $p^*$ . L'écoulement au sein de la tuyère convergente est subsonique et jet sort à la pression  $p_e = p_b$ . Le débit massique de l'écoulement isentropique subsonique est inférieur à la valeur critique  $\dot{m}_{max}$  (figure III-4c).

- ☆ Si la pression  $p_b$  est égale à  $p^*$  (le cas  $c$ ) au col. L'écoulement au col sera sonique, et le jet aussi ( $p_e = p_b$ ), et le débit massique de l'écoulement sera maximal. L'écoulement en amont du col est subsonique.
- ☆ Finalement, si  $p_b$  est diminuée au dessus de  $p^*$ , comme les cas  $d$  et  $e$ , la tuyère ne peut répondre plus puisqu'elle est suffoquée à sa valeur maximum du débit massique. Le col reste sonique avec  $p_e = p^*$ , et la distribution de la pression dans la tuyère est la même que celle dans le cas  $c$ . le jet s'étend de façon supersonique en réduisant sa pression de sa valeur critique  $p^*$  (au col) à la pression  $p_b$ . Mathématiquement parlant, le débit massique donné par l'équation (III-6) voit sa valeur se réduit dans les cas  $d$  et  $e$ ; mais ceci n'est pas vrai physiquement, en raison de la violation de la condition de l'écoulement isentropique autour d'elle s'appuie le théorie, l'écoulement sera non-isentropique à cause des ondes de choc qui apparaissent en rendant le phénomène irréversible.

### III-4 Tuyère convergente-divergente :

Une tuyère convergente-divergente (aussi appelée tuyère de Laval) est représentée dans la figure (III-5a). Si la pression en aval  $p_b$  est suffisamment faible, il existera un écoulement supersonique dans la portion divergente de la tuyère aussi qu'une variété de conditions de choc pourra exister.

- ☆ Pour les cas A et B (figure III-5b), la pression  $p_b$  n'est pas suffisamment faible pour induire un écoulement sonique au col, et l'écoulement est subsonique à travers l'ensemble de la tuyère (convergente-divergente). La distribution de pression est calculée d'après les relations isentropiques déjà établies. La pression de sortie est  $p_e = p_b$  et le jet est subsonique.

- ☆ Pour le cas C, le rapport des sections  $\frac{A_e}{A_{col}}$  est exactement égal à  $\frac{A_e}{A^*}$  pour un nombre de

Mach subsonique à la sortie. Le col devient sonique, et le débit massique atteint son maximum (figure III-5c). l'écoulement dans le reste de la tuyère est subsonique, le jet inclus et  $p_e = p_b$ .

- ☆ Cette fois considérons le cas H. ici  $p_b$  est tel que  $\frac{p_b}{p_0}$  correspond exactement au rapport

$\frac{A_e}{A^*}$  d'un nombre de Mach supersonique à la sortie. L'écoulement dans le divergent est

entièrement supersonique, y compris le jet et  $p_e = p_b$ .

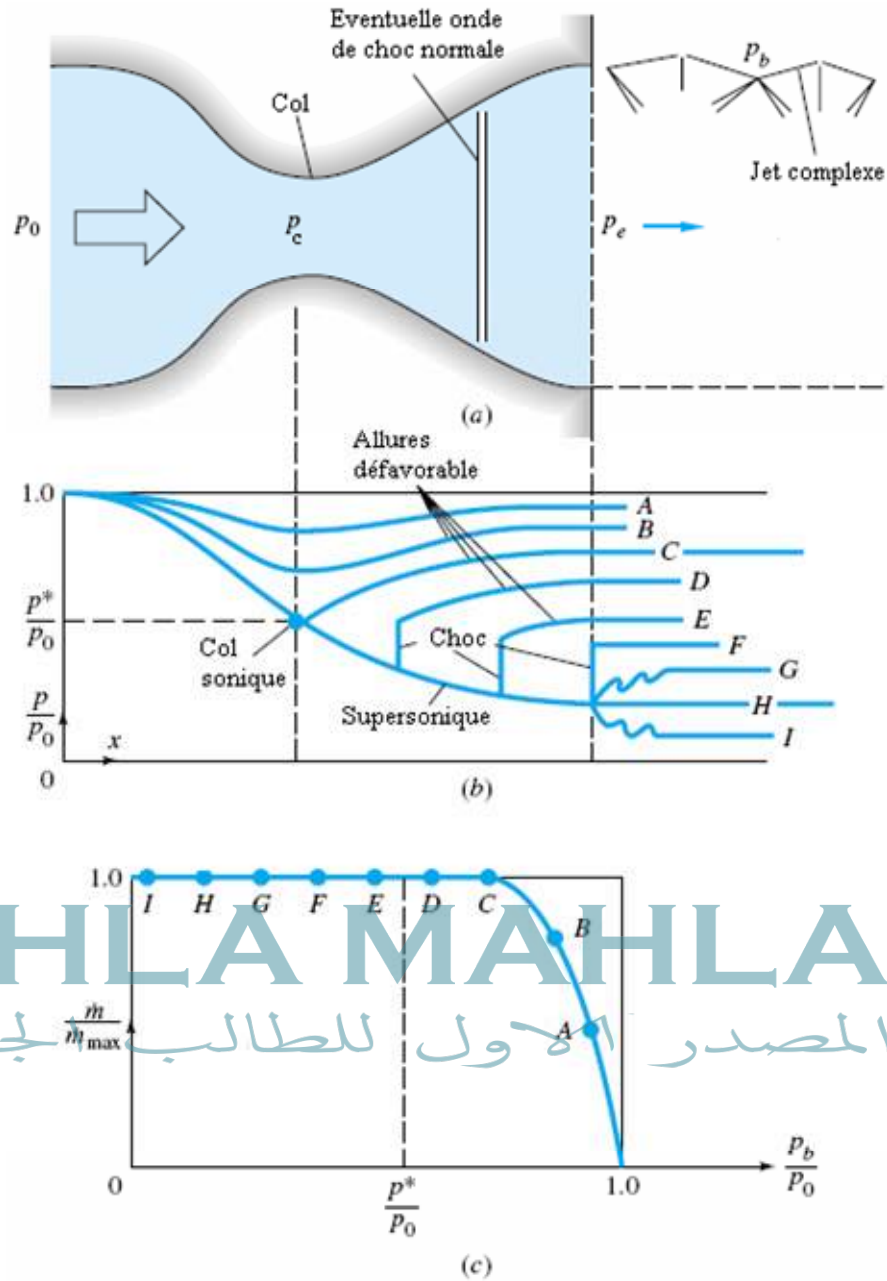


Fig. III-5 : Tuyère convergente-divergente : (a) Géométrie de la tuyère et configurations possibles; (b) distribution des pressions causée par divers pressions aval  $p_b$  ; (c) débit massique.

- ☆ Supposons dans ce cas que  $p_b$  se trouve entre les cas C et H, qui est impossible d'après les relations de l'écoulement isentropique. Alors, les pressions  $p_b$  des cas D à F ont lieu (figure III-5b). le col reste suffoqué à la valeur sonique. Le débit massique garde sa valeur maximale (figure III-5c). A la pression en aval du cas F l'onde de choc normale apparaîtra à la sortie de la tuyère. Dans le cas G, l'écoulement présentera des séries complexes d'ondes de choc obliques jusqu'il atteint la pression  $p_b$ .

☆ Finalement dans le cas I,  $p_b$  est inférieure à celle du cas H, mais la tuyère est suffoquée et ne répond plus. L'écoulement à la sortie s'étend en de complexes séries d'ondes supersoniques.

**III-5 Equation du rapport des sections :**

En utilisant les relations de l'écoulement isentropique du gaz parfait et l'équation de continuité on peut tirer une expression faisant intervenir seulement la section  $A$  et le nombre de Mach. Puisque le débit massique est conservé sous les conditions soniques :

$$\rho V A = \rho^* V^* A^*$$

Ou 
$$\frac{A}{A^*} = \frac{\rho^* V^*}{\rho V}$$
 III-8

Les termes à droite sont des fonctions du nombre de Mach pour l'écoulement isentropique on a d'après les relations isentropiques déjà rencontrées dans le chapitre précédent :

$$\frac{\rho^*}{\rho} = \frac{\rho^*}{\rho_0} \frac{\rho_0}{\rho} = \left[ \frac{2}{\gamma+1} \left( 1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right) \right]^{\frac{1}{\gamma-1}}$$

Aussi des équations exprimant les diverses températures ( $T_0$ ,  $T$  et  $T^*$ ) on aura :

$$\frac{V^*}{V} = \frac{(\gamma R T^*)^{\frac{1}{2}}}{(\gamma R T)^{\frac{1}{2}}} = \frac{(\gamma R T)^{\frac{1}{2}}}{(\gamma R T)^{\frac{1}{2}}} \left( \frac{T^*}{T} \right)^{\frac{1}{2}} \left( \frac{T_0}{T} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow \frac{V^*}{V} = \frac{1}{M} \left[ \frac{2}{\gamma+1} \left( 1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right) \right]^{\frac{1}{2}}$$

III-9

Combinons les équations (III-8 et III-9) :

$$\frac{A}{A^*} = \frac{1}{M} \left[ \frac{\left( 1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}}{\left( \frac{\gamma+1}{2} \right)} \right]$$
III-10

Le graphe de cette expression pour un écoulement ( $\gamma = 1.4$ ) monodimensionnel et isentropique sans ondes de choc dans la tuyère (figure III-6), montre que la section d'un écoulement isentropique dans une tuyère convergente divergente est la section sonique ou critique( le col). Dans divers écoulements, un col sonique n'est plus présent est l'écoulement dans la tuyère est entièrement subsonique, ou moins fréquemment supersonique.

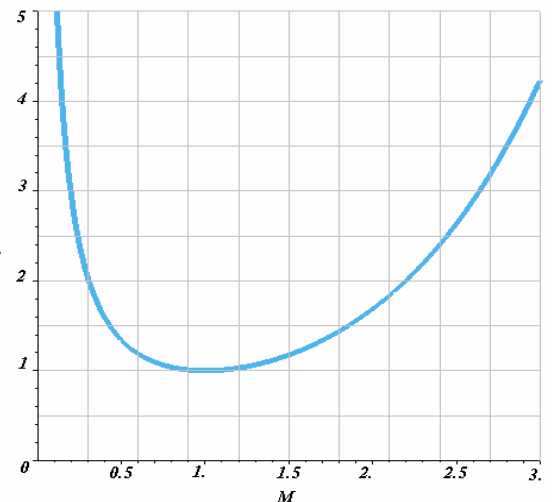


Fig. III-6 : L'équation (III-10) pour  $\gamma = 1.4$

## CHAPITRE IV

### IV-1 Ondes de choc normales :

Un phénomène irréversible commun aura lieu dans les écoulements supersoniques que ces soient internes ou externes, qui est l'onde de choc normale. C'est une très mince onde (d'épaisseur de quelques microns) de discontinuité dans les propriétés de l'écoulement.

Puisque l'état du gaz change adiabatiquement, une augmentation de la température statique s'accompagne d'une augmentation de la pression (figure IV-1a), la face arrière de l'onde de compression ayant une température plus grande, se propage plus rapidement que la face frontale de l'onde (figure IV-1b), ces deux faces de l'onde se combinent en une mince discontinuité de la pression. Les ondes de choc sont associées avec nécessairement d'une augmentation de la pression et pas d'une réduction.

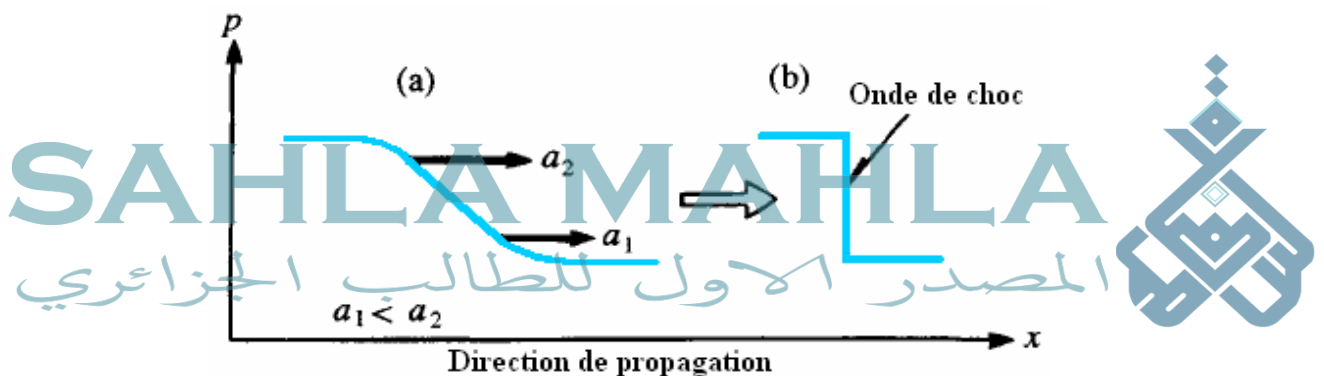


Fig. IV-1 : Propagation d'une onde de compression

Puisque une onde de choc est essentiellement différente d'une onde sonore à cause de l'intense changement de la pression, la vitesse de propagation du choc est plus élevée que celle du son, et la hausse de la pression l'est aussi.

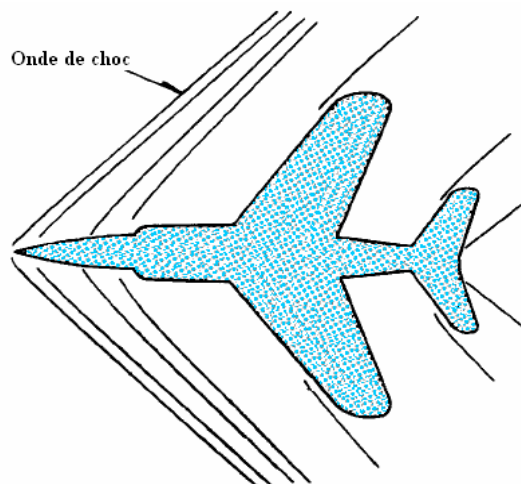


Fig. IV-2 : Avion à réaction volant à vitesse supersonique.

Les ondes de choc se remarquent par exemple après une explosion, l'éjection des gaz brûlés à travers une tuyère d'échappement ou quand un avion ou une projectile vole à une vitesse supersonique (figures IV-2, IV-3)

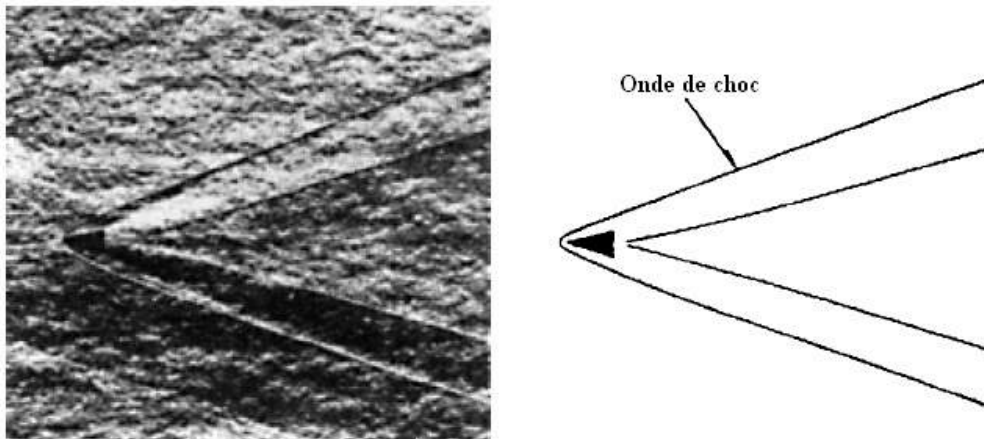


Fig. IV-3: Cône volant à une vitesse supersonique(Mach 3) dans l'air (Schlieren method).

**IV-2 Equations de base :**

L'analyse des ondes de choc se base sur le concept d'une onde fixe de pression (figure IV-4). Les états amont et aval de l'onde de choc sont désignés par les indices 1 et 2 respectivement.

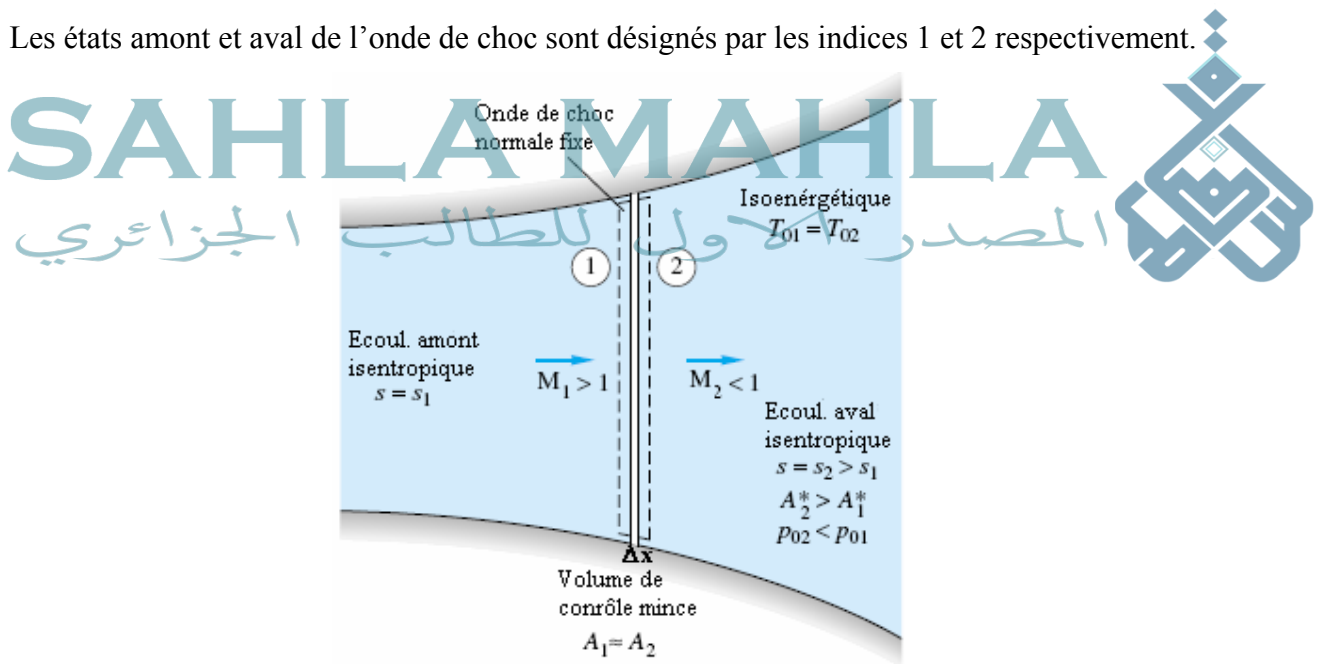


Fig. IV-4: Ecoulement à travers d'une onde de choc normale fixe.

L'épaisseur d'une onde de choc  $\Delta x$  est tellement petite (approximativement des microns), qu'elle soit supposée n'ayant aucun changement de section (dans une conduite à section variable), donc  $A_1 \approx A_2$  et l'équation de continuité s'écrit :

$$\rho_1 V_1 = \rho_2 V_2 = Const \tag{IV-1a}$$



L'équation de quantité de mouvement est :

$$p_1 - p_2 = \rho_2 V_2^2 - \rho_1 V_1^2 \quad \text{IV-1b}$$

L'équation de l'énergie :

$$h_1 + \frac{1}{2} V_1^2 = h_2 + \frac{1}{2} V_2^2 = h_0 = \text{Const} \quad \text{IV-1c}$$

Les relations d'un gaz parfait :

$$\frac{p_1}{\rho_1 T_1} = \frac{p_2}{\rho_2 T_2} \quad \text{IV-1d}$$

Et :  $h = c_p T \quad ; \quad \gamma = \text{Const} \quad \text{IV-1e}$

En supposant que les conditions en amont ( $p_1, V_1, \rho_1, h_1, T_1$ ) sont connues, les équations précédentes (équations IV-1) présentent 5 relations algébriques à 5 inconnues ( $p_2, V_2, \rho_2, h_2, T_2$ ). Les termes carrés de la vitesse nous révèlent l'existence de deux solutions, la correcte parmi elles est déterminée d'après le second principe de la thermodynamique, qui exige  $s_2 > s_1$ .

En éliminant les vitesses  $V_1$  et  $V_2$  des équations (IV-1a à -1c), on obtient la relation de Rankine-Hugoniot :

$$h_2 - h_1 = \frac{1}{2} (p_2 - p_1) \left( \frac{1}{\rho_2} + \frac{1}{\rho_1} \right) \quad \text{IV-2}$$

Mais puisque pour un gaz parfait :  $h = c_p T = \frac{\gamma p}{(\gamma - 1)\rho}$ , l'équation (IV-2) se réécrit :

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{1 + \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \left( \frac{p_2}{p_1} \right)}{\frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} + \left( \frac{p_2}{p_1} \right)} = \frac{V_1}{V_2} \quad \text{IV-3}$$

Ou bien : 
$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{1 - \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \left( \frac{\rho_2}{\rho_1} \right)}{\left( \frac{\rho_2}{\rho_1} \right) - \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}} \quad \text{IV-4}$$

Aussi pour un gaz parfait :  $\frac{\rho_1 V_1^2}{p_1} = \frac{\gamma V_1^2}{(\gamma R T_1)} = \gamma M_1^2$ , et l'équation (IV-4) sera :

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{1}{\gamma + 1} [2\gamma M_1^2 - (\gamma - 1)] \quad \text{IV-5}$$

De cette dernière équation on peut remarquer que pour un  $\gamma$  quelconque ;  $p_2 > p_1$  seulement si  $M_1 > 1.0$ . Ainsi pour un écoulement avec onde de choc normale, le nombre de Mach amont doit être supersonique pour satisfaire le second principe de la thermodynamique.

Aussi pour le gaz parfait on a l'identité  $\rho V^2 = \gamma p M^2$ , et on peut réécrire l'équation (IV-1b) comme :

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{1 + \gamma M_1^2}{1 + \gamma M_2^2} \quad \text{IV-6}$$

Et le nombre de Mach en aval sera après combinaisons des équations (IV-5 et IV-6) :

$$M_2^2 = \frac{(\gamma - 1)M_1^2 + 2}{2\gamma M_1^2 - (\gamma - 1)} \quad \text{IV-7}$$

Mais comme  $M_1$  doit être supersonique, cette équation prédit pour tout  $\gamma > 1$  que  $M_2$  doit être subsonique. Ainsi une onde de choc normale décélère un écoulement presque d'une façon discontinue des conditions supersoniques aux conditions subsoniques.

D'autres manipulations des équations (IV-1) donnent des relations additionnelles décrivant les changements des propriétés à travers d'une onde de choc normale au sein d'un gaz parfait :

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{(\gamma + 1)M_1^2}{(\gamma - 1)M_1^2 + 2} = \frac{V_1}{V_2}$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \left[ 2 + (\gamma - 1)M_1^2 \right] \frac{2\gamma M_1^2 - (\gamma - 1)}{(\gamma + 1)^2 M_1^2}$$

$$T_{01} = T_{02}$$

SAHILA MAHLA

المصدر كقول كقول

$$\frac{p_{02}}{p_{01}} = \frac{\rho_{02}}{\rho_{01}} = \left[ \frac{(\gamma + 1)M_1^2}{2 + (\gamma - 1)M_1^2} \right]^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}} \left[ \frac{\gamma + 1}{2\gamma M_1^2 - (\gamma - 1)} \right]^{\frac{1}{\gamma - 1}}$$



IV-8

D'un intérêt plus considérable, est le fait que la section critique (au col sonique)  $A^*$  d'une tuyère augmente à travers une onde de choc normale.

$$\frac{A_2^*}{A_1^*} = \frac{M_2}{M_1} \left[ \frac{2 + (\gamma - 1)M_1^2}{2 + (\gamma - 1)M_2^2} \right]^{\frac{\gamma + 1}{2(\gamma - 1)}} \quad \text{IV-9}$$

En conclusion, dans les ondes de choc les températures totales (de stagnation) restent les mêmes, mais les pressions et les densités totales diminuent avec le même ratio, c.-à-d.

l'écoulement à travers le choc est adiabatique mais non-isentropique. Ainsi les principes fondamentaux gouvernant les écoulements aux ondes de choc peuvent être récapitulés comme suit :

1. L'écoulement en amont est supersonique, et celui en aval est subsonique.
2. Pour les gaz parfaits (aussi que pour les fluides réels), seulement les ondes de compression peuvent exister.
3. l'entropie augmente à travers le choc.

4. Les ondes de choc faibles sont presque isentropiques.

L'analyse des ondes de choc normales fixes s'applique également aux ondes de choc en mouvement.

### IV-3 Equation de Prandtl :

En considérons l'équation de l'énergie (IV-1c), on a pour un gaz parfait :

$$\frac{\gamma R}{\gamma-1} T_1 + \frac{1}{2} V_1^2 = \frac{\gamma R}{\gamma-1} T_2 + \frac{1}{2} V_2^2 = \frac{\gamma R}{\gamma-1} T_0$$

Introduisons la vitesse du son critique  $a^{*2} = \frac{2\gamma R T_0}{\gamma+1}$  :

$$\begin{cases} \frac{\gamma}{\gamma-1} p_1 + \frac{1}{2} \rho_1 V_1^2 = \frac{\rho_1}{2} \frac{\gamma+1}{\gamma-1} a^{*2} \\ \frac{\gamma}{\gamma-1} p_2 + \frac{1}{2} \rho_2 V_2^2 = \frac{\rho_2}{2} \frac{\gamma+1}{\gamma-1} a^{*2} \end{cases}$$

Soustrayons ces deux équations, on obtient :

$$\frac{\gamma}{\gamma-1} (p_1 - p_2) + \frac{1}{2} (\rho_1 V_1^2 - \rho_2 V_2^2) = \frac{(\rho_1 - \rho_2)}{2} \frac{\gamma+1}{\gamma-1} a^{*2}$$

Mais, d'après l'équation de quantité de mouvement (équ. IV-1b):

$$(\rho_1 V_1^2 - \rho_2 V_2^2) = (\rho_2 - \rho_1) a^{*2}$$

Finalement, en utilisant l'équation de continuité (équ. IV-1a) :

$$V_1 V_2 = a^{*2}$$

IV-10

Cette équation dite de Prandtl permet de calculer la vitesse en aval de l'onde de choc normale, en connaissant les conditions en amont du choc.

### IV-4 Changement d'entropie à travers un choc :

La variation de l'entropie à travers le choc peut être calculée selon la relation du gaz parfait :

$$\frac{s_2 - s_1}{R} = \frac{\Delta s}{R} = \ln \left[ \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \left( \frac{\rho_1}{\rho_2} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \right] \quad \text{IV-11}$$

En supposant que l'intensité de l'onde de choc  $\frac{p_2}{p_1}$  est connue, on peut calculer le rapport

des densités de l'équation (IV-3) et par suite calculer le changement d'entropie  $\Delta s$ .

# CHAPITRE V

## V-1 Les ondes de choc obliques :

Les ondes de choc peuvent se former à angle oblique  $\sigma$  par rapport au courant supersonique. Ce type d'ondes dévie le courant d'un angle  $\delta$  (angle de déflexion), contrairement aux ondes de choc normales, pour lesquelles l'écoulement aval ne change plus sa direction.

Un choc oblique est causé essentiellement par la nécessité d'un écoulement de tourner selon un certain angle. Exemples des chocs obliques est l'écoulement à travers un coin d'extrémité d'un corps et à travers un rampe dans la paroi d'un tunnel supersonique.

La géométrie de l'écoulement considéré est illustrée dans la figure (V-1). Comme dans le chapitre précédent des ondes de choc normales l'état 1 dénote les conditions en amont et l'état 2 dénote celles en aval.

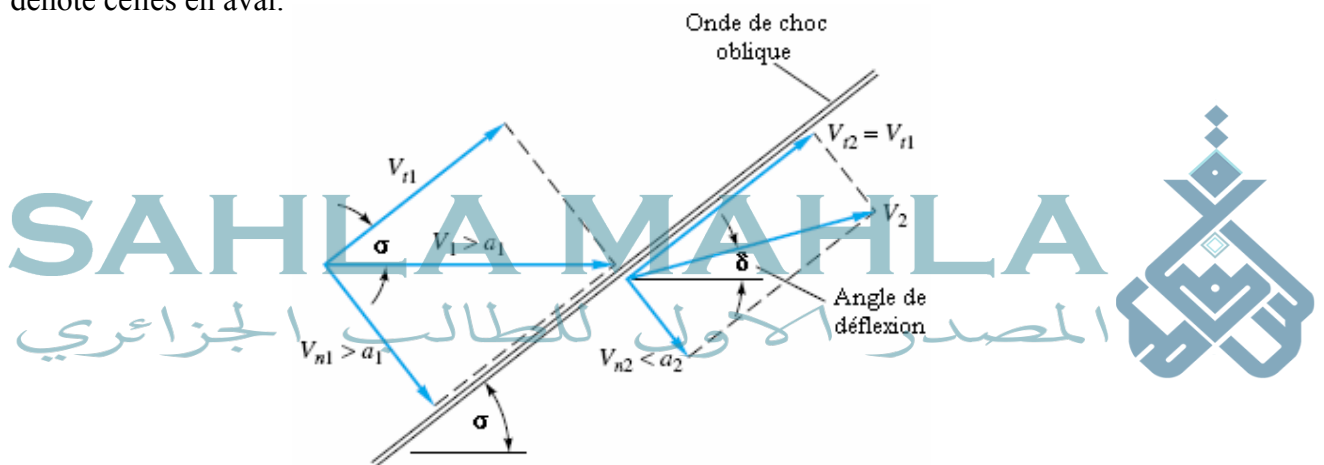


Fig. V-1 : Géométrie d'un écoulement à onde de choc oblique.

L'angle de choc a une valeur arbitraire  $\sigma$ , et l'écoulement en aval  $V_2$  change de direction d'un angle  $\delta$  qui est fonction de  $\sigma$  et les conditions de l'état 1. L'écoulement amont est toujours supersonique, mais le nombre de Mach  $M_2 = V_2 / a_2$  peut être subsonique, sonique ou supersonique tout dépend des conditions de l'écoulement.

## V-2 Equations de base :

Il est avantageux d'analyser l'écoulement à choc oblique en lui décomposant en deux composantes normale et tangentielle par rapport à l'onde, (voir figure V-1). Pour un volume de contrôle très mince, on peut écrire les relations suivantes, sachant que  $A_1 = A_2$  de part et d'autre de l'onde :

L'équation de continuité est :  $\rho_1 V_{n1} = \rho_2 V_{n2}$  V-1a

La projection normale de l'équation de quantité de mouvement est :

$$p_1 - p_2 = \rho_2 V_{n2}^2 - \rho_1 V_{n1}^2 \quad \text{V-1b}$$

La projection tangentielle de l'équation de quantité de mouvement est :

$$\rho_1 V_{n1} (V_{t2} - V_{t1}) = 0 \quad \text{V-1c}$$

L'équation de l'énergie :

$$h_1 + \frac{1}{2} V_{n1}^2 + \frac{1}{2} V_{t1}^2 = h_2 + \frac{1}{2} V_{n2}^2 + \frac{1}{2} V_{t2}^2 = h_0 \quad \text{V-1d}$$

D'après l'équation (V-1c) on peut déduire qu'il y'en a pas de variation de la vitesse tangentielle à travers un choc oblique :

$$V_{t2} = V_{t1} = V_t = \text{Const} \quad \text{V-2}$$

Par suite la composante tangentielle de la vitesse a le seul effet d'ajouter une énergie cinétique constante  $\frac{1}{2} V_t^2$  aux deux membres de l'équation de l'énergie (V-1d). Donc, les ondes de choc

normales avec  $V_1$  et  $V_2$  remplacées par les composantes normales  $V_{n1}$  et  $V_{n2}$ , ce qui entraîne

l'apparition des nombres de Mach normaux aux lieu de  $M_1$  et  $M_2$  :

$$\left. \begin{aligned} M_{n1} &= \frac{V_{n1}}{a_1} = M_1 \sin \sigma \\ M_{n2} &= \frac{V_{n2}}{a_2} = M_2 \sin (\sigma - \delta) \end{aligned} \right\} \quad \text{V-3}$$

Pour un gaz parfait ( $\gamma = \text{Const}$ ), et avec  $M_1$  remplacé par  $M_{n1}$  :

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{1}{\gamma + 1} \left[ 2\gamma M_1^2 \sin^2 \sigma - (\gamma - 1) \right] \quad \text{V-4a}$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{\tan \sigma}{\tan(\sigma - \delta)} = \frac{(\gamma + 1) M_1^2 \sin^2 \sigma}{(\gamma - 1) M_1^2 \sin^2 \sigma + 2} = \frac{V_{n1}}{V_{n2}} \quad \text{V-4b}$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \left[ 2 + (\gamma - 1) M_1^2 \sin^2 \sigma \right] \frac{2\gamma M_1^2 \sin^2 \sigma - (\gamma - 1)}{(\gamma + 1)^2 M_1^2 \sin^2 \sigma} \quad \text{V-4c}$$

$$T_{01} = T_{02} \quad \text{V-4d}$$

$$\frac{p_{02}}{p_{01}} = \left[ \frac{(\gamma + 1) M_1^2 \sin^2 \sigma}{2 + (\gamma - 1) M_1^2 \sin^2 \sigma} \right]^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}} \left[ \frac{\gamma + 1}{2\gamma M_1^2 \sin^2 \sigma - (\gamma - 1)} \right]^{\frac{1}{\gamma - 1}} \quad \text{V-4e}$$

$$M_{n2}^2 = \frac{(\gamma - 1) M_{n1}^2 + 2}{2\gamma M_{n1}^2 - (\gamma - 1)} \quad \text{V-4f}$$

Toutes ces dernières équations sont tabulées dans la table de l'onde de choc normale. Il est clair maintenant que la table est aussi valable pour les ondes de choc obliques.

### V-3 Equation de Prandtl :

En considérons l'équation de l'énergie (V-1d), on a pour un gaz parfait :

$$\frac{\gamma R}{\gamma - 1} T_1 + \frac{(V_{n1}^2 + V_{t1}^2)}{2} = \frac{\gamma R}{\gamma - 1} T_2 + \frac{(V_{n2}^2 + V_{t2}^2)}{2} = \frac{\gamma R}{\gamma - 1} T_0$$

Introduisons la vitesse du son critique  $a^{*2} = \frac{2\gamma RT_0}{\gamma + 1}$  pour un gaz parfait :

$$\begin{cases} \frac{\gamma}{\gamma - 1} p_1 + \rho_1 \frac{(V_{n1}^2 + V_{t1}^2)}{2} = \frac{\rho_1 \gamma + 1}{2 \gamma - 1} a^{*2} \\ \frac{\gamma}{\gamma - 1} p_2 + \rho_2 \frac{(V_{n2}^2 + V_{t2}^2)}{2} = \frac{\rho_2 \gamma + 1}{2 \gamma - 1} a^{*2} \end{cases}$$

Soustrayons ces deux équations, on obtient :

$$\frac{\gamma}{\gamma - 1} (p_1 - p_2) + \frac{1}{2} (\rho_1 (V_{n1}^2 + V_{t1}^2) - \rho_2 (V_{n2}^2 + V_{t2}^2)) = \frac{(\rho_1 - \rho_2) \gamma + 1}{2 \gamma - 1} a^{*2}$$

Mais, les projections de l'équation de quantité de mouvement (V-1b et V-1c):

$$(\rho_2 V_{n2}^2 - \rho_1 V_{n1}^2) \left[ \frac{\gamma + 1}{2(\gamma - 1)} \right] = \frac{(\rho_2 - \rho_1)}{2} \left[ \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} a^{*2} - V_t^2 \right]$$

Finalement, en utilisant l'équation de continuité (équ. V-1a) :

$$V_{n1} V_{n2} = a^{*2} - \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} V_t^2$$

V-5

C'est la relation de Prandtl pour un choc oblique.

Pour un choc normal ; avec  $V_t = 0$ , l'équation précédente prend la forme  $V_1 V_2 = a^{*2}$  déjà rencontrée dans le chapitre précédent.

Une autre forme utile de l'équation (V-5) est :

$$\frac{p_2 - p_1}{\rho_2 - \rho_1} = a^{*2} - \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} V_t^2$$

V-6

### V-4 Adaptations des tables du choc normal aux chocs obliques :

Les tables (II) représentant les relations des chocs normaux peuvent être adaptées aux calculs des ondes de choc obliques. Une onde de choc oblique avec un nombre de Mach amont  $M_1$  peut, par une transformation appropriée, être réduite à une onde de choc normale avec un nombre de

Mach amont de  $M_1 \sin \sigma$ . Par conséquent, si  $M_x$  de la table est égal à  $M_1 \sin \sigma$ , donc  $\frac{p_y}{p_x}, \frac{T_y}{T_x},$

$\frac{\rho_y}{\rho_x}$  et  $\frac{p_{0y}}{p_{0x}}$  de la table sont respectivement les valeurs de  $\frac{p_2}{p_1}, \frac{T_2}{T_1}, \frac{\rho_2}{\rho_1}$  et  $\frac{p_{02}}{p_{01}}$  pour un choc

oblique de nombre de Mach amont  $M_1$  et d'angle de choc  $\sigma$ , et le nombre de Mach en aval

$$M_2 = M_1 / \sin(\sigma - \delta).$$

Une famille complète de solutions des ondes de choc obliques peut être tracée ou calculée d'après les équations (V-4). Pour un  $\gamma$  donné, l'angle de choc  $\sigma$  varie avec  $M_1$  et  $\delta$  de l'équation (V-4b). En utilisant une identité trigonométrique pour  $\tan(\sigma - \delta)$ , cela peut être réécrit de cette forme :

$$\tan \delta = \frac{2 \cot \sigma (M_1^2 \sin^2 \sigma - 1)}{M_1^2 (\gamma + \cos 2\sigma) + 2} \tag{V-7}$$

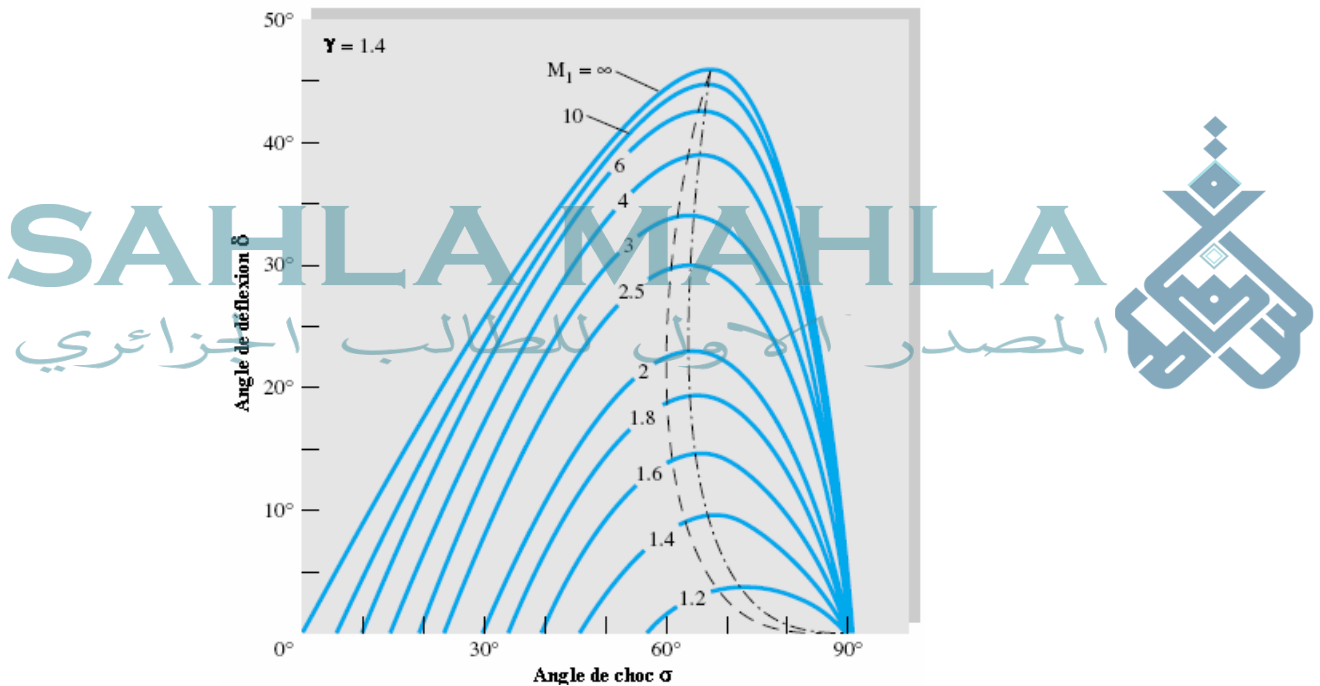


Fig. V-2 : Angles de déflexion du choc oblique en fonction de l'angle de choc pour divers nombre de Mach,  $\gamma = 1.4$ .

Toute les solutions possibles de l'équation (V-7) pour  $\gamma = 1.4$  sont tracées dans le graphe de la figure (V-2). Pour les déflexions où  $\delta < \delta_{max}$  il y'a deux solutions : un choc faible ( $\sigma$  petit) et un choc fort ( $\sigma$  grand). Touts les points le long de la ligne turet-pointillée sont le lieu géométrique de  $\delta_{max}$ . La ligne en tirets est ajoutée au graphique pour montrer où  $M_2$  est exactement sonique. On peut voir clairement que la région où l'écoulement en aval et subsonique est très étroite.

Pour les déflexions nulles ( $\delta = 0$ ), la famille de chocs faibles satisfait la relation :

$$\sigma = \beta = \arcsin \frac{1}{M} \tag{V-8}$$

Ainsi les chocs faibles de déflexions nulles sont équivalent aux ondes de Mach.

**V-5 Les ondes de choc faibles :**

Pour toute  $\delta$  finie, l'angle  $\sigma$  d'un choc faible est supérieur à l'angle de Mach  $\beta$ . Pour des petites  $\delta$  l'équation (V-7) peut être développée en série de puissances (développement de Taylor) en  $\tan \delta$  avec linéarisation de l'angle de choc :

$$\sin \sigma = \sin \beta + \frac{\gamma + 1}{4 \cos \beta} \tan \delta + \dots + O(\tan^2 \delta) + \dots \tag{V-9}$$

Si  $M_1$  se situe entre 1.4 et 20.0 et les déflexions sont inférieures à  $6^\circ$  cette relation prédit les valeurs de  $\sigma$  d'un degré ( $1^\circ$ ) près pour un choc faible. Pour les déflexions plus supérieures, la relation précédente (équ. V-9) peut être utilisée comme estimation initiale d'une solution itérative de l'équation (V-7).

Une autre propriété qui change à travers le choc oblique et qui peut être développée en série de puissance pour de petits angles de déflexion, est la pression. Selon l'équation (V-4a) et avec linéarisation :

$$\frac{p_2 - p_1}{p_1} = \frac{\gamma M_1^2}{(M_1^2 - 1)^{1/2}} \tan \delta + \dots + O(\tan^2 \delta) + \dots \tag{V-10}$$

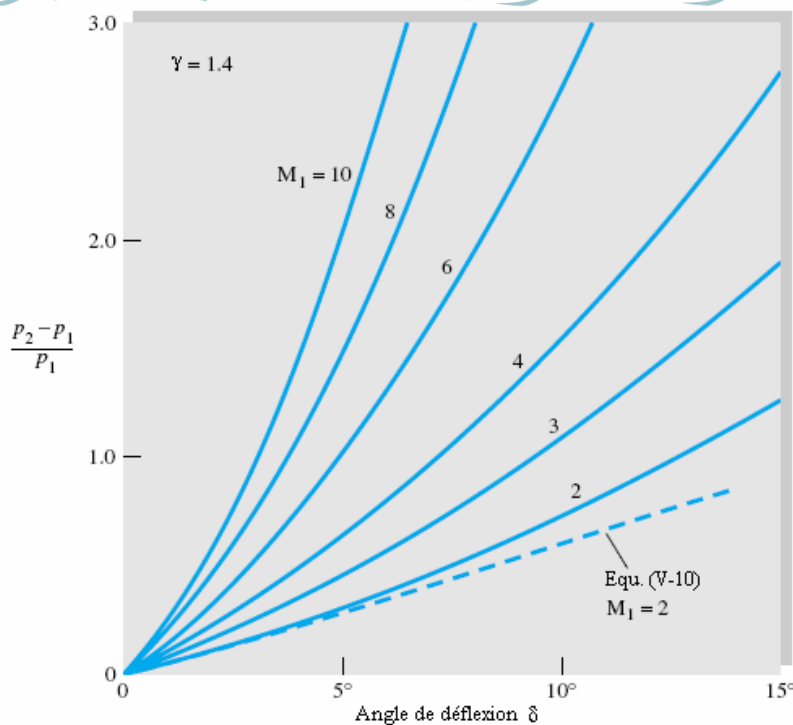


Fig. V-3 : Saut de pression à travers une onde de choc oblique faible avec des angles de déflexion très petits,  $\gamma = 1.4$ .



La figure (V-3) montre le saut de pression exact d'un choc faible calculé par (équ. V-4a). Aux petites déflexions les courbes sont linéaires avec des pentes données par l'équation (V-10).

Finalement, le changement d'entropie à travers le choc faible se développe en série de puissances, et on obtient :

$$\frac{s_2 - s_1}{R} = \frac{\gamma(\gamma + 1)M_1^2}{12(M_1^2 - 1)^{3/2}} \tan^3 \delta + \dots + O(\tan^4 \delta) + \dots \quad \text{V-11}$$

La variation de l'entropie est une puissance cubique de l'angle de déflexion  $\delta$ . Ainsi les ondes de choc faibles sont presque isentropiques.

**V-6 Ecoulement autour d'un coin :**

Considérons l'écoulement autour d'un dièdre saillant d'angle au sommet  $2\psi$ , dont l'arrête est perpendiculaire à la direction de l'écoulement.

- a) Si  $\psi$  est petit, le phénomène se réduit à un problème d'onde de choc oblique (fig. V-4a).
- b) A partir d'une certaine valeur maximale de  $\psi$  ou d'une valeur minimale de  $M_1$  qu'il est possible de calculer, l'onde se détache et le nombre de Mach aval  $M_2$  devient inférieur à 1 (fig. V-4b). le point critique correspond au minimum de  $M_1$  que présentent les courbes  $\psi = Const$  de la figure (V-4b). d'après les courbes on remarque que  $M_2$  devient subsonique un peu avant que l'onde se détache.
- c) Si l'obstacle est émoussé, le phénomène sera analogue mais l'onde se détache plutôt (fig. V-4c).

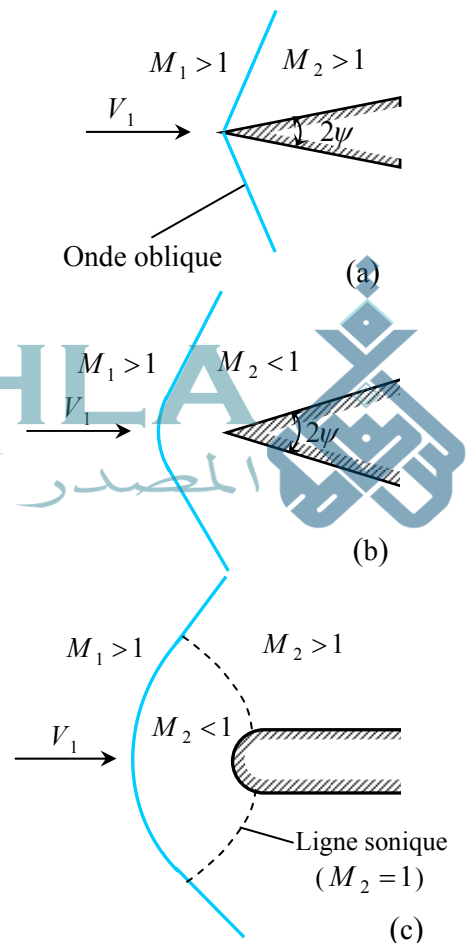


Fig. V-4 : Chocs au voisinage d'un coin.

**V-7 Réflexion et réfraction des ondes obliques :**

Quand un choc oblique rencontre une paroi il y a réflexion. Le choc réfléchi produit une déflexion en sens inverse, l'écoulement aval étant à nouveau parallèle à la paroi.

Chaque onde produit une diminution du nombre de mach et une augmentation de la pression. Les taux de compression des deux ondes sont différents ainsi que les rapports des nombres de Mach. La figure (V-5) représente schématiquement le phénomène ainsi que la variation de pression le long d'une ligne de courant et à la paroi.

Un phénomène analogue intervient quand il y a intersection d'ondes (fig. V-6) qui est accompagnée d'une réfraction. Cette réfraction est négligeable pour des ondes de faible intensité.

Quand il y a réflexion d'une onde de choc oblique sur la limite libre d'un jet il y a réflexion avec changement de signe.

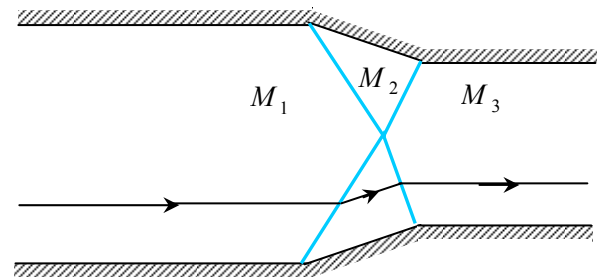
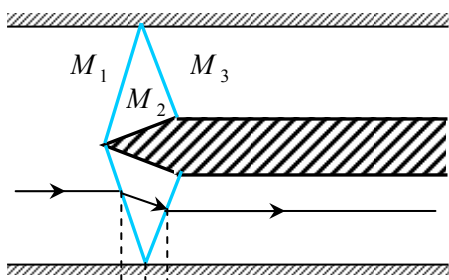


Fig. V-6 : Intersection des ondes de choc obliques.

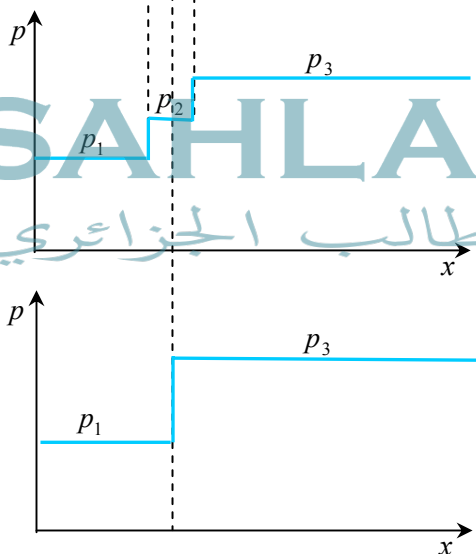


Fig. V-5 : Réflexion d'une onde de choc oblique.



# CHAPITRE VI

## VI-1 Ecoulement compressible dans les conduites avec friction (Théorie de FANNO) :

Le chapitre (III) a montré l'effet de changement de section sur un écoulement compressible en négligeant le transfert de chaleur et (le frottement) la friction. Nous pourrions maintenant ajouter la friction et le transfert de chaleur au changement de section et considérer les effets couplés, qui sont faits dans des textes avancés. Au lieu de cela, comme une introduction élémentaire, cette section traite seulement l'effet de la friction, en négligeant le changement de section et le transfert de chaleur. Les suppositions de base sont

1. Ecoulement unidimensionnel, stationnaire et adiabatique
2. Gaz parfait avec des chaleurs spécifiques constantes
3. Conduite à section droite constante
4. Travail mécanique et changements d'énergie potentielle négligeables
5. Contrainte de cisaillement pariétale corrélée par un facteur de friction de Darcy

En effet, nous étudions un problème de friction des tuyauteries de type Moody, mais avec de grands changements de l'énergie cinétique, l'enthalpie et la pression dans le courant fluide.

Considérons le volume de contrôle élémentaire de la conduite de section  $A$  et la longueur  $dx$  dans la figure (VI-1). La section est constante, mais d'autres propriétés de flux ( $p, \rho, T, h, V$ ) peuvent varier avec  $x$ .

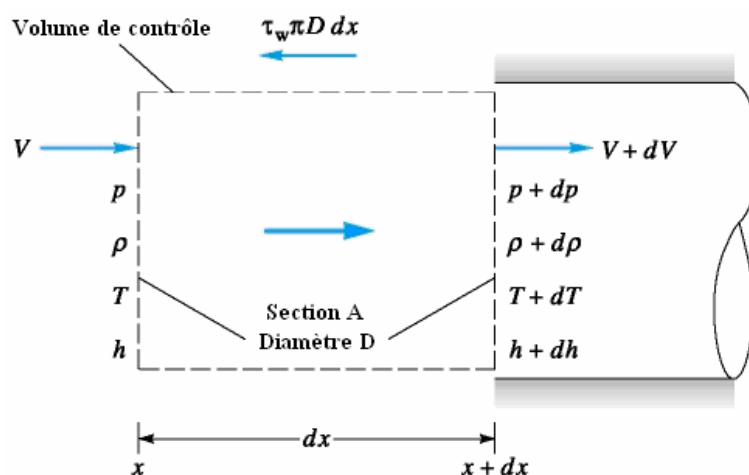


Fig. VI-1 : Volume de contrôle élémentaire pour un écoulement avec friction dans une conduite de section constante.

L'application des trois lois de conservation à ce volume de contrôle donne trois équations différentielles

Continuité : 
$$\rho V = \frac{\dot{m}}{A} = G = \text{const}$$

ou 
$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{dV}{V} = 0 \tag{VI-1a}$$

Quantité de mouvement suivant  $x$  : 
$$pA - (p + dp)A - \tau_w \pi D dx = \dot{m} (V + dV - V)$$

ou 
$$dp + \frac{4\tau_w dx}{D} + \rho V dV = 0 \tag{VI-1b}$$

Énergie : 
$$h + \frac{1}{2}V^2 = h_0 = c_p T_0 = c_p T + \frac{1}{2}V^2$$

ou 
$$c_p dT + V dV = 0 \tag{VI-1c}$$

Puisque ces trois équations ont cinq inconnues,  $p, \rho, T, V$  et  $\tau_w$  nous avons besoin de deux relations complémentaires. On est la loi des gaz parfaits

$$p = \rho RT \quad \text{ou} \quad \frac{dp}{p} = \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dT}{T} \tag{VI-2}$$

Pour éliminer  $\tau_w$  comme une inconnue, il est supposé que la contrainte de cisaillement à la paroi est corrélée par un coefficient de friction local de Darcy  $f$

$$\tau_w = \frac{1}{8} f \rho V^2 = \frac{1}{8} f \gamma p M^2 \tag{VI-3}$$

où la dernière forme obéit la relation de vitesse de son dans un gaz parfait  $a^2 = \gamma p / \rho$ . En pratique,  $f$  peut être relié au nombre de Reynolds local et la rugosité de la paroi par exemple par l'équation de Colebrook (appendice II), ou disons, le diagramme de Moody (voir références de la dynamique des fluides).

### VI-2 Relations de nombre de Mach :

Les équations (VI-1) et (VI-2) sont des équations différentielles du premier ordre et peuvent être intégrées, en employant des données du coefficient de frottement, partant de n'importe quelle section d'entrée 1, où on connaît  $p_1, T_1, V_1$  etc., pour déterminer  $p(x), T(x)$ , etc, le long de la conduite. Il est pratiquement impossible d'éliminer tous sauf une variable pour donner, disons, une équation différentielle simple pour  $p(x)$ , mais toutes les équations peut être écrite en termes du nombre de Mach  $M(x)$  et le coefficient de frottement, en employant la définition du nombre de Mach

$$V^2 = M^2 \gamma RT$$

ou 
$$\frac{2dV}{V} = \frac{2dM}{M} + \frac{dT}{T} \tag{VI-4}$$

En éliminant des variables entre les équations (VI-1 à VI-4), nous obtenons les relations de travail

$$\frac{dp}{p} = -\gamma M^2 \frac{1 + (\gamma - 1)M^2}{2(1 - M^2)} f \frac{dx}{D} \tag{VI-5a}$$

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{\gamma M^2}{2(1 - M^2)} f \frac{dx}{D} = -\frac{dV}{V} \tag{VI-5b}$$

$$\frac{dp_0}{p_0} = \frac{d\rho_0}{\rho_0} = -\frac{1}{2} \gamma M^2 f \frac{dx}{D} \tag{VI-5c}$$

$$\frac{dT}{T} = -\frac{\gamma(\gamma - 1)M^4}{2(1 - M^2)} f \frac{dx}{D} \tag{VI-5d}$$

$$\frac{dM^2}{M^2} = \gamma M^2 \frac{1 + \frac{1}{2}(\gamma - 1)M^2}{1 - M^2} f \frac{dx}{D} \tag{VI-5e}$$

Tous ceux sauf  $dp_0 / p_0$  ont le facteur  $1 - M^2$  dans le dénominateur, pour que, comme les formules de changement de section dans le chapitre (III), les écoulements subsonique et supersonique aient des effets opposés :

Propriété	Subsonique	Supersonique
$p$	Diminue	Augmente
$\rho$	Diminue	Augmente
$V$	Augmente	Diminue
$p_0, \rho_0$	Diminue	Diminue
$T$	Diminue	Augmente
$M$	Augmente	Diminue
Entropie	Augmente	Augmente

Nous avons ajouté à la liste au-dessus que l'entropie doit augmenter le long de la conduite pour l'écoulement soit subsonique ou bien supersonique comme une conséquence de la deuxième loi pour l'écoulement adiabatique. Pour la même raison, la pression et la densité de stagnation doivent toute les deux diminuer.

Le paramètre clef ci-dessus est le nombre de Mach. Si l'écoulement d'entrée est subsonique ou supersonique, le nombre de Mach de la conduite a toujours tendance en aval vers  $M = 1$ , parce que c'est le chemin le long duquel l'entropie augmente. Si la pression et la densité sont calculées des équations (VI-5a) et (VI-5b) et l'entropie de l'équation (IV-11), le résultat peut être tracé dans la figure (VI-2) en fonction du nombre de Mach pour  $\gamma = 1.4$ . L'entropie maximale aura lieu à  $M = 1$ , pour que la deuxième loi exige que les propriétés de l'écoulement dans la conduite s'approchent continuellement du point sonique. Puisque  $p_0$  et  $\rho_0$  diminuent continuellement le long de la conduite en raison des pertes par friction (non-isentropiques), ils ne sont pas utiles comme des propriétés de référence. Toutefois, les propriétés



soniques  $p^*, \rho^*, T^*, p_0^*$ , et  $\rho_0^*$  sont les quantités constantes de référence appropriées dans l'écoulement adiabatique dans les conduites. La théorie calcule alors les proportions  $p / p^*, T / T^*$ , etc., comme une fonction du nombre de Mach local et l'effet de friction intégré.

Pour tirer des formules pratiques, nous attaquons d'abord l'équation (VI-5e), qui relie le nombre de Mach à la friction. Séparons les variables et intégrons :

$$\int_0^{L^*} f \frac{dx}{D} = \int_{M^2}^{1.0} \frac{1 - M^2}{\gamma M^4 \left[ 1 + \frac{1}{2}(\gamma - 1)M^2 \right]} dM^2 \tag{VI-6}$$

La limite supérieure est le point sonique, s'il est en réalité ou pas atteint dans l'écoulement de la conduite. La limite inférieure est arbitrairement placée de la position  $x = 0$ , où le nombre de Mach est  $M$ . Le résultat de l'intégration est

$$\frac{\bar{f} L^*}{D} = \frac{1 - M^2}{\gamma M^2} + \frac{\gamma + 1}{2\gamma} \ln \frac{(\gamma + 1)M^2}{2 + (\gamma - 1)M^2} \tag{VI-7}$$

où  $\bar{f}$  est la valeur moyenne du coefficient de friction entre 0 et  $L^*$  (voir appendice II). En pratique, un  $f$  moyen est toujours supposé, et aucune tentative n'est faite pour représenter les légers changements du nombre de Reynolds le long de la conduite. Pour des conduites non circulaires,  $D$  est remplacé par le diamètre hydraulique  $D_h = (4 \times \text{section}) / \text{périmètre}$ .

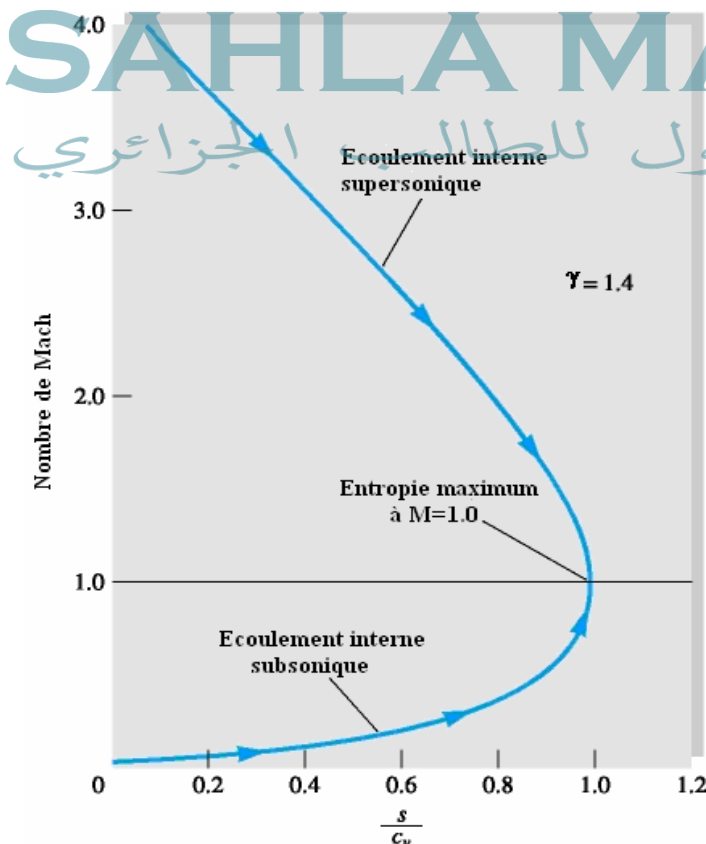


Fig. VI-2 : Écoulement adiabatique avec friction dans un conduit de section constante s'approche toujours de  $M=1$  pour satisfaire la seconde loi de la thermodynamique. La courbe calculée est indépendante de la valeur du coefficient de friction.

L'équation (VI-7) est tabulée en fonction du nombre de Mach dans la table (III). La longueur  $L^*$  est la longueur de conduite exigée pour développer un écoulement dans la conduite partant du nombre de Mach  $M$  jusqu'au point sonique. Beaucoup de problèmes impliquent les

conduites courtes qui ne deviennent jamais soniques, pour lequel la solution emploie les différences des longueurs "maximums", ou soniques tabulées. Par exemple, on donne la longueur  $\Delta L$  exigée pour se développer de  $M_1$  à  $M_2$  par

$$\bar{f} \frac{\Delta L}{D} = \left( \frac{\bar{f}L^*}{D} \right)_1 - \left( \frac{\bar{f}L^*}{D} \right)_2 \quad \text{VI-8}$$

Cela évite le besoin de tabulations séparées pour des conduites courtes.

Il est recommandé que le coefficient de friction  $\bar{f}$  soit estimé du diagramme de Moody pour le nombre de Reynolds moyen et le rapport de la rugosité pariétale du conduit.

### Exemple VI.1:

Un courant d'air s'écoule subsoniquement dans une conduite adiabatique de 2 cm de diamètre. Le coefficient de friction moyen est 0.024. Quelle est la longueur de conduite nécessaire d'accélérer l'écoulement fluide de  $M_1 = 0.1$  à  $M_2 = 0.5$  ? Quelle longueur complémentaire l'accélérera à  $M_3 = 1.0$  ? Supposez  $\gamma = 1.4$ .

### Solution :

L'équation (VI-8) s'applique, avec les valeurs de  $\bar{f}L^*/D$  calculées de l'équation (VI-7) ou lises de la table (III) :

$$\begin{aligned} \bar{f} \frac{\Delta L}{D} &= \frac{0.024 \Delta L}{0.02 m} = \left( \frac{\bar{f}L^*}{D} \right)_{M=0.1} - \left( \frac{\bar{f}L^*}{D} \right)_{M=0.5} \\ &= 66.9216 - 1.0691 = 65.8525 \\ \text{Ainsi} \quad \Delta L &= \frac{65.8525(0.02 m)}{0.024} = 55 m \end{aligned}$$

La longueur complémentaire  $\Delta L'$  pour aller de  $M = 0.5$  à  $M = 1.0$  est prise directement de la table (II)

$$\begin{aligned} f \frac{\Delta L'}{D} &= \left( \frac{fL^*}{D} \right)_{M=0.5} = 1.0691 \\ \Delta L' &= L_{M=0.5}^* = \frac{1.0691(0.02 m)}{0.024} = 0.9 m \end{aligned}$$

Ces calculs sont typiques : Il prend 55 m pour accélérer jusqu'à  $M = 0.5$  et ensuite seulement 0.9 m plus pour arriver entièrement jusqu'au point sonique.

Les formules pour d'autres propriétés de l'écoulement le long de la conduite peuvent être tirées des équations (VI-5). L'équation (VI-5e) peut être employée pour éliminer  $f dx / D$  de chacune des autres relations, étant donnée, par exemple,  $dp / p$  comme une fonction seulement de  $M$  et  $dM^2 / M^2$ . Pour la convenance dans la tabulation des résultats, chaque expression est alors intégrée entièrement de  $(p, M)$  au point sonique  $(p^*, 1.0)$ . Les résultats intégrés sont

$$\frac{p}{p^*} = \frac{1}{M} \left[ \frac{\gamma + 1}{2 + (\gamma - 1)M^2} \right]^{1/2} \quad \text{VI-9a}$$

$$\frac{\rho}{\rho^*} = \frac{V^*}{V} = \frac{1}{M} \left[ \frac{2 + (\gamma - 1)M^2}{\gamma + 1} \right]^{1/2} \quad \text{VI-9b}$$

$$\frac{T}{T^*} = \frac{a^2}{a^{*2}} = \frac{\gamma + 1}{2 + (\gamma - 1)M^2} \quad \text{VI-9c}$$

$$\frac{p_0}{p_0^*} = \frac{\rho_0}{\rho_0^*} = \frac{1}{M} \left[ \frac{2 + (\gamma - 1)M^2}{\gamma + 1} \right]^{(\gamma + 1)/(\gamma - 1)} \quad \text{VI-9d}$$

Toutes ces proportions sont aussi tabulées dans la table (III). Pour calculer les changements entre des points  $M_1$  et  $M_2$  qui ne sont pas soniques, les produits de ces proportions sont employés. Par

exemple, 
$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{p_2}{p^*} \frac{p^*}{p_1} \quad \text{VI-10}$$

puisque  $p^*$  est une valeur de référence constante pour l'écoulement.

**Exemple VI.2:**

Pour l'écoulement interne de l'exemple (VI.1) supposez que, à  $M_1 = 0.1$ , nous avons  $p_1 = 600 \text{ kPa}$  et  $T_1 = 450 \text{ K}$ . A la section 2 plus éloignée en aval,  $M_2 = 0.5$ . Calculez (a)  $p_2$ , (b)  $T_2$ , (c)  $V_2$  et (d)  $p_{02}$ .

**Solution :**

Comme information préliminaire nous pouvons calculer  $V_1$  et  $p_{01}$  des données :

$$V_1 = M_1 a_1 = 0.1 [(1.4)(287)(450)]^{1/2} = 0.1(425 \text{ m/s}) = 42.5 \text{ m/s}$$

$$p_{01} = p_1 (1 + 0.2 M_1^2)^{3.5} = (600 \text{ kPa}) [1 + 0.2(0.1)^2]^{3.5} = 604 \text{ kPa}$$

Entrez maintenant à la table (III) ou les équations (VI-9) pour trouver les rapports suivants

Section	$M$	$p / p^*$	$T / T^*$	$V / V^*$	$p_0 / p_0^*$
1	0.1	10.9435	1.1976	0.1094	5.8218
2	0.5	2.1381	1.1429	0.5345	1.3399

Employez ces proportions pour calculer toutes les propriétés en aval :

$$p_2 = p_1 \frac{p_2 / p^*}{p_1 / p^*} = (600 \text{ kPa}) \frac{2.1381}{10.9435} = 117 \text{ kPa}$$

$$T_2 = T_1 \frac{T_2 / T^*}{T_1 / T^*} = (450 \text{ K}) \frac{1.1429}{1.1976} = 429 \text{ K}$$

$$V_2 = V_1 \frac{V_2 / V^*}{V_1 / V^*} = (42.5 \text{ m/s}) \frac{0.5345}{0.1094} = 208 \text{ m/s}$$

$$p_{02} = p_{01} \frac{p_{02} / p_0^*}{p_{01} / p_0^*} = (604 \text{ kPa}) \frac{1.3399}{5.8218} = 139 \text{ kPa}$$



## CHAPITRE VII

### VII-1 Écoulement compressible dans les conduites avec transfert de chaleur et sans friction (Théorie de RAYLEIGH) :

L'addition ou l'enlèvement de chaleur ont un effet intéressant sur un écoulement compressible. Ici nous limitons l'analyse pour l'écoulement avec transfert de chaleur sans friction dans un conduit de section constante.

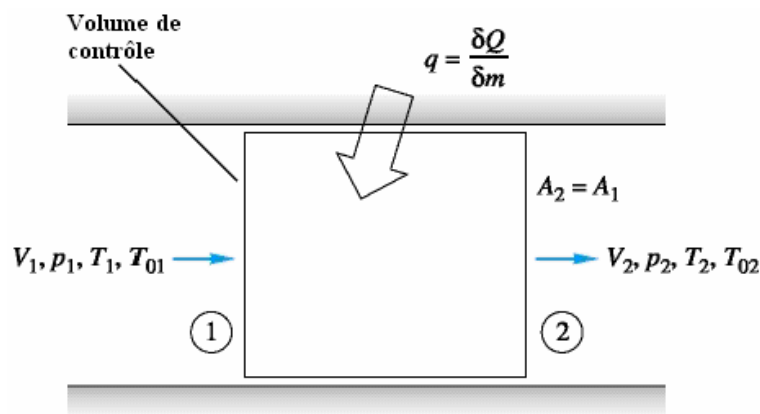


Fig. VII-1 : Volume de contrôle élémentaire pour un écoulement sans friction dans une conduite de section constante avec transfert de chaleur. La longueur de cet élément est indéterminée dans cette théorie.

Considérez le volume de contrôle élémentaire de la conduite dans la figure (VII-1). Entre des sections 1 et 2 une quantité de chaleur  $\delta Q$  est ajoutée (ou enlevée) à chaque masse élémentaire  $\delta m$  passant. Sans friction ou changement de section, les relations de conservation de volume de contrôle sont tout à fait simples :

$$\text{Continuité : } \rho V_1 = \rho_2 V_2 = G = \text{const} \quad \text{VII-1a}$$

$$\text{Quantité de mouvement suivant } x : \quad p_1 - p_2 = G(V_2 - V_1) \quad \text{VII-1b}$$

$$\text{Energie : } \dot{Q} = \dot{m} \left( h_2 + \frac{1}{2} V_2^2 - h_1 - \frac{1}{2} V_1^2 \right)$$

$$\text{ou } q = \frac{\dot{Q}}{\dot{m}} = \frac{\delta Q}{\delta m} = h_{02} - h_{01} \quad \text{VII-1c}$$

Le transfert de chaleur aboutit à un changement de l'enthalpie de stagnation de l'écoulement. Nous ne spécifierons pas exactement comment la chaleur est transférée (combustion, réaction nucléaire, évaporation, condensation, ou échange de chaleur pariétal), mais simplement qu'il est arrivé dans la quantité  $q$  entre 1 et 2.

Nous faisons des remarques, cependant, cet échange de chaleur pariétal n'est pas un bon candidat à la théorie parce que la convection pariétale est inévitablement liée avec la friction pariétale, que nous avons négligée.

Pour achever l'analyse, nous employons les relations du gaz parfait et le nombre de Mach.

$$\left. \begin{aligned} \frac{p_2}{\rho_2 T_2} &= \frac{p_1}{\rho_1 T_1} & h_{02} - h_{01} &= c_p (T_{02} - T_{01}) \\ \frac{V_2}{V_1} &= \frac{M_2 a_2}{M_1 a_1} = \frac{M_2}{M_1} \left( \frac{T_2}{T_1} \right)^{1/2} \end{aligned} \right\} \text{VII-2}$$

Pour une quantité donnée de chaleur transférée  $q = \delta Q / \delta M$  ou, pour une variation donnée  $h_{02} - h_{01}$ , les équations (VII-1) et (VII-2) peuvent être résolues algébriquement pour les rapports des propriétés  $p_2 / p_1, M_2 / M_1$ , etc, entre l'entrée et la sortie. Notez que parce que le transfert de chaleur permet à l'entropie d'ou bien augmenter ou diminuer, la deuxième loi de la thermodynamique n'impose aucune restriction de ces solutions.

Avant de décrire ces fonctions des rapports des propriétés, nous illustrons l'effet de transfert de chaleur dans la figure (VII-2), qui montre  $T_0$  et  $T$  en fonction du nombre de Mach dans la conduite. Le chauffage augmente  $T_0$  et le refroidissement la diminue. Le maximum possible de  $T_0$  arrive à  $M = 1.0$  et nous voyons que le chauffage, si l'entrée est subsonique ou supersonique, conduit le nombre de Mach de la conduite vers l'unité. C'est analogue à l'effet de la friction dans le chapitre précédent. La température du gaz parfait augmente de  $M = 0$  jusqu'à  $M = 1 / \gamma^{1/2}$  et diminue ensuite. Ainsi il y a une particularité ou une région inattendue où le chauffage ( $T_0$  augmentant) diminue en réalité la température du gaz, la différence étant reflétée dans une grande augmentation de l'énergie cinétique du gaz. Pour  $\gamma = 1.4$  cette région particulière se trouve entre  $M = 0.845$  et  $M = 1.0$  (information intéressante, mais pas très utile).

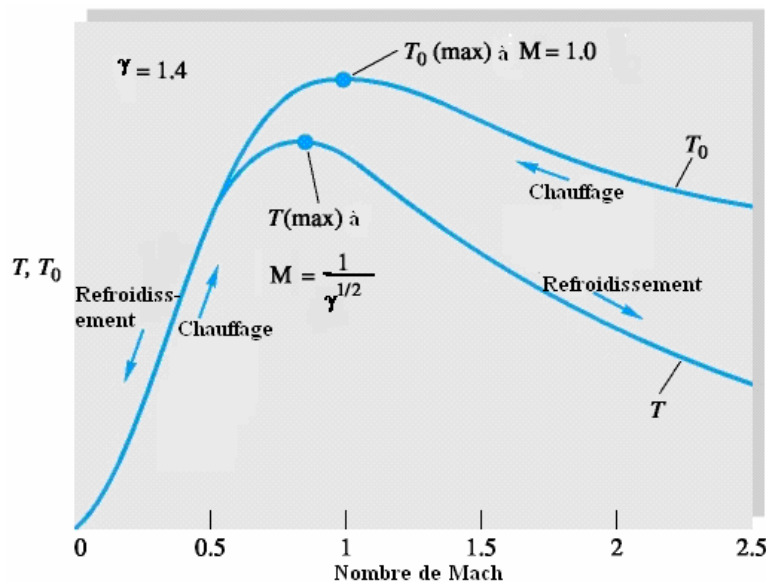


Fig. VII-2 : Influence du transfert de chaleur sur le nombre de Mach.

La liste complète des effets de simple changement de  $T_0$  sur les propriétés d'écoulement interne de conduite est comme suit :

	Chauffage		Refroidissement	
	Subsonique	Supersonique	Subsonique	Supersonique
$T_0$	Augmente	Augmente	Diminue	Diminue
$M$	Augmente	Diminue	Diminue	Augmente
$p$	Diminue	Augmente	Augmente	Diminue
$\rho$	Diminue	Augmente	Augmente	Diminue
$V$	Augmente	Diminue	Diminue	Augmente
$p_0$	Diminue	Diminue	Augmente	Augmente
$T$	☉	Augmente	☆	Diminue
Entropie	Augmente	Augmente	Diminue	Diminue

☉ Augmente jusqu'à  $M = 1/\gamma^{1/2}$  et diminue ensuite.

☆ Diminue jusqu'à  $M = 1/\gamma^{1/2}$  et augmente ensuite.

Probablement l'article le plus significatif dans cette liste est la pression de stagnation  $p_0$ , qui diminue toujours pendant le chauffage si l'écoulement est subsonique ou supersonique. Ainsi le chauffage augmente le nombre de Mach d'un écoulement, mais entraîne une perte dans la pression effective.

## VII-2 Relations de nombre de Mach

Les équations (VII-1) et (VII-2) peuvent être réarrangées en termes du nombre de Mach et les résultats tabulés. Pour la commodité, nous spécifions la section de sortie comme sonique,  $M = 1$ , avec des propriétés de référence  $T_0^*, T^*, p^*, \rho^*, V^*$ , et  $p_0^*$ . L'entrée est assumée pour être à un nombre de Mach arbitraire  $M$ . Les équations (VII-1) et (VII-2) prennent alors la forme suivante :

$$\frac{T_0}{T_0^*} = \frac{(\gamma + 1)M^2 [2 + (\gamma - 1)M^2]}{(1 + \gamma M^2)^2} \quad \text{VII-3a}$$

$$\frac{T}{T^*} = \frac{(\gamma + 1)^2 M^2}{(1 + \gamma M^2)^2} \quad \text{VII-3b}$$

$$\frac{p}{p^*} = \frac{\gamma + 1}{1 + \gamma M^2} \quad \text{VII-3c}$$

$$\frac{V}{V^*} = \frac{\rho^*}{\rho} = \frac{(\gamma + 1)M^2}{1 + \gamma M^2} \quad \text{VII-3d}$$

$$\frac{p_0}{p_0^*} = \frac{\gamma + 1}{1 + \gamma M^2} \left[ \frac{2 + (\gamma - 1)M^2}{\gamma + 1} \right]^{\gamma/(\gamma - 1)} \quad \text{VII-3e}$$

Ces formules sont toutes tabulées en fonction du nombre de Mach dans la table (IV). Les tables sont très commodes si on donne des propriétés d'entrée  $M_1, V_1$ , etc, mais sont quelque peu encombrant si les informations données concernent  $T_{01}$  et  $T_{02}$ . Voici un exemple qui illustre cela.

**Exemple VII.1:**

Un mélange air-carburant, supposé comme l'air avec  $\gamma = 1.4$ , entre à une chambre de combustion de conduite à  $V_1 = 75 \text{ m/s}$ ,  $p_1 = 150 \text{ kPa}$  et  $T_1 = 300 \text{ K}$ . L'ajout de chaleur par la combustion est  $900 \text{ kJ/kg}$  de mélange. Calculez (a) les propriétés de sortie  $V_2, p_2$  et  $T_2$  et (b) la quantité de chaleur totale ajoutée qui aurait causé un écoulement de sortie sonique.

**Solution :**

(a) D'abord on calcule  $T_{01} = T_1 + V_1^2 / (2c_p) = 300 + (75)^2 / [2(1005)] = 303 \text{ K}$ . Alors on calcule la variation de la température de stagnation du gaz :

$$q = c_p (T_{02} - T_{01})$$

ou 
$$T_{02} = T_{01} + \frac{q}{c_p} = 303 \text{ K} + \frac{900000 \text{ J/kg}}{1005 \text{ J/(kg.K)}} = 1199 \text{ K}$$

Nous avons assez d'information pour calculer le nombre de Mach initial :

$$a_1 = \sqrt{\gamma R T_1} = [1.4(287)(300)]^{1/2} = 347 \text{ m/s} \quad M_1 = \frac{V_1}{a_1} = \frac{75}{347} = 0.216$$

Pour ce nombre de Mach, on emploie l'équation (VII-3a) ou la table (IV) pour trouver la valeur sonique  $T_0^*$  :

A  $M_1 = 0.216$  :  $\frac{T_{01}}{T_0^*} \approx 0.1992$  ou  $T_0^* = \frac{303 \text{ K}}{0.1992} \approx 1521 \text{ K}$

Alors le rapport de température de stagnation à la section 2 est  $T_{02} / T_0^* = 1199 / 1521 = 0.788$ , qui correspond dans la table (IV) à un nombre de Mach  $M_2 \approx 0.573$ .

On emploie maintenant la table (IV) à  $M_1$  et  $M_2$  pour tabuler les rapports de propriétés désirés.

Section	$M$	$V / V^*$	$p / p^*$	$T / T^*$
1	0.216	0.1051	2.2528	0.2368
2	0.573	0.5398	1.6442	0.8876

Les propriétés de sortie sont calculées en employant ces proportions pour trouver l'état 2 de l'état 1 :

$$V_2 = V_1 \frac{V_2 / V^*}{V_1 / V^*} = (75 \text{ m/s}) \frac{0.5398}{0.1051} = 385 \text{ m/s}$$

$$p_2 = p_1 \frac{p_2 / p^*}{p_1 / p^*} = (150 \text{ kPa}) \frac{1.6442}{2.2528} = 109 \text{ kPa}$$

$$T_2 = T_1 \frac{T_2 / T^*}{T_1 / T^*} = (300 \text{ K}) \frac{0.8876}{0.2368} = 1124 \text{ K}$$

(b) l'ajout de chaleur maximal permis conduirait le nombre de Mach de la sortie à l'unité :

$$T_{02} = T_0^* = 1521 \text{ K}$$

$$q_{\max} = c_p (T_0^* - T_{01}) = [1005 \text{ J / (kg.K)}] (1521 - 303 \text{ K}) \approx 1.22 \times 10^6 \text{ J / kg}$$

### VII-3 Les effets de suffocation en raison de chauffage simple

L'équation (VII-3a) et la table (IV) indiquent que la température de stagnation maximale possible pour le chauffage simple correspond à  $T_0^*$ , ou nombre de Mach sonique à la sortie. Ainsi, pour des conditions d'entrée données, seulement une certaine quantité maximale de chaleur peut être ajoutée à l'écoulement, par exemple,  $1.22 \text{ MJ/kg}$  dans l'exemple (VII.1). Pour une entrée subsonique il n'y a aucune limite théorique sur l'addition de chaleur : l'écoulement suffoque de plus en plus comme nous ajoutons plus de chaleur, avec une vitesse d'entrée s'approchant du zéro. Pour l'écoulement supersonique, même si  $M_1$  est infini, il y a un rapport fini  $T_{01} / T_0^* = 0.4898$  pour  $\gamma = 1.4$ . Ainsi si la chaleur est ajoutée sans limite à un écoulement supersonique, on exige qu'un ajustement d'onde de choc normale pour accommoder les changements de propriété exigés.

Dans l'écoulement subsonique il n'y a aucune limite théorique du refroidissement possible : l'écoulement à la sortie devient juste de plus en plus lent et la température s'approche du zéro. Dans l'écoulement supersonique seulement une quantité finie de refroidissement peut être permise avant que l'écoulement de sortie ne s'approche du nombre de Mach infini, avec  $T_{02} / T_0^* = 0.4898$  et la température de sortie égale à zéro. Il y a très peu de applications pratiques pour le refroidissement supersonique.

#### Exemple VII.2:

Ce qui arrive à l'entrée de l'écoulement dans l'exemple (VII.1) si l'ajout de chaleur est augmenté à  $1400 \text{ kJ/kg}$  et la pression et la température de stagnation à l'entrée sont fixées ? Quelle sera la diminution subséquente dans le débit massique de l'écoulement ?

#### Solution :

Pour  $q = 1400 \text{ kJ / kg}$ , la sortie sera étranglée (suffoquée) à la température de stagnation

$$T_0^* = T_{01} + \frac{q}{c_p} = 303 + \frac{1.4 \times 10^6 \text{ J / kg}}{1005 \text{ J / (kg.K)}} \approx 1696 \text{ K}$$

C'est plus haut que la valeur  $T_0^* = 1521K$  dans l'exemple (VII.1), donc nous savons que la condition 1 devra suffoquer vers un nombre de Mach inférieur. La valeur appropriée est trouvée du rapport  $T_{01} / T_0^* = 303 / 1696 = 0.1787$ . De la table (IV) ou (équ. VII-3a) pour cette condition, nous lisons le nouveau nombre de Mach d'entrée baissé :  $M_{1, \text{nouveau}} \approx 0.203$ . Avec  $T_{01}$  et  $p_1$  connu, les autres propriétés d'entrée suivent de ce nombre de Mach :

$$T_1 = \frac{T_{01}}{1 + 0.2M_1^2} = \frac{303}{1 + 0.2(0.203)^2} = 301K$$

$$a_1 = \sqrt{\gamma RT_1} = [1.4(287)(301)]^{1/2} = 348 \text{ m / s}$$

$$V_1 = M_1 a_1 = (0.203)(348 \text{ m / s}) = 70 \text{ m / s}$$

$$\rho_1 = \frac{p_1}{RT_1} = \frac{150000}{(287)(301)} = 1.74 \text{ kg / m}^3$$

Finalement, le nouveau débit massique baissé d'écoulement par unité de surface est

$$\frac{\dot{m}_{\text{nouveau}}}{A} = \rho_1 V_1 = (1.74 \text{ kg / m}^3)(70 \text{ m / s}) = 122 \text{ kg / (s.m}^2)$$

C'est 7% moins que dans l'Exemple 9.14, dû à la suffocation par l'excès d'addition de chaleur.

SAHLA MAHLA

المصدر الأول للطالب الجزائري



**TABLE I :** Ecoulement isentropique d'un gaz parfait ( $\gamma=1.4$ ).

$M$	$p/p_0$	$\rho/\rho_0$	$T/T_0$	$A/A^*$	$M$	$p/p_0$	$\rho/\rho_0$	$T/T_0$	$A/A^*$
0.00	1.0000	1.0000	1.0000	$\infty$	0.92	0.5785	0.6764	0.8552	1.0056
0.02	0.9997	0.9998	0.9999	28.9421	0.94	0.5658	0.6658	0.8498	1.0031
0.04	0.9989	0.9992	0.9997	14.4815	0.96	0.5532	0.6551	0.8444	1.0014
0.06	0.9975	0.9982	0.9993	9.6659	0.98	0.5407	0.6445	0.8389	1.0003
0.08	0.9955	0.9968	0.9987	7.2616	1.00	0.5283	0.6339	0.8333	1.0000
0.10	0.9930	0.9950	0.9980	5.8218	1.02	0.5160	0.6234	0.8278	1.0003
0.12	0.9900	0.9928	0.9971	4.8643	1.04	0.5039	0.6129	0.8222	1.0013
0.14	0.9864	0.9903	0.9961	4.1824	1.06	0.4919	0.6024	0.8165	1.0029
0.16	0.9823	0.9873	0.9949	3.6727	1.08	0.4800	0.5920	0.8108	1.0051
0.18	0.9776	0.9840	0.9936	3.2779	1.10	0.4684	0.5817	0.8052	1.0079
0.20	0.9725	0.9803	0.9921	2.9635	1.12	0.4568	0.5714	0.7994	1.0113
0.22	0.9668	0.9762	0.9904	2.7076	1.14	0.4455	0.5612	0.7937	1.0153
0.24	0.9607	0.9718	0.9886	2.4956	1.16	0.4343	0.5511	0.7879	1.0198
0.26	0.9541	0.9670	0.9867	2.3173	1.18	0.4232	0.5411	0.7822	1.0248
0.28	0.9470	0.9619	0.9846	2.1656	1.20	0.4124	0.5311	0.7764	1.0304
0.30	0.9395	0.9564	0.9823	2.0351	1.22	0.4017	0.5213	0.7706	1.0366
0.32	0.9315	0.9506	0.9799	1.9219	1.24	0.3912	0.5115	0.7648	1.0432
0.34	0.9231	0.9445	0.9774	1.8229	1.26	0.3809	0.5019	0.7590	1.0504
0.36	0.9143	0.9380	0.9747	1.7358	1.28	0.3708	0.4923	0.7532	1.0581
0.38	0.9052	0.9313	0.9719	1.6587	1.30	0.3609	0.4829	0.7474	1.0663
0.40	0.8956	0.9243	0.9690	1.5901	1.32	0.3512	0.4736	0.7416	1.0750
0.42	0.8857	0.9170	0.9659	1.5289	1.34	0.3417	0.4644	0.7358	1.0842
0.44	0.8755	0.9094	0.9627	1.4740	1.36	0.3323	0.4553	0.7300	1.0940
0.46	0.8650	0.9016	0.9594	1.4246	1.38	0.3232	0.4463	0.7242	1.1042
0.48	0.8541	0.8935	0.9559	1.3801	1.40	0.3142	0.4374	0.7184	1.1149
0.50	0.8430	0.8852	0.9524	1.3398	1.42	0.3055	0.4287	0.7126	1.1262
0.52	0.8317	0.8766	0.9487	1.3034	1.44	0.2969	0.4201	0.7069	1.1379
0.54	0.8201	0.8679	0.9449	1.2703	1.46	0.2886	0.4116	0.7011	1.1501
0.56	0.8082	0.8589	0.9410	1.2403	1.48	0.2804	0.4032	0.6954	1.1629
0.58	0.7962	0.8498	0.9370	1.2130	1.50	0.2724	0.3950	0.6897	1.1762
0.60	0.7840	0.8405	0.9328	1.1882	1.52	0.2646	0.3869	0.6840	1.1899
0.62	0.7716	0.8310	0.9286	1.1656	1.54	0.2570	0.3789	0.6783	1.2042
0.64	0.7591	0.8213	0.9243	1.1451	1.56	0.2496	0.3710	0.6726	1.2190
0.66	0.7465	0.8115	0.9199	1.1265	1.58	0.2423	0.3633	0.6670	1.2344
0.68	0.7338	0.8016	0.9153	1.1097	1.60	0.2353	0.3557	0.6614	1.2502
0.70	0.7209	0.7916	0.9107	1.0944	1.62	0.2284	0.3483	0.6558	1.2666
0.72	0.7080	0.7814	0.9061	1.0806	1.64	0.2217	0.3409	0.6502	1.2836
0.74	0.6951	0.7712	0.9013	1.0681	1.66	0.2152	0.3337	0.6447	1.3010
0.76	0.6821	0.7609	0.8964	1.0570	1.68	0.2088	0.3266	0.6392	1.3190
0.78	0.6691	0.7505	0.8915	1.0471	1.70	0.2026	0.3197	0.6337	1.3376
0.80	0.6560	0.7400	0.8865	1.0382	1.72	0.1966	0.3129	0.6283	1.3567
0.82	0.6430	0.7295	0.8815	1.0305	1.74	0.1907	0.3062	0.6229	1.3764
0.84	0.6300	0.7189	0.8763	1.0237	1.76	0.1850	0.2996	0.6175	1.3967
0.86	0.6170	0.7083	0.8711	1.0179	1.78	0.1794	0.2931	0.6121	1.4175
0.88	0.6041	0.6977	0.8659	1.0129	1.80	0.1740	0.2868	0.6068	1.4390
0.90	0.5913	0.6870	0.8606	1.0089	1.82	0.1688	0.2806	0.6015	1.4610



**TABLE I (Suite):** Ecoulement isentropique d'un gaz parfait ( $\gamma = 1.4$ )

$M$	$p/p_0$	$\rho/\rho_0$	$T/T_0$	$A/A^*$	$M$	$p/p_0$	$\rho/\rho_0$	$T/T_0$	$A/A^*$
1.84	0.1637	0.2745	0.5963	1.4836	2.92	0.0307	0.0831	0.3696	3.9238
1.86	0.1587	0.2686	0.5910	1.5069	2.94	0.0298	0.0813	0.3665	3.9993
1.88	0.1539	0.2627	0.5859	1.5308	2.96	0.0289	0.0796	0.3633	4.0762
1.90	0.1492	0.2570	0.5807	1.5553	2.98	0.0281	0.0779	0.3602	4.1547
1.92	0.1447	0.2514	0.5756	1.5804	3.00	0.0272	0.0762	0.3571	4.2346
1.94	0.1403	0.2459	0.5705	1.6062	3.02	0.0264	0.0746	0.3541	4.3160
1.96	0.1360	0.2405	0.5655	1.6326	3.04	0.0256	0.0730	0.3511	4.3989
1.98	0.1318	0.2352	0.5605	1.6597	3.06	0.0249	0.0715	0.3481	4.4835
2.00	0.1278	0.2300	0.5556	1.6875	3.08	0.0242	0.0700	0.3452	4.5696
2.02	0.1239	0.2250	0.5506	1.7160	3.10	0.0234	0.0685	0.3422	4.6573
2.04	0.1201	0.2200	0.5458	1.7451	3.12	0.0228	0.0671	0.3393	4.7467
2.06	0.1164	0.2152	0.5409	1.7750	3.14	0.0221	0.0657	0.3365	4.8377
2.08	0.1128	0.2104	0.5361	1.8056	3.16	0.0215	0.0643	0.3337	4.9304
2.10	0.1094	0.2058	0.5313	1.8369	3.18	0.0208	0.0630	0.3309	5.0248
2.12	0.1060	0.2013	0.5266	1.8690	3.20	0.0202	0.0617	0.3281	5.1209
2.14	0.1027	0.1968	0.5219	1.9018	3.22	0.0196	0.0604	0.3253	5.2189
2.16	0.0996	0.1925	0.5173	1.9354	3.24	0.0191	0.0591	0.3226	5.3186
2.18	0.0965	0.1882	0.5127	1.9698	3.26	0.0185	0.0579	0.3199	5.4201
2.20	0.0935	0.1841	0.5081	2.0050	3.28	0.0180	0.0567	0.3173	5.5234
2.22	0.0906	0.1800	0.5036	2.0409	3.30	0.0175	0.0555	0.3147	5.6286
2.24	0.0878	0.1760	0.4991	2.0777	3.32	0.0170	0.0544	0.3121	5.7357
2.26	0.0851	0.1721	0.4947	2.1153	3.34	0.0165	0.0533	0.3095	5.8448
2.28	0.0825	0.1683	0.4903	2.1538	3.36	0.0160	0.0522	0.3069	5.9558
2.30	0.0800	0.1646	0.4859	2.1931	3.38	0.0156	0.0511	0.3044	6.0687
2.32	0.0775	0.1609	0.4816	2.2333	3.40	0.0151	0.0501	0.3019	6.1837
2.34	0.0751	0.1574	0.4773	2.2744	3.42	0.0147	0.0491	0.2995	6.3007
2.36	0.0728	0.1539	0.4731	2.3164	3.44	0.0143	0.0481	0.2970	6.4197
2.38	0.0706	0.1505	0.4688	2.3593	3.46	0.0139	0.0471	0.2946	6.5409
2.40	0.0684	0.1472	0.4647	2.4031	3.48	0.0135	0.0462	0.2922	6.6642
2.42	0.0663	0.1439	0.4606	2.4479	3.50	0.0131	0.0452	0.2899	6.7896
2.44	0.0643	0.1408	0.4565	2.4936	3.52	0.0127	0.0443	0.2875	6.9172
2.46	0.0623	0.1377	0.4524	2.5403	3.54	0.0124	0.0434	0.2852	7.0470
2.48	0.0604	0.1346	0.4484	2.5880	3.56	0.0120	0.0426	0.2829	7.1791
2.50	0.0585	0.1317	0.4444	2.6367	3.58	0.0117	0.0417	0.2806	7.3134
2.52	0.0567	0.1288	0.4405	2.6864	3.60	0.0114	0.0409	0.2784	7.4501
2.54	0.0550	0.1260	0.4366	2.7372	3.62	0.0111	0.0401	0.2762	7.5891
2.56	0.0533	0.1232	0.4328	2.7891	3.64	0.0108	0.0393	0.2740	7.7304
2.58	0.0517	0.1205	0.4289	2.8420	3.66	0.0105	0.0385	0.2718	7.8742
2.60	0.0501	0.1179	0.4252	2.8960	3.68	0.0102	0.0378	0.2697	8.0204
2.62	0.0486	0.1153	0.4214	2.9511	3.70	0.0099	0.0370	0.2675	8.1690
2.64	0.0471	0.1128	0.4177	3.0073	3.72	0.0096	0.0363	0.2654	8.3202
2.66	0.0457	0.1103	0.4141	3.0647	3.74	0.0094	0.0356	0.2633	8.4739
2.68	0.0443	0.1079	0.4104	3.1233	3.76	0.0091	0.0349	0.2613	8.6302
2.70	0.0430	0.1056	0.4068	3.1830	3.78	0.0089	0.0342	0.2592	8.7891
2.72	0.0417	0.1033	0.4033	3.2439	3.80	0.0086	0.0335	0.2572	8.9506
2.74	0.0404	0.1010	0.3998	3.3061	3.82	0.0084	0.0329	0.2552	9.1147
2.76	0.0392	0.0989	0.3963	3.3695	3.84	0.0082	0.0323	0.2532	9.2816
2.78	0.0380	0.0967	0.3928	3.4342	3.86	0.0080	0.0316	0.2513	9.4513
2.80	0.0368	0.0946	0.3894	3.5001	3.88	0.0077	0.0310	0.2493	9.6237
2.82	0.0357	0.0926	0.3860	3.5674	3.90	0.0075	0.0304	0.2474	9.7989
2.84	0.0347	0.0906	0.3827	3.6359	3.92	0.0073	0.0299	0.2455	9.9770
2.86	0.0336	0.0886	0.3794	3.7058	3.94	0.0071	0.0293	0.2436	10.1580
2.88	0.0326	0.0867	0.3761	3.7771	3.96	0.0069	0.0287	0.2418	10.3419
2.90	0.0317	0.0849	0.3729	3.8498	3.98	0.0068	0.0282	0.2399	10.5288



**TABLE I (Suite):** Ecoulement isentropique d'un gaz parfait ( $\gamma = 1.4$ )

$M$	$p / p_0$	$\rho / \rho_0$	$T / T_0$	$A / A^*$
4.00	0.0066	0.0277	0.2381	10.7187
4.02	0.0064	0.0271	0.2363	10.9117
4.04	0.0062	0.0266	0.2345	11.1077
4.06	0.0061	0.0261	0.2327	11.3068
4.08	0.0059	0.0256	0.2310	11.5091
4.10	0.0058	0.0252	0.2293	11.7146
4.12	0.0056	0.0247	0.2275	11.9234
4.14	0.0055	0.0242	0.2258	12.1354
4.16	0.0053	0.0238	0.2242	12.3508
4.18	0.0052	0.0234	0.2225	12.5695
4.20	0.0051	0.0229	0.2208	12.7916
4.22	0.0049	0.0225	0.2192	13.0172
4.24	0.0048	0.0221	0.2176	13.2463
4.26	0.0047	0.0217	0.2160	13.4789
4.28	0.0046	0.0213	0.2144	13.7151
4.30	0.0044	0.0209	0.2129	13.9549
4.32	0.0043	0.0205	0.2113	14.1983
4.34	0.0042	0.0202	0.2098	14.4455
4.36	0.0041	0.0198	0.2083	14.6965
4.38	0.0040	0.0194	0.2067	14.9512
4.40	0.0039	0.0191	0.2053	15.2098
4.42	0.0038	0.0187	0.2038	15.4723
4.44	0.0037	0.0184	0.2023	15.7387
4.46	0.0036	0.0181	0.2009	16.0092
4.48	0.0035	0.0178	0.1994	16.2836
4.50	0.0035	0.0174	0.1980	16.5622
4.52	0.0034	0.0171	0.1966	16.8448
4.54	0.0033	0.0168	0.1952	17.1317
4.56	0.0032	0.0165	0.1938	17.4227
4.58	0.0031	0.0163	0.1925	17.7181
4.60	0.0031	0.0160	0.1911	18.0177
4.62	0.0030	0.0157	0.1898	18.3218
4.64	0.0029	0.0154	0.1885	18.6303
4.66	0.0028	0.0152	0.1872	18.9432
4.68	0.0028	0.0149	0.1859	19.2607
4.70	0.0027	0.0146	0.1846	19.5828
4.72	0.0026	0.0144	0.1833	19.9095
4.74	0.0026	0.0141	0.1820	20.2409
4.76	0.0025	0.0139	0.1808	20.5770
4.78	0.0025	0.0137	0.1795	20.9179
4.80	0.0024	0.0134	0.1783	21.2636
4.82	0.0023	0.0132	0.1771	21.6143
4.84	0.0023	0.0130	0.1759	21.9699
4.86	0.0022	0.0128	0.1747	22.3306
4.88	0.0022	0.0125	0.1735	22.6962
4.90	0.0021	0.0123	0.1724	23.0671
4.92	0.0021	0.0121	0.1712	23.4430
4.94	0.0020	0.0119	0.1700	23.8243
4.96	0.0020	0.0117	0.1689	24.2108
4.98	0.0019	0.0115	0.1678	24.6027
5.00	0.0019	0.0113	0.1667	25.0000
$\infty$	0	0	0	$\infty$

SAHIA MAHLA



المصدر الأول للبيانات

**TABLE II :** Ecoulement à onde de choc normale d'un gaz parfait ( $\gamma=1.4$ ).

$M_1$	$M_2$	$p_2 / p_1$	$\rho_2 / \rho_1$	$T_2 / T_1$	$p_{02} / p_{01}$	$A_2^* / A_1^*$	$\frac{\Delta s}{R}$
$M_1 \sin \sigma$	$M_2 \sin(\sigma - \delta)$		$V_1 / V_2$ $V_{n1} / V_{n2}$				
1.00	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.000
1.02	0.9805	1.0471	1.0334	1.0132	1.0000	1.0000	0.000
1.04	0.9620	1.0952	1.0671	1.0263	0.9999	1.0001	0.000
1.06	0.9444	1.1442	1.1009	1.0393	0.9998	1.0002	0.000
1.08	0.9277	1.1941	1.1349	1.0522	0.9994	1.0006	0.001
1.10	0.9118	1.2450	1.1691	1.0649	0.9989	1.0011	0.001
1.12	0.8966	1.2968	1.2034	1.0776	0.9982	1.0018	0.002
1.14	0.8820	1.3495	1.2378	1.0903	0.9973	1.0027	0.003
1.16	0.8682	1.4032	1.2723	1.1029	0.9961	1.0040	0.004
1.18	0.8549	1.4578	1.3069	1.1154	0.9946	1.0055	0.005
1.20	0.8422	1.5133	1.3416	1.1280	0.9928	1.0073	0.007
1.22	0.8300	1.5698	1.3764	1.1405	0.9907	1.0094	0.009
1.24	0.8183	1.6272	1.4112	1.1531	0.9884	1.0118	0.012
1.26	0.8071	1.6855	1.4460	1.1657	0.9857	1.0145	0.014
1.28	0.7963	1.7448	1.4808	1.1783	0.9827	1.0176	0.017
1.30	0.7860	1.8050	1.5157	1.1909	0.9794	1.0211	0.021
1.32	0.7760	1.8661	1.5505	1.2035	0.9758	1.0249	0.025
1.34	0.7664	1.9282	1.5854	1.2162	0.9718	1.0290	0.029
1.36	0.7572	1.9912	1.6202	1.2290	0.9676	1.0335	0.033
1.38	0.7483	2.0551	1.6549	1.2418	0.9630	1.0384	0.038
1.40	0.7397	2.1200	1.6897	1.2547	0.9582	1.0436	0.043
1.42	0.7314	2.1858	1.7243	1.2676	0.9531	1.0492	0.048
1.44	0.7235	2.2525	1.7589	1.2807	0.9476	1.0552	0.054
1.46	0.7157	2.3202	1.7934	1.2938	0.9420	1.0616	0.060
1.48	0.7083	2.3888	1.8278	1.3069	0.9360	1.0684	0.066
1.50	0.7011	2.4583	1.8621	1.3202	0.9298	1.0755	0.073
1.52	0.6941	2.5288	1.8963	1.3336	0.9233	1.0830	0.080
1.54	0.6874	2.6002	1.9303	1.3470	0.9166	1.0910	0.087
1.56	0.6809	2.6725	1.9643	1.3606	0.9097	1.0993	0.095
1.58	0.6746	2.7458	1.9981	1.3742	0.9026	1.1080	0.103
1.60	0.6684	2.8200	2.0317	1.3880	0.8952	1.1171	0.111
1.62	0.6625	2.8951	2.0653	1.4018	0.8877	1.1266	0.119
1.64	0.6568	2.9712	2.0986	1.4158	0.8799	1.1365	0.128
1.66	0.6512	3.0482	2.1318	1.4299	0.8720	1.1468	0.137
1.68	0.6458	3.1261	2.1649	1.4440	0.8639	1.1575	0.146
1.70	0.6405	3.2050	2.1977	1.4583	0.8557	1.1686	0.156
1.72	0.6355	3.2848	2.2304	1.4727	0.8474	1.1801	0.166
1.74	0.6305	3.3655	2.2629	1.4873	0.8389	1.1921	0.176
1.76	0.6257	3.4472	2.2952	1.5019	0.8302	1.2045	0.186
1.78	0.6210	3.5298	2.3273	1.5167	0.8215	1.2173	0.197
1.80	0.6165	3.6133	2.3592	1.5316	0.8127	1.2305	0.207
1.82	0.6121	3.6978	2.3909	1.5466	0.8038	1.2441	0.218
1.84	0.6078	3.7832	2.4224	1.5617	0.7948	1.2582	0.230
1.86	0.6036	3.8695	2.4537	1.5770	0.7857	1.2728	0.241
1.88	0.5996	3.9568	2.4848	1.5924	0.7765	1.2877	0.253
1.90	0.5956	4.0450	2.5157	1.6079	0.7674	1.3032	0.265
1.92	0.5918	4.1341	2.5463	1.6236	0.7581	1.3191	0.277
1.94	0.5880	4.2242	2.5767	1.6394	0.7488	1.3354	0.289

**TABLE II (Suite):** Ecoulement à onde de choc normale d'un gaz parfait ( $\gamma = 1.4$ ).

$M_1$	$M_2$	$p_2 / p_1$	$\rho_2 / \rho_1$	$T_2 / T_1$	$p_{02} / p_{01}$	$A_2^* / A_1^*$	$\frac{\Delta s}{R}$
$M_1 \sin \sigma$	$M_2 \sin(\sigma - \delta)$		$V_1 / V_2$ $V_{n1} / V_{n2}$				
1.96	0.5844	4.3152	2.6069	1.6553	0.7395	1.3522	0.302
1.98	0.5808	4.4071	2.6369	1.6713	0.7302	1.3695	0.314
2.00	0.5774	4.5000	2.6667	1.6875	0.7209	1.3872	0.327
2.02	0.5740	4.5938	2.6962	1.7038	0.7115	1.4054	0.340
2.04	0.5707	4.6885	2.7255	1.7203	0.7022	1.4241	0.354
2.06	0.5675	4.7842	2.7545	1.7369	0.6928	1.4433	0.367
2.08	0.5643	4.8808	2.7833	1.7536	0.6835	1.4630	0.381
2.10	0.5613	4.9783	2.8119	1.7704	0.6742	1.4832	0.394
2.12	0.5583	5.0768	2.8402	1.7875	0.6649	1.5039	0.408
2.14	0.5554	5.1762	2.8683	1.8046	0.6557	1.5252	0.422
2.16	0.5525	5.2765	2.8962	1.8219	0.6464	1.5469	0.436
2.18	0.5498	5.3778	2.9238	1.8393	0.6373	1.5692	0.451
2.20	0.5471	5.4800	2.9512	1.8569	0.6281	1.5920	0.465
2.22	0.5444	5.5831	2.9784	1.8746	0.6191	1.6154	0.480
2.24	0.5418	5.6872	3.0053	1.8924	0.6100	1.6393	0.494
2.26	0.5393	5.7922	3.0319	1.9104	0.6011	1.6638	0.509
2.28	0.5368	5.8981	3.0584	1.9285	0.5921	1.6888	0.524
2.30	0.5344	6.0050	3.0845	1.9468	0.5833	1.7144	0.539
2.32	0.5321	6.1128	3.1105	1.9652	0.5745	1.7406	0.554
2.34	0.5297	6.2215	3.1362	1.9838	0.5658	1.7674	0.569
2.36	0.5275	6.3312	3.1617	2.0025	0.5572	1.7948	0.585
2.38	0.5253	6.4418	3.1869	2.0213	0.5486	1.8227	0.600
2.40	0.5231	6.5533	3.2119	2.0403	0.5401	1.8514	0.616
2.42	0.5210	6.6658	3.2367	2.0595	0.5317	1.8806	0.632
2.44	0.5189	6.7792	3.2612	2.0788	0.5234	1.9105	0.647
2.46	0.5169	6.8935	3.2855	2.0982	0.5152	1.9410	0.663
2.48	0.5149	7.0088	3.3095	2.1178	0.5071	1.9721	0.679
2.50	0.5130	7.1250	3.3333	2.1375	0.4990	2.0039	0.695
2.52	0.5111	7.2421	3.3569	2.1574	0.4911	2.0364	0.711
2.54	0.5092	7.3602	3.3803	2.1774	0.4832	2.0696	0.727
2.56	0.5074	7.4792	3.4034	2.1976	0.4754	2.1035	0.744
2.58	0.5056	7.5991	3.4263	2.2179	0.4677	2.1380	0.760
2.60	0.5039	7.7200	3.4490	2.2383	0.4601	2.1733	0.776
2.62	0.5022	7.8418	3.4714	2.2590	0.4526	2.2093	0.793
2.64	0.5005	7.9645	3.4936	2.2797	0.4452	2.2461	0.809
2.66	0.4988	8.0882	3.5156	2.3006	0.4379	2.2835	0.826
2.68	0.4972	8.2128	3.5374	2.3217	0.4307	2.3218	0.842
2.70	0.4956	8.3383	3.5590	2.3429	0.4236	2.3608	0.859
2.72	0.4941	8.4648	3.5803	2.3642	0.4166	2.4005	0.876
2.74	0.4926	8.5922	3.6015	2.3858	0.4097	2.4411	0.892
2.76	0.4911	8.7205	3.6224	2.4074	0.4028	2.4825	0.909
2.78	0.4896	8.8498	3.6431	2.4292	0.3961	2.5246	0.926
2.80	0.4882	8.9800	3.6635	2.4512	0.3895	2.5676	0.943
2.82	0.4868	9.1111	3.6838	2.4733	0.3829	2.6115	0.960
2.84	0.4854	9.2432	3.7039	2.4955	0.3765	2.6561	0.977
2.86	0.4840	9.3762	3.7238	2.5179	0.3701	2.7017	0.994
2.88	0.4827	9.5101	3.7434	2.5405	0.3639	2.7481	1.011
2.90	0.4814	9.6450	3.7629	2.5632	0.3577	2.7954	1.028
2.92	0.4801	9.7808	3.7821	2.5861	0.3517	2.8436	1.045
2.94	0.4788	9.9175	3.8012	2.6091	0.3457	2.8927	1.062
2.96	0.4776	10.0552	3.8200	2.6322	0.3398	2.9427	1.079
2.98	0.4764	10.1938	3.8387	2.6555	0.3340	2.9937	1.096

**TABLE II (Suite):** Ecoulement à onde de choc normale d'un gaz parfait ( $\gamma = 1.4$ ).

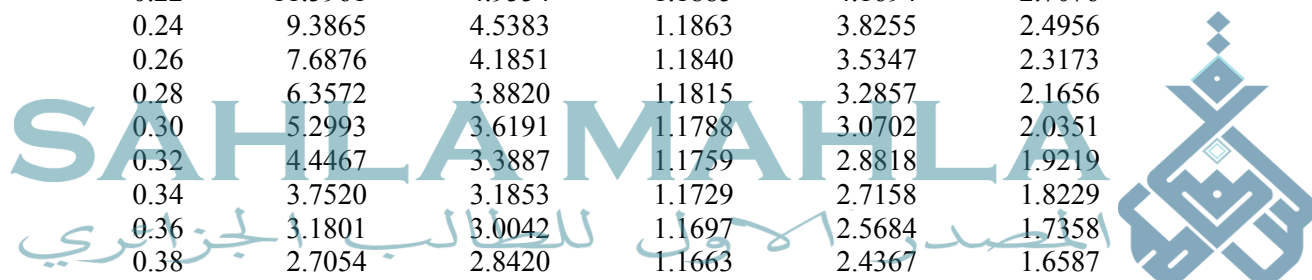
$M_1$	$M_2$	$p_2 / p_1$	$\rho_2 / \rho_1$	$T_2 / T_1$	$p_{02} / p_{01}$	$A_2^* / A_1^*$	$\frac{\Delta s}{R}$
$M_1 \sin \sigma$	$M_2 \sin(\sigma - \delta)$		$V_1 / V_2$				
			$V_{n1} / V_{n2}$				
3.00	0.4752	10.3333	3.8571	2.6790	0.3283	3.0456	1.114
3.02	0.4740	10.4738	3.8754	2.7026	0.3227	3.0985	1.131
3.04	0.4729	10.6152	3.8935	2.7264	0.3172	3.1523	1.148
3.06	0.4717	10.7575	3.9114	2.7503	0.3118	3.2072	1.165
3.08	0.4706	10.9008	3.9291	2.7744	0.3065	3.2630	1.183
3.10	0.4695	11.0450	3.9466	2.7986	0.3012	3.3199	1.200
3.12	0.4685	11.1901	3.9639	2.8230	0.2960	3.3778	1.217
3.14	0.4674	11.3362	3.9811	2.8475	0.2910	3.4368	1.235
3.16	0.4664	11.4832	3.9981	2.8722	0.2860	3.4969	1.252
3.18	0.4654	11.6311	4.0149	2.8970	0.2811	3.5580	1.269
3.20	0.4643	11.7800	4.0315	2.9220	0.2762	3.6202	1.287
3.22	0.4634	11.9298	4.0479	2.9471	0.2715	3.6835	1.304
3.24	0.4624	12.0805	4.0642	2.9724	0.2668	3.7480	1.321
3.26	0.4614	12.2322	4.0803	2.9979	0.2622	3.8136	1.339
3.28	0.4605	12.3848	4.0963	3.0234	0.2577	3.8803	1.356
3.30	0.4596	12.5383	4.1120	3.0492	0.2533	3.9483	1.373
3.32	0.4587	12.6928	4.1276	3.0751	0.2489	4.0174	1.391
3.34	0.4578	12.8482	4.1431	3.1011	0.2446	4.0877	1.408
3.36	0.4569	13.0045	4.1583	3.1273	0.2404	4.1593	1.425
3.38	0.4560	13.1618	4.1734	3.1537	0.2363	4.2321	1.443
3.40	0.4552	13.3200	4.1884	3.1802	0.2322	4.3061	1.460
3.42	0.4544	13.4791	4.2032	3.2069	0.2282	4.3815	1.477
3.44	0.4535	13.6392	4.2178	3.2337	0.2243	4.4581	1.495
3.46	0.4527	13.8002	4.2323	3.2607	0.2205	4.5361	1.512
3.48	0.4519	13.9621	4.2467	3.2878	0.2167	4.6154	1.529
3.50	0.4512	14.1250	4.2609	3.3150	0.2129	4.6960	1.547
3.52	0.4504	14.2888	4.2749	3.3425	0.2093	4.7780	1.564
3.54	0.4496	14.4535	4.2888	3.3701	0.2057	4.8614	1.581
3.56	0.4489	14.6192	4.3026	3.3978	0.2022	4.9461	1.599
3.58	0.4481	14.7858	4.3162	3.4257	0.1987	5.0323	1.616
3.60	0.4474	14.9533	4.3296	3.4537	0.1953	5.1200	1.633
3.62	0.4467	15.1218	4.3429	3.4819	0.1920	5.2091	1.650
3.64	0.4460	15.2912	4.3561	3.5103	0.1887	5.2997	1.668
3.66	0.4453	15.4615	4.3692	3.5388	0.1855	5.3918	1.685
3.68	0.4446	15.6328	4.3821	3.5674	0.1823	5.4854	1.702
3.70	0.4439	15.8050	4.3949	3.5962	0.1792	5.5805	1.719
3.72	0.4433	15.9781	4.4075	3.6252	0.1761	5.6773	1.736
3.74	0.4426	16.1522	4.4200	3.6543	0.1731	5.7755	1.754
3.76	0.4420	16.3272	4.4324	3.6836	0.1702	5.8754	1.771
3.78	0.4414	16.5031	4.4447	3.7130	0.1673	5.9770	1.788
3.80	0.4407	16.6800	4.4568	3.7426	0.1645	6.0801	1.805
3.82	0.4401	16.8578	4.4688	3.7723	0.1617	6.1849	1.822
3.84	0.4395	17.0365	4.4807	3.8022	0.1589	6.2914	1.839
3.86	0.4389	17.2162	4.4924	3.8323	0.1563	6.3997	1.856
3.88	0.4383	17.3968	4.5041	3.8625	0.1536	6.5096	1.873
3.90	0.4377	17.5783	4.5156	3.8928	0.1510	6.6213	1.890
3.92	0.4372	17.7608	4.5270	3.9233	0.1485	6.7348	1.907
3.94	0.4366	17.9442	4.5383	3.9540	0.1460	6.8500	1.924
3.96	0.4360	18.1285	4.5494	3.9848	0.1435	6.9671	1.941
3.98	0.4355	18.3138	4.5605	4.0157	0.1411	7.0861	1.958
4.00	0.4350	18.5000	4.5714	4.0469	0.1388	7.2069	1.975
4.02	0.4344	18.6871	4.5823	4.0781	0.1364	7.3296	1.992

**TABLE II (Suite):** Ecoulement à onde de choc normale d'un gaz parfait ( $\gamma = 1.4$ ).

$M_1$	$M_2$	$p_2 / p_1$	$\rho_2 / \rho_1$	$T_2 / T_1$	$p_{02} / p_{01}$	$A_2^* / A_1^*$	$\frac{\Delta s}{R}$
$M_1 \sin \sigma$	$M_2 \sin(\sigma - \delta)$		$V_1 / V_2$				$R$
			$V_{n1} / V_{n2}$				
4.04	0.4339	18.8752	4.5930	4.1096	0.1342	7.4542	2.009
4.06	0.4334	19.0642	4.6036	4.1412	0.1319	7.5807	2.026
4.08	0.4329	19.2541	4.6141	4.1729	0.1297	7.7092	2.042
4.10	0.4324	19.4450	4.6245	4.2048	0.1276	7.8397	2.059
4.12	0.4319	19.6368	4.6348	4.2368	0.1254	7.9721	2.076
4.14	0.4314	19.8295	4.6450	4.2690	0.1234	8.1067	2.093
4.16	0.4309	20.0232	4.6550	4.3014	0.1213	8.2433	2.109
4.18	0.4304	20.2178	4.6650	4.3339	0.1193	8.3819	2.126
4.20	0.4299	20.4133	4.6749	4.3666	0.1173	8.5227	2.143
4.22	0.4295	20.6098	4.6847	4.3994	0.1154	8.6656	2.159
4.24	0.4290	20.8072	4.6944	4.4324	0.1135	8.8107	2.176
4.26	0.4286	21.0055	4.7040	4.4655	0.1116	8.9579	2.193
4.28	0.4281	21.2048	4.7135	4.4988	0.1098	9.1074	2.209
4.30	0.4277	21.4050	4.7229	4.5322	0.1080	9.2591	2.226
4.32	0.4272	21.6061	4.7322	4.5658	0.1062	9.4131	2.242
4.34	0.4268	21.8082	4.7414	4.5995	0.1045	9.5693	2.259
4.36	0.4264	22.0112	4.7505	4.6334	0.1028	9.7279	2.275
4.38	0.4260	22.2151	4.7595	4.6675	0.1011	9.8889	2.291
4.40	0.4255	22.4200	4.7685	4.7017	0.0995	10.0522	2.308
4.42	0.4251	22.6258	4.7773	4.7361	0.0979	10.2179	2.324
4.44	0.4247	22.8325	4.7861	4.7706	0.0963	10.3860	2.340
4.46	0.4243	23.0402	4.7948	4.8053	0.0947	10.5566	2.357
4.48	0.4239	23.2488	4.8034	4.8401	0.0932	10.7297	2.373
4.50	0.4236	23.4583	4.8119	4.8751	0.0917	10.9053	2.389
4.52	0.4232	23.6688	4.8203	4.9102	0.0902	11.0835	2.405
4.54	0.4228	23.8802	4.8287	4.9455	0.0888	11.2642	2.422
4.56	0.4224	24.0925	4.8369	4.9810	0.0874	11.4476	2.438
4.58	0.4220	24.3058	4.8451	5.0166	0.0860	11.6336	2.454
4.60	0.4217	24.5200	4.8532	5.0523	0.0846	11.8222	2.470
4.62	0.4213	24.7351	4.8612	5.0882	0.0832	12.0135	2.486
4.64	0.4210	24.9512	4.8692	5.1243	0.0819	12.2076	2.502
4.66	0.4206	25.1682	4.8771	5.1605	0.0806	12.4044	2.518
4.68	0.4203	25.3861	4.8849	5.1969	0.0793	12.6040	2.534
4.70	0.4199	25.6050	4.8926	5.2334	0.0781	12.8064	2.550
4.72	0.4196	25.8248	4.9002	5.2701	0.0769	13.0117	2.566
4.74	0.4192	26.0455	4.9078	5.3070	0.0756	13.2199	2.582
4.76	0.4189	26.2672	4.9153	5.3440	0.0745	13.4309	2.598
4.78	0.4186	26.4898	4.9227	5.3811	0.0733	13.6449	2.613
4.80	0.4183	26.7133	4.9301	5.4184	0.0721	13.8619	2.629
4.82	0.4179	26.9378	4.9374	5.4559	0.0710	14.0820	2.645
4.84	0.4176	27.1632	4.9446	5.4935	0.0699	14.3050	2.661
4.86	0.4173	27.3895	4.9518	5.5313	0.0688	14.5311	2.676
4.88	0.4170	27.6168	4.9589	5.5692	0.0677	14.7604	2.692
4.90	0.4167	27.8450	4.9659	5.6073	0.0667	14.9928	2.708
4.92	0.4164	28.0741	4.9728	5.6455	0.0657	15.2283	2.723
4.94	0.4161	28.3042	4.9797	5.6839	0.0647	15.4671	2.739
4.96	0.4158	28.5352	4.9865	5.7224	0.0637	15.7092	2.754
4.98	0.4155	28.7671	4.9933	5.7611	0.0627	15.9545	2.770
5.00	0.4152	29.0000	5.0000	5.8000	0.0617	16.2031	2.785
$\infty$	0.3780	$\infty$	6.0000	$\infty$	0	$\infty$	$\infty$

**TABLE III :** Ecoulement adiabatique d'un fluide visqueux dans une canalisation de section constante, gaz parfait ( $\gamma=1.4$ ). (Courbes de Fanno).

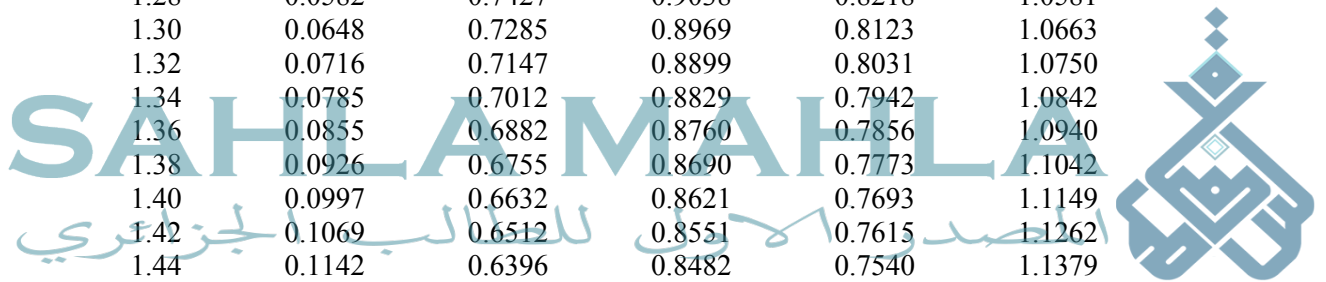
$M$	$f\bar{L}^*/D$	$p/p^*$	$T/T^*$	$\rho/\rho^*$ $V^*/V$	$p_0/p_0^*$
0.00	$\infty$	$\infty$	1.2000	$\infty$	$\infty$
0.02	1778.4500	54.7701	1.1999	45.6454	28.9421
0.04	440.3523	27.3817	1.1996	22.8254	14.4815
0.06	193.0311	18.2509	1.1991	15.2200	9.6659
0.08	106.7182	13.6843	1.1985	11.4182	7.2616
0.10	66.9216	10.9435	1.1976	9.1378	5.8218
0.12	45.4080	9.1156	1.1966	7.6182	4.8643
0.14	32.5113	7.8093	1.1953	6.5333	4.1824
0.16	24.1978	6.8291	1.1939	5.7200	3.6727
0.18	18.5427	6.0662	1.1923	5.0879	3.2779
0.20	14.5333	5.4554	1.1905	4.5826	2.9635
0.22	11.5961	4.9554	1.1885	4.1694	2.7076
0.24	9.3865	4.5383	1.1863	3.8255	2.4956
0.26	7.6876	4.1851	1.1840	3.5347	2.3173
0.28	6.3572	3.8820	1.1815	3.2857	2.1656
0.30	5.2993	3.6191	1.1788	3.0702	2.0351
0.32	4.4467	3.3887	1.1759	2.8818	1.9219
0.34	3.7520	3.1853	1.1729	2.7158	1.8229
0.36	3.1801	3.0042	1.1697	2.5684	1.7358
0.38	2.7054	2.8420	1.1663	2.4367	1.6587
0.40	2.3085	2.6958	1.1628	2.3184	1.5901
0.42	1.9744	2.5634	1.1591	2.2115	1.5289
0.44	1.6915	2.4428	1.1553	2.1145	1.4740
0.46	1.4509	2.3326	1.1513	2.0261	1.4246
0.48	1.2453	2.2313	1.1471	1.9451	1.3801
0.50	1.0691	2.1381	1.1429	1.8708	1.3398
0.52	0.9174	2.0519	1.1384	1.8024	1.3034
0.54	0.7866	1.9719	1.1339	1.7391	1.2703
0.56	0.6736	1.8975	1.1292	1.6805	1.2403
0.58	0.5757	1.8282	1.1244	1.6260	1.2130
0.60	0.4908	1.7634	1.1194	1.5753	1.1882
0.62	0.4172	1.7026	1.1143	1.5279	1.1656
0.64	0.3533	1.6456	1.1091	1.4836	1.1451
0.66	0.2979	1.5919	1.1038	1.4421	1.1265
0.68	0.2498	1.5413	1.0984	1.4032	1.1097
0.70	0.2081	1.4935	1.0929	1.3665	1.0944
0.72	0.1721	1.4482	1.0873	1.3320	1.0806
0.74	0.1411	1.4054	1.0815	1.2994	1.0681
0.76	0.1145	1.3647	1.0757	1.2686	1.0570
0.78	0.0917	1.3261	1.0698	1.2395	1.0471
0.80	0.0723	1.2893	1.0638	1.2119	1.0382
0.82	0.0559	1.2542	1.0578	1.1858	1.0305
0.84	0.0423	1.2208	1.0516	1.1609	1.0237
0.86	0.0310	1.1889	1.0454	1.1373	1.0179





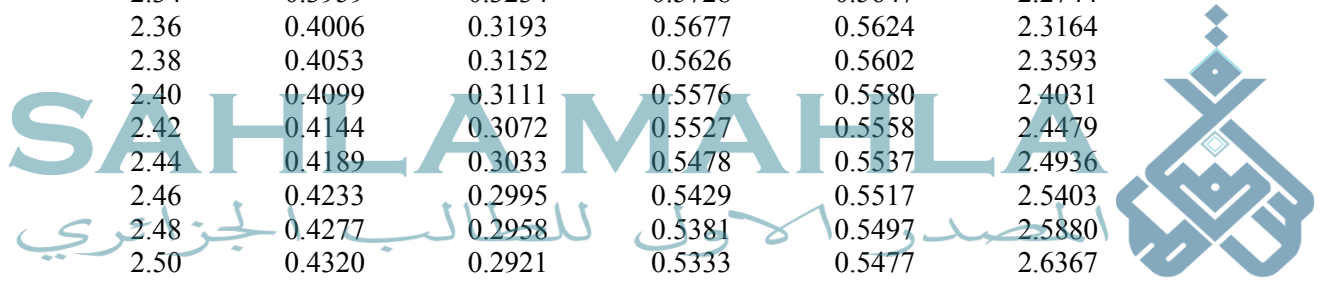
**TABLE III (Suite):** Ecoulement adiabatique d'un fluide visqueux dans une canalisation de section constante, gaz parfait ( $\gamma = 1.4$ ). (Courbes de Fanno)

$M$	$\bar{f}L^*/D$	$p/p^*$	$T/T^*$	$\rho/\rho^*$ $V^*/V$	$p_0/p_0^*$
0.88	0.0218	1.1583	1.0391	1.1148	1.0129
0.90	0.0145	1.1291	1.0327	1.0934	1.0089
0.92	0.0089	1.1011	1.0263	1.0730	1.0056
0.94	0.0048	1.0743	1.0198	1.0535	1.0031
0.96	0.0021	1.0485	1.0132	1.0348	1.0014
0.98	0.0005	1.0238	1.0066	1.0170	1.0003
1.00	0.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
1.02	0.0005	0.9771	0.9933	0.9837	1.0003
1.04	0.0018	0.9551	0.9866	0.9681	1.0013
1.06	0.0038	0.9338	0.9798	0.9531	1.0029
1.08	0.0066	0.9133	0.9730	0.9387	1.0051
1.10	0.0099	0.8936	0.9662	0.9249	1.0079
1.12	0.0138	0.8745	0.9593	0.9116	1.0113
1.14	0.0182	0.8561	0.9524	0.8988	1.0153
1.16	0.0230	0.8383	0.9455	0.8865	1.0198
1.18	0.0281	0.8210	0.9386	0.8747	1.0248
1.20	0.0336	0.8044	0.9317	0.8633	1.0304
1.22	0.0394	0.7882	0.9247	0.8524	1.0366
1.24	0.0455	0.7726	0.9178	0.8418	1.0432
1.26	0.0517	0.7574	0.9108	0.8316	1.0504
1.28	0.0582	0.7427	0.9038	0.8218	1.0581
1.30	0.0648	0.7285	0.8969	0.8123	1.0663
1.32	0.0716	0.7147	0.8899	0.8031	1.0750
1.34	0.0785	0.7012	0.8829	0.7942	1.0842
1.36	0.0855	0.6882	0.8760	0.7856	1.0940
1.38	0.0926	0.6755	0.8690	0.7773	1.1042
1.40	0.0997	0.6632	0.8621	0.7693	1.1149
1.42	0.1069	0.6512	0.8551	0.7615	1.1262
1.44	0.1142	0.6396	0.8482	0.7540	1.1379
1.46	0.1215	0.6282	0.8413	0.7467	1.1501
1.48	0.1288	0.6172	0.8344	0.7397	1.1629
1.50	0.1360	0.6065	0.8276	0.7328	1.1762
1.52	0.1433	0.5960	0.8207	0.7262	1.1899
1.54	0.1506	0.5858	0.8139	0.7198	1.2042
1.56	0.1579	0.5759	0.8071	0.7135	1.2190
1.58	0.1651	0.5662	0.8004	0.7074	1.2344
1.60	0.1724	0.5568	0.7937	0.7016	1.2502
1.62	0.1795	0.5476	0.7869	0.6958	1.2666
1.64	0.1867	0.5386	0.7803	0.6903	1.2836
1.66	0.1938	0.5299	0.7736	0.6849	1.3010
1.68	0.2008	0.5213	0.7670	0.6796	1.3190
1.70	0.2078	0.5130	0.7605	0.6745	1.3376
1.72	0.2147	0.5048	0.7539	0.6696	1.3567
1.74	0.2216	0.4969	0.7474	0.6648	1.3764
1.76	0.2284	0.4891	0.7410	0.6601	1.3967
1.78	0.2352	0.4815	0.7345	0.6555	1.4175
1.80	0.2419	0.4741	0.7282	0.6511	1.4390
1.82	0.2485	0.4668	0.7218	0.6467	1.4610
1.84	0.2551	0.4597	0.7155	0.6425	1.4836
1.86	0.2616	0.4528	0.7093	0.6384	1.5069
1.88	0.2680	0.4460	0.7030	0.6344	1.5308
1.90	0.2743	0.4394	0.6969	0.6305	1.5553
1.92	0.2806	0.4329	0.6907	0.6267	1.5804



**TABLE III (Suite):** Ecoulement adiabatique d'un fluide visqueux dans une canalisation de section constante, gaz parfait ( $\gamma = 1.4$ ). (Courbes de Fanno)

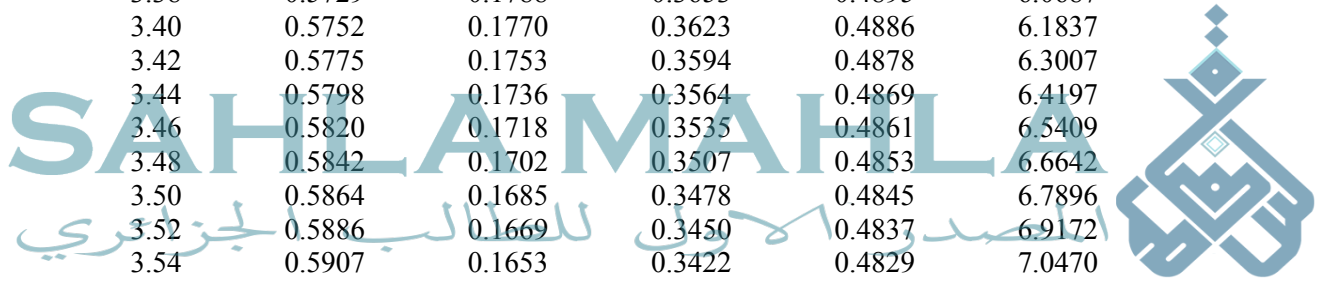
$M$	$\bar{f}L^*/D$	$p/p^*$	$T/T^*$	$\rho/\rho^*$ $V^*/V$	$p_0/p_0^*$
1.94	0.2868	0.4265	0.6847	0.6230	1.6062
1.96	0.2929	0.4203	0.6786	0.6193	1.6326
1.98	0.2990	0.4142	0.6726	0.6158	1.6597
2.00	0.3050	0.4082	0.6667	0.6124	1.6875
2.02	0.3109	0.4024	0.6608	0.6090	1.7160
2.04	0.3168	0.3967	0.6549	0.6057	1.7451
2.06	0.3225	0.3911	0.6491	0.6025	1.7750
2.08	0.3282	0.3856	0.6433	0.5994	1.8056
2.10	0.3339	0.3802	0.6376	0.5963	1.8369
2.12	0.3394	0.3750	0.6320	0.5934	1.8690
2.14	0.3449	0.3698	0.6263	0.5905	1.9018
2.16	0.3503	0.3648	0.6208	0.5876	1.9354
2.18	0.3556	0.3598	0.6152	0.5848	1.9698
2.20	0.3609	0.3549	0.6098	0.5821	2.0050
2.22	0.3661	0.3502	0.6043	0.5794	2.0409
2.24	0.3712	0.3455	0.5989	0.5768	2.0777
2.26	0.3763	0.3409	0.5936	0.5743	2.1153
2.28	0.3813	0.3364	0.5883	0.5718	2.1538
2.30	0.3862	0.3320	0.5831	0.5694	2.1931
2.32	0.3911	0.3277	0.5779	0.5670	2.2333
2.34	0.3959	0.3234	0.5728	0.5647	2.2744
2.36	0.4006	0.3193	0.5677	0.5624	2.3164
2.38	0.4053	0.3152	0.5626	0.5602	2.3593
2.40	0.4099	0.3111	0.5576	0.5580	2.4031
2.42	0.4144	0.3072	0.5527	0.5558	2.4479
2.44	0.4189	0.3033	0.5478	0.5537	2.4936
2.46	0.4233	0.2995	0.5429	0.5517	2.5403
2.48	0.4277	0.2958	0.5381	0.5497	2.5880
2.50	0.4320	0.2921	0.5333	0.5477	2.6367
2.52	0.4362	0.2885	0.5286	0.5458	2.6864
2.54	0.4404	0.2850	0.5239	0.5439	2.7372
2.56	0.4445	0.2815	0.5193	0.5421	2.7891
2.58	0.4486	0.2781	0.5147	0.5402	2.8420
2.60	0.4526	0.2747	0.5102	0.5385	2.8960
2.62	0.4565	0.2714	0.5057	0.5367	2.9511
2.64	0.4604	0.2682	0.5013	0.5350	3.0073
2.66	0.4643	0.2650	0.4969	0.5333	3.0647
2.68	0.4681	0.2619	0.4925	0.5317	3.1233
2.70	0.4718	0.2588	0.4882	0.5301	3.1830
2.72	0.4755	0.2558	0.4839	0.5285	3.2439
2.74	0.4791	0.2528	0.4797	0.5269	3.3061
2.76	0.4827	0.2498	0.4755	0.5254	3.3695
2.78	0.4863	0.2470	0.4714	0.5239	3.4342
2.80	0.4898	0.2441	0.4673	0.5225	3.5001
2.82	0.4932	0.2414	0.4632	0.5210	3.5674
2.84	0.4966	0.2386	0.4592	0.5196	3.6359
2.86	0.5000	0.2359	0.4552	0.5182	3.7058
2.88	0.5033	0.2333	0.4513	0.5169	3.7771
2.90	0.5065	0.2307	0.4474	0.5155	3.8498
2.92	0.5097	0.2281	0.4436	0.5142	3.9238
2.94	0.5129	0.2256	0.4398	0.5129	3.9993
2.96	0.5160	0.2231	0.4360	0.5116	4.0762
2.98	0.5191	0.2206	0.4323	0.5104	4.1547





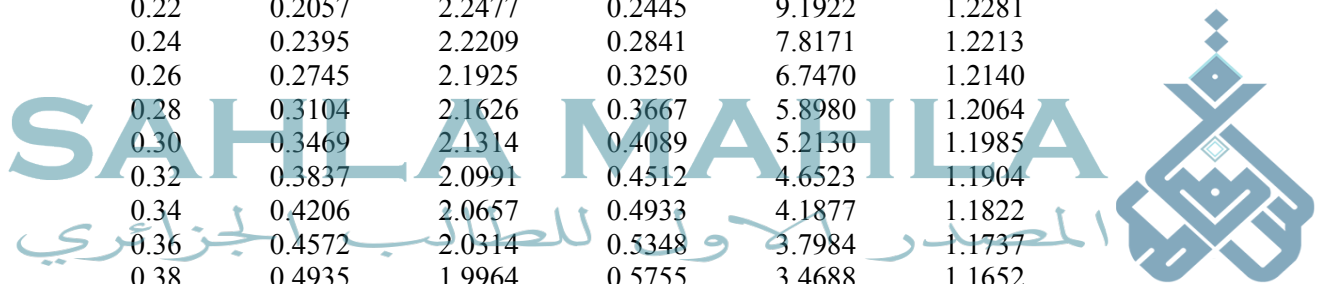
**TABLE III (Suite):** Ecoulement adiabatique d'un fluide visqueux dans une canalisation de section constante, gaz parfait ( $\gamma = 1.4$ ). (Courbes de Fanno)

$M$	$\bar{f}L^*/D$	$p/p^*$	$T/T^*$	$\rho/\rho^*$ $V^*/V$	$p_0/p_0^*$
3.00	0.5222	0.2182	0.4286	0.5092	4.2346
3.02	0.5252	0.2158	0.4249	0.5080	4.3160
3.04	0.5281	0.2135	0.4213	0.5068	4.3989
3.06	0.5310	0.2112	0.4177	0.5056	4.4835
3.08	0.5339	0.2090	0.4142	0.5045	4.5696
3.10	0.5368	0.2067	0.4107	0.5034	4.6573
3.12	0.5396	0.2045	0.4072	0.5023	4.7467
3.14	0.5424	0.2024	0.4038	0.5012	4.8377
3.16	0.5451	0.2002	0.4004	0.5001	4.9304
3.18	0.5478	0.1981	0.3970	0.4991	5.0248
3.20	0.5504	0.1961	0.3937	0.4980	5.1209
3.22	0.5531	0.1940	0.3904	0.4970	5.2189
3.24	0.5557	0.1920	0.3872	0.4960	5.3186
3.26	0.5582	0.1901	0.3839	0.4951	5.4201
3.28	0.5607	0.1881	0.3807	0.4941	5.5234
3.30	0.5632	0.1862	0.3776	0.4931	5.6286
3.32	0.5657	0.1843	0.3745	0.4922	5.7357
3.34	0.5681	0.1825	0.3714	0.4913	5.8448
3.36	0.5705	0.1806	0.3683	0.4904	5.9558
3.38	0.5729	0.1788	0.3653	0.4895	6.0687
3.40	0.5752	0.1770	0.3623	0.4886	6.1837
3.42	0.5775	0.1753	0.3594	0.4878	6.3007
3.44	0.5798	0.1736	0.3564	0.4869	6.4197
3.46	0.5820	0.1718	0.3535	0.4861	6.5409
3.48	0.5842	0.1702	0.3507	0.4853	6.6642
3.50	0.5864	0.1685	0.3478	0.4845	6.7896
3.52	0.5886	0.1669	0.3450	0.4837	6.9172
3.54	0.5907	0.1653	0.3422	0.4829	7.0470
3.56	0.5928	0.1637	0.3395	0.4821	7.1791
3.58	0.5949	0.1621	0.3368	0.4813	7.3134
3.60	0.5970	0.1606	0.3341	0.4806	7.4501
3.62	0.5990	0.1590	0.3314	0.4799	7.5891
3.64	0.6010	0.1575	0.3288	0.4791	7.7304
3.66	0.6030	0.1560	0.3262	0.4784	7.8742
3.68	0.6049	0.1546	0.3236	0.4777	8.0204
3.70	0.6068	0.1531	0.3210	0.4770	8.1690
3.72	0.6087	0.1517	0.3185	0.4763	8.3202
3.74	0.6106	0.1503	0.3160	0.4757	8.4739
3.76	0.6125	0.1489	0.3135	0.4750	8.6302
3.78	0.6143	0.1475	0.3111	0.4743	8.7891
3.80	0.6161	0.1462	0.3086	0.4737	8.9506
3.82	0.6179	0.1449	0.3062	0.4730	9.1147
3.84	0.6197	0.1436	0.3039	0.4724	9.2816
3.86	0.6214	0.1423	0.3015	0.4718	9.4513
3.88	0.6231	0.1410	0.2992	0.4712	9.6237
3.90	0.6248	0.1397	0.2969	0.4706	9.7989
3.92	0.6265	0.1385	0.2946	0.4700	9.9770
3.94	0.6282	0.1372	0.2923	0.4694	10.1580
3.96	0.6298	0.1360	0.2901	0.4688	10.3419
3.98	0.6315	0.1348	0.2879	0.4683	10.5288
4.00	0.6331	0.1336	0.2857	0.4677	10.7187
$\infty$	0.8215	0	0	0.4082	$\infty$



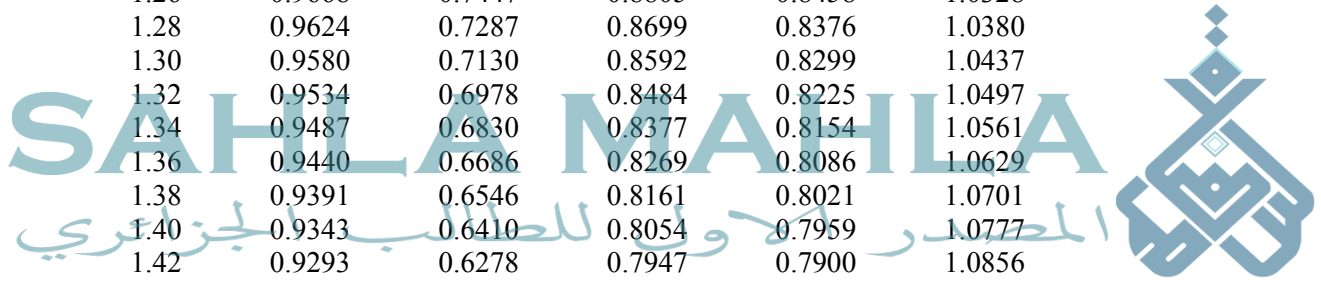
**TABLE IV:** Ecoulement compressible non visqueux avec transfert de chaleur dans une canalisation de section constante, gaz parfait ( $\gamma=1.4$ ). (Courbes de Rayleigh).

$M$	$T_0/T_0^*$	$p/p^*$	$T/T^*$	$\rho/\rho^*$ $V^*/V$	$p_0/p_0^*$
0.00	0.0000	2.4000	0.0000	$\infty$	1.2679
0.02	0.0019	2.3987	0.0023	1042.2500	1.2675
0.04	0.0076	2.3946	0.0092	261.0000	1.2665
0.06	0.0171	2.3880	0.0205	116.3241	1.2647
0.08	0.0302	2.3787	0.0362	65.6875	1.2623
0.10	0.0468	2.3669	0.0560	42.2500	1.2591
0.12	0.0666	2.3526	0.0797	29.5185	1.2554
0.14	0.0895	2.3359	0.1069	21.8418	1.2510
0.16	0.1151	2.3170	0.1374	16.8594	1.2461
0.18	0.1432	2.2959	0.1708	13.4434	1.2406
0.20	0.1736	2.2727	0.2066	11.0000	1.2346
0.22	0.2057	2.2477	0.2445	9.1922	1.2281
0.24	0.2395	2.2209	0.2841	7.8171	1.2213
0.26	0.2745	2.1925	0.3250	6.7470	1.2140
0.28	0.3104	2.1626	0.3667	5.8980	1.2064
0.30	0.3469	2.1314	0.4089	5.2130	1.1985
0.32	0.3837	2.0991	0.4512	4.6523	1.1904
0.34	0.4206	2.0657	0.4933	4.1877	1.1822
0.36	0.4572	2.0314	0.5348	3.7984	1.1737
0.38	0.4935	1.9964	0.5755	3.4688	1.1652
0.40	0.5290	1.9608	0.6151	3.1875	1.1566
0.42	0.5638	1.9247	0.6535	2.9454	1.1480
0.44	0.5975	1.8882	0.6903	2.7355	1.1394
0.46	0.6301	1.8515	0.7254	2.5525	1.1308
0.48	0.6614	1.8147	0.7587	2.3918	1.1224
0.50	0.6914	1.7778	0.7901	2.2500	1.1141
0.52	0.7199	1.7409	0.8196	2.1243	1.1059
0.54	0.7470	1.7043	0.8469	2.0122	1.0979
0.56	0.7725	1.6678	0.8723	1.9120	1.0901
0.58	0.7965	1.6316	0.8955	1.8219	1.0826
0.60	0.8189	1.5957	0.9167	1.7407	1.0753
0.62	0.8398	1.5603	0.9358	1.6673	1.0682
0.64	0.8592	1.5253	0.9530	1.6006	1.0615
0.66	0.8771	1.4908	0.9682	1.5399	1.0550
0.68	0.8935	1.4569	0.9814	1.4844	1.0489
0.70	0.9085	1.4235	0.9929	1.4337	1.0431
0.72	0.9221	1.3907	1.0026	1.3871	1.0376
0.74	0.9344	1.3585	1.0106	1.3442	1.0325
0.76	0.9455	1.3270	1.0171	1.3047	1.0278
0.78	0.9553	1.2961	1.0220	1.2682	1.0234
0.80	0.9639	1.2658	1.0255	1.2344	1.0193
0.82	0.9715	1.2362	1.0276	1.2030	1.0157
0.84	0.9781	1.2073	1.0285	1.1738	1.0124



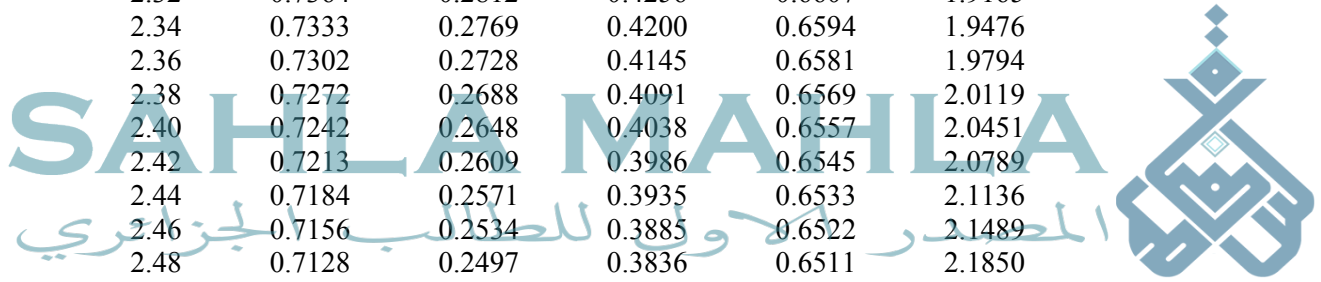
**TABLE IV (Suite):** Ecoulement compressible non visqueux avec transfert de chaleur dans une canalisation de section constante, gaz parfait ( $\gamma = 1.4$ ) (Courbes de Rayleigh).

$M$	$T_0 / T_0^*$	$p / p^*$	$T / T^*$	$\rho / \rho^*$ $V^* / V$	$p_0 / p_0^*$
0.86	0.9836	1.1791	1.0283	1.1467	1.0095
0.88	0.9883	1.1515	1.0269	1.1214	1.0070
0.90	0.9921	1.1246	1.0245	1.0977	1.0049
0.92	0.9951	1.0984	1.0212	1.0756	1.0031
0.94	0.9973	1.0728	1.0170	1.0549	1.0017
0.96	0.9988	1.0479	1.0121	1.0354	1.0008
0.98	0.9997	1.0236	1.0064	1.0172	1.0002
1.00	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
1.02	0.9997	0.9770	0.9930	0.9838	1.0002
1.04	0.9989	0.9546	0.9855	0.9686	1.0008
1.06	0.9977	0.9327	0.9776	0.9542	1.0017
1.08	0.9960	0.9115	0.9691	0.9406	1.0031
1.10	0.9939	0.8909	0.9603	0.9277	1.0049
1.12	0.9915	0.8708	0.9512	0.9155	1.0070
1.14	0.9887	0.8512	0.9417	0.9039	1.0095
1.16	0.9856	0.8322	0.9320	0.8930	1.0124
1.18	0.9823	0.8137	0.9220	0.8826	1.0157
1.20	0.9787	0.7958	0.9118	0.8727	1.0194
1.22	0.9749	0.7783	0.9015	0.8633	1.0235
1.24	0.9709	0.7613	0.8911	0.8543	1.0279
1.26	0.9668	0.7447	0.8805	0.8458	1.0328
1.28	0.9624	0.7287	0.8699	0.8376	1.0380
1.30	0.9580	0.7130	0.8592	0.8299	1.0437
1.32	0.9534	0.6978	0.8484	0.8225	1.0497
1.34	0.9487	0.6830	0.8377	0.8154	1.0561
1.36	0.9440	0.6686	0.8269	0.8086	1.0629
1.38	0.9391	0.6546	0.8161	0.8021	1.0701
1.40	0.9343	0.6410	0.8054	0.7959	1.0777
1.42	0.9293	0.6278	0.7947	0.7900	1.0856
1.44	0.9243	0.6149	0.7840	0.7843	1.0940
1.46	0.9193	0.6024	0.7735	0.7788	1.1028
1.48	0.9143	0.5902	0.7629	0.7736	1.1120
1.50	0.9093	0.5783	0.7525	0.7685	1.1215
1.52	0.9042	0.5668	0.7422	0.7637	1.1315
1.54	0.8992	0.5555	0.7319	0.7590	1.1419
1.56	0.8942	0.5446	0.7217	0.7545	1.1527
1.58	0.8892	0.5339	0.7117	0.7502	1.1640
1.60	0.8842	0.5236	0.7017	0.7461	1.1756
1.62	0.8792	0.5135	0.6919	0.7421	1.1877
1.64	0.8743	0.5036	0.6822	0.7383	1.2002
1.66	0.8694	0.4940	0.6726	0.7345	1.2131
1.68	0.8645	0.4847	0.6631	0.7310	1.2264
1.70	0.8597	0.4756	0.6538	0.7275	1.2402
1.72	0.8549	0.4668	0.6445	0.7242	1.2545
1.74	0.8502	0.4581	0.6355	0.7210	1.2692
1.76	0.8455	0.4497	0.6265	0.7178	1.2843
1.78	0.8409	0.4415	0.6176	0.7148	1.2999
1.80	0.8363	0.4335	0.6089	0.7119	1.3159
1.82	0.8317	0.4257	0.6004	0.7091	1.3324
1.84	0.8273	0.4181	0.5919	0.7064	1.3494
1.86	0.8228	0.4107	0.5836	0.7038	1.3669
1.88	0.8185	0.4035	0.5754	0.7012	1.3849
1.90	0.8141	0.3964	0.5673	0.6988	1.4033



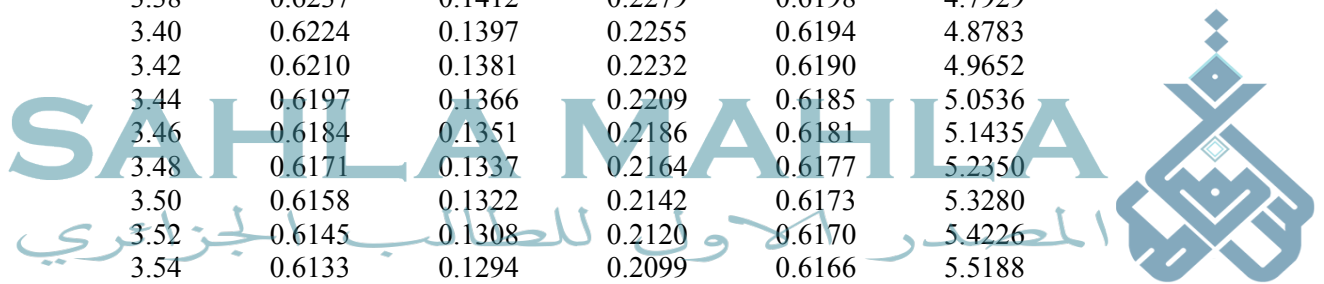
**TABLE IV (Suite):** Ecoulement compressible non visqueux avec transfert de chaleur dans une canalisation de section constante, gaz parfait ( $\gamma = 1.4$ ) (Courbes de Rayleigh).

$M$	$T_0 / T_0^*$	$p / p^*$	$T / T^*$	$\rho / \rho^*$ $V^* / V$	$p_0 / p_0^*$
1.92	0.8099	0.3896	0.5594	0.6964	1.4222
1.94	0.8057	0.3828	0.5516	0.6940	1.4417
1.96	0.8015	0.3763	0.5439	0.6918	1.4616
1.98	0.7974	0.3699	0.5364	0.6896	1.4821
2.00	0.7934	0.3636	0.5289	0.6875	1.5031
2.02	0.7894	0.3575	0.5216	0.6854	1.5246
2.04	0.7855	0.3516	0.5144	0.6835	1.5467
2.06	0.7816	0.3458	0.5074	0.6815	1.5693
2.08	0.7778	0.3401	0.5004	0.6796	1.5924
2.10	0.7741	0.3345	0.4936	0.6778	1.6162
2.12	0.7704	0.3291	0.4868	0.6760	1.6404
2.14	0.7667	0.3238	0.4802	0.6743	1.6653
2.16	0.7631	0.3186	0.4737	0.6726	1.6908
2.18	0.7596	0.3136	0.4673	0.6710	1.7168
2.20	0.7561	0.3086	0.4611	0.6694	1.7434
2.22	0.7527	0.3038	0.4549	0.6679	1.7707
2.24	0.7493	0.2991	0.4488	0.6664	1.7986
2.26	0.7460	0.2945	0.4428	0.6649	1.8271
2.28	0.7428	0.2899	0.4370	0.6635	1.8562
2.30	0.7395	0.2855	0.4312	0.6621	1.8860
2.32	0.7364	0.2812	0.4256	0.6607	1.9165
2.34	0.7333	0.2769	0.4200	0.6594	1.9476
2.36	0.7302	0.2728	0.4145	0.6581	1.9794
2.38	0.7272	0.2688	0.4091	0.6569	2.0119
2.40	0.7242	0.2648	0.4038	0.6557	2.0451
2.42	0.7213	0.2609	0.3986	0.6545	2.0789
2.44	0.7184	0.2571	0.3935	0.6533	2.1136
2.46	0.7156	0.2534	0.3885	0.6522	2.1489
2.48	0.7128	0.2497	0.3836	0.6511	2.1850
2.50	0.7101	0.2462	0.3787	0.6500	2.2218
2.52	0.7074	0.2427	0.3739	0.6489	2.2594
2.54	0.7047	0.2392	0.3692	0.6479	2.2978
2.56	0.7021	0.2359	0.3646	0.6469	2.3370
2.58	0.6995	0.2326	0.3601	0.6459	2.3770
2.60	0.6970	0.2294	0.3556	0.6450	2.4177
2.62	0.6945	0.2262	0.3512	0.6440	2.4593
2.64	0.6921	0.2231	0.3469	0.6431	2.5018
2.66	0.6896	0.2201	0.3427	0.6422	2.5451
2.68	0.6873	0.2171	0.3385	0.6413	2.5892
2.70	0.6849	0.2142	0.3344	0.6405	2.6343
2.72	0.6826	0.2113	0.3304	0.6397	2.6802
2.74	0.6804	0.2085	0.3264	0.6388	2.7270
2.76	0.6781	0.2058	0.3225	0.6380	2.7748
2.78	0.6760	0.2031	0.3186	0.6372	2.8235
2.80	0.6738	0.2004	0.3149	0.6365	2.8731
2.82	0.6717	0.1978	0.3111	0.6357	2.9237
2.84	0.6696	0.1953	0.3075	0.6350	2.9752
2.86	0.6675	0.1927	0.3039	0.6343	3.0277
2.88	0.6655	0.1903	0.3004	0.6336	3.0813
2.90	0.6635	0.1879	0.2969	0.6329	3.1358
2.92	0.6615	0.1855	0.2934	0.6322	3.1914
2.94	0.6596	0.1832	0.2901	0.6315	3.2481
2.96	0.6577	0.1809	0.2868	0.6309	3.3058



**TABLE IV (Suite):** Ecoulement compressible non visqueux avec transfert de chaleur dans une canalisation de section constante, gaz parfait ( $\gamma = 1.4$ ) (Courbes de Rayleigh).

$M$	$T_0 / T_0^*$	$p / p^*$	$T / T^*$	$\rho / \rho^*$ $V^* / V$	$p_0 / p_0^*$
2.98	0.6558	0.1787	0.2835	0.6303	3.3646
3.00	0.6540	0.1765	0.2803	0.6296	3.4244
3.02	0.6522	0.1743	0.2771	0.6290	3.4854
3.04	0.6504	0.1722	0.2740	0.6284	3.5476
3.06	0.6486	0.1701	0.2709	0.6278	3.6108
3.08	0.6469	0.1681	0.2679	0.6273	3.6752
3.10	0.6452	0.1660	0.2650	0.6267	3.7408
3.12	0.6435	0.1641	0.2620	0.6261	3.8076
3.14	0.6418	0.1621	0.2592	0.6256	3.8756
3.16	0.6402	0.1602	0.2563	0.6251	3.9449
3.18	0.6386	0.1583	0.2535	0.6245	4.0154
3.20	0.6370	0.1565	0.2508	0.6240	4.0871
3.22	0.6354	0.1547	0.2481	0.6235	4.1601
3.24	0.6339	0.1529	0.2454	0.6230	4.2345
3.26	0.6324	0.1511	0.2428	0.6225	4.3101
3.28	0.6309	0.1494	0.2402	0.6221	4.3871
3.30	0.6294	0.1477	0.2377	0.6216	4.4655
3.32	0.6280	0.1461	0.2352	0.6211	4.5452
3.34	0.6265	0.1444	0.2327	0.6207	4.6263
3.36	0.6251	0.1428	0.2303	0.6202	4.7089
3.38	0.6237	0.1412	0.2279	0.6198	4.7929
3.40	0.6224	0.1397	0.2255	0.6194	4.8783
3.42	0.6210	0.1381	0.2232	0.6190	4.9652
3.44	0.6197	0.1366	0.2209	0.6185	5.0536
3.46	0.6184	0.1351	0.2186	0.6181	5.1435
3.48	0.6171	0.1337	0.2164	0.6177	5.2350
3.50	0.6158	0.1322	0.2142	0.6173	5.3280
3.52	0.6145	0.1308	0.2120	0.6170	5.4226
3.54	0.6133	0.1294	0.2099	0.6166	5.5188
3.56	0.6121	0.1280	0.2078	0.6162	5.6167
3.58	0.6109	0.1267	0.2057	0.6158	5.7161
3.60	0.6097	0.1254	0.2037	0.6155	5.8173
3.62	0.6085	0.1241	0.2017	0.6151	5.9201
3.64	0.6074	0.1228	0.1997	0.6148	6.0247
3.66	0.6062	0.1215	0.1977	0.6144	6.1310
3.68	0.6051	0.1202	0.1958	0.6141	6.2390
3.70	0.6040	0.1190	0.1939	0.6138	6.3488
3.72	0.6029	0.1178	0.1920	0.6134	6.4605
3.74	0.6018	0.1166	0.1902	0.6131	6.5739
3.76	0.6008	0.1154	0.1884	0.6128	6.6892
3.78	0.5997	0.1143	0.1866	0.6125	6.8064
3.80	0.5987	0.1131	0.1848	0.6122	6.9255
3.82	0.5977	0.1120	0.1830	0.6119	7.0466
3.84	0.5967	0.1109	0.1813	0.6116	7.1696
3.86	0.5957	0.1098	0.1796	0.6113	7.2945
3.88	0.5947	0.1087	0.1779	0.6110	7.4215
3.90	0.5937	0.1077	0.1763	0.6107	7.5505
3.92	0.5928	0.1066	0.1746	0.6104	7.6815
3.94	0.5918	0.1056	0.1730	0.6102	7.8147
3.96	0.5909	0.1046	0.1714	0.6099	7.9499
3.98	0.5900	0.1036	0.1699	0.6096	8.0873
4.00	0.5891	0.1026	0.1683	0.6094	8.2268
$\infty$	0.4898	0	0	0.5833	$\infty$



# APPENDICE I

Quelques facteurs de conversion entre les unités du système international (SI) et le système English Engineering (EE)

<b>Longueur</b>	<b>Volume</b>
1 <i>ft</i> = 12 <i>in</i> = 0.3048 <i>m</i> 1 <i>mi</i> = 5280 <i>ft</i> = 1609.344 <i>m</i> 1 <i>mile nautique (nmi)</i> = 6076 <i>ft</i> = 1852 <i>m</i> 1 <i>yd</i> = 3 <i>ft</i> = 0.9144 <i>m</i> 1 <i>Angstrom (Å)</i> = 1.0x10 <sup>-10</sup> <i>m</i>	1 <i>ft</i> <sup>3</sup> = 0.028317 <i>m</i> <sup>3</sup> 1 <i>U.S. gal</i> = 231 <i>in</i> <sup>3</sup> = 0.0037854 <i>m</i> <sup>3</sup> 1 <i>L</i> = 0.001 <i>m</i> <sup>3</sup> = 0.035315 <i>ft</i> <sup>3</sup> 1 <i>ounce</i> = 2.9574x10 <sup>-5</sup> <i>m</i> <sup>3</sup> 1 <i>U.S. quart (qt)</i> = 9.4635x10 <sup>-4</sup> <i>m</i> <sup>3</sup>
<b>Masse</b>	<b>Surface</b>
1 <i>livre-masse (lbm)</i> = 0.4536 <i>kg</i> 1 <i>slug</i> = 32.174 <i>lbm</i> = 14.594 <i>kg</i>	1 <i>ft</i> <sup>2</sup> = 0.092903 <i>m</i> <sup>2</sup> 1 <i>mi</i> <sup>2</sup> = 2.78784x10 <sup>7</sup> <i>ft</i> <sup>2</sup> = 2.59x10 <sup>6</sup> <i>m</i> <sup>2</sup> 1 <i>acre</i> = 43560 <i>ft</i> <sup>2</sup> = 4046.9 <i>m</i> <sup>2</sup>
<b>Débit massique</b>	<b>Débit volumique</b>
1 <i>slug/s</i> = 14.594 <i>kg/s</i> 1 <i>lbm/s</i> = 0.4536 <i>kg/s</i>	1 <i>gal/min</i> = 0.002228 <i>ft</i> <sup>3</sup> / <i>s</i> = 0.06309 <i>L/s</i>
<b>Pression</b>	<b>Force</b>
1 <i>lbf/ft</i> <sup>2</sup> = 47.88 <i>Pa</i> 1 <i>psia (lbf/in</i> <sup>2</sup> ) = 144 <i>lbf/ft</i> <sup>2</sup> = 6895 <i>Pa</i> 1 <i>atm</i> = 14.696 <i>psia</i> = 101325 <i>Pa</i> 1 <i>inHg (à 20°C)</i> = 3375 <i>Pa</i>	1 <i>livre-force (lbf)</i> = 4.448222 <i>N</i> 1 <i>kgf</i> = 2.2046 <i>lbf</i> = 9.80665 <i>N</i> 1 <i>dyne</i> = 10x10 <sup>-5</sup> <i>N</i>
<b>Energie</b>	<b>Puissance</b>
1 <i>ft·lbf</i> = 1.35582 <i>J</i> 1 <i>Btu</i> = 252 <i>cal</i> = 1055.056 <i>J</i> = 778.17 <i>ft·lbf</i>	1 <i>hp</i> = 550 <i>ft·lbf/s</i> = 745.7 <i>W</i> 1 <i>ft·lbf/s</i> = 1.3558 <i>W</i>
<b>Densité</b>	<b>Poids spécifique</b>
1 <i>lbf/ft</i> <sup>3</sup> = 157.09 <i>N/m</i> <sup>3</sup>	1 <i>slug/ft</i> <sup>3</sup> = 515.38 <i>kg/m</i> <sup>3</sup> 1 <i>lbm/ft</i> <sup>3</sup> = 16.0185 <i>kg/m</i> <sup>3</sup>
<b>Viscosité</b>	<b>Viscosité cinématique</b>
1 <i>slug / (ft·s)</i> = 47.88 <i>kg/(m·s)</i> 1 <i>poise (P)</i> = 1 <i>g/(cm·s)</i> = 0.1 <i>kg/(m·s)</i>	1 <i>ft</i> <sup>2</sup> / <i>h</i> = 0.000025806 <i>m</i> <sup>2</sup> / <i>s</i> 1 <i>stokes (St)</i> = 1 <i>cm</i> <sup>2</sup> / <i>s</i> = 0.0001 <i>m</i> <sup>2</sup> / <i>s</i>
<b>Echelles de température</b>	
$T_F = \frac{9}{5}T_C + 32 \qquad T_C = \frac{5}{9}(T_F - 32) \qquad T_R = T_F + 459.69 \qquad T_K = T_C + 273.15$	
Les indices F, C, R et K désignent les lectures en Fahrenheit, Celsius, Rankine et Kelvin respectivement	
<b>Chaleur spécifique</b>	<b>Conductivité thermique</b>
1 <i>ft·lbf/(slug·°R)</i> = 0.16723 <i>N·m/(kg·K)</i> 1 <i>Btu/(lbm·°R)</i> = 4186.8 <i>J/(kg·K)</i>	1 <i>Btu/(h·ft·°R)</i> = 1.7307 <i>W/(m·K)</i>

## APPEDICE II

### I. Dérivée totale d'une fonction à plusieurs variables :

Si la fonction réelle de plusieurs variables indépendantes  $F(x, y, z, \dots, t)$  est différentiable, sa différentielle (dérivée) totale est définie par :

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy + \frac{\partial F}{\partial z} dz + \dots + \frac{\partial F}{\partial t} dt$$

Toute fonction continue de plusieurs variables ayant des différentielles partielles continues pour toutes les variables est différentiable. Mais sa différentiabilité ne résulte pas de la seule existence de dérivées partielles pour toutes les variables.

### II. Dérivée logarithmique d'une fonction :

Si la fonction réelle  $F(x, y, z, \dots, t)$  est différentiable, sa dérivée logarithmique est :

$$d(\ln F) = \frac{dF}{F}$$

### III. Série de Taylor pour les fonctions d'une seule variable :

Une fonction  $y = f(x)$ , continue est ayant toutes ses dérivées pour  $x = a$ , peut, dans de nombreux cas, être présentée sous la forme de somme d'une série de puissances entières obtenues suivant la formule de Taylor :

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1!} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \dots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + R_n$$

Cette formule est applicable aux valeurs de  $x$  pour lesquelles le reste  $R_n$  tend vers zéro pour  $n \rightarrow \infty$ . L'expression du reste est :

$$R_n = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi), \quad (0 < \xi < a)$$

### IV. Valeur moyenne d'une fonction :

La valeur moyenne  $\bar{f}$  d'une fonction  $f(x)$ , continue dans un intervalle  $[a, b]$  est définie par :

$$\bar{f} = \frac{1}{(b-a)} \int_a^b f(x) dx$$



## V. Formules du coefficient de frottement :

Le coefficient de frottement de Darcy  $f$  est calculé par :

$$\star f = \frac{64}{R_e} \quad \text{Pour un écoulement laminaire ( } R_e < 2000 \text{ )}$$

$$\star f = 0.316 R_e^{-\frac{1}{4}}$$

Formule de Blasius pour un écoulement turbulent ( $4000 < R_e < 10^5$ )

$$\star \frac{1}{\sqrt{f}} = 2.0 \cdot \log_{10} (R_e \sqrt{f}) - 0.8$$

Formule de Von Karman pour un écoulement turbulent dans les tuyaux lisses.

$$\star \frac{1}{\sqrt{f}} = -2.0 \cdot \log_{10} \left( \frac{\varepsilon / D}{3.7} + \frac{2.51}{R_e \sqrt{f}} \right)$$

Formule de Colebrook pour un écoulement dans les tuyaux rugueux.

où  $R_e = \rho V D / \mu$  est le nombre de Reynolds de l'écoulement,  $\varepsilon / D$  est la rugosité relative de la conduite.

Cette dernière formule est la formule acceptée dans l'industrie pour la friction turbulente, il a été tracé en 1944 par Moody dans ce qui est maintenant appelé le diagramme de Moody pour la friction de pipe (tuyaux). Le diagramme de Moody est probablement la figure la plus célèbre et utile dans la majorité des références de la mécanique des fluides.



## RÉFÉRENCES

- ☆ Gahmousse A. : Cours de gazodynamique enseignés aux étudiants du 4<sup>ème</sup> année génie mécanique, 2004.
- ☆ Joseph M. Powers : Aerospace Engineering 360, Aerodynamics II, Spring 1997.
- ☆ Frank M. White : Fluid mechanics, Forth Edition, McGraw-Hill 2001.
- ☆ Nakayama Y. & Boucher R.F. : Introduction to Fluid Mechanics, Butterworth-Heinemann 2000.

