Pr. Chaabane Djamal

12/12/2015 06:53:52

Chaînes de Markov

PREMIÈRE ANNÉE MASTER

ROMARIN

Département de Recherche Opérationnelle

USTHB- /Faculté des Mathématique

Le Plan du cours

Pr. Chaabane Djamal

12/12/2015 06:53:52

Plan

Pr. Chaabane Djamal

12/12/2015 06:53:52

Pr. Chaabane Djamal

- On considère un espace de probabilité $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.

Pr. Chaabane Djamal

- On considère un espace de probabilité $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.
- $X_1, \cdots, X_n$ une suite de variables aléatoires de valeurs dans un ensemble E; $n \in \mathbb{N}$.

Pr. Chaabane Djamal

- On considère un espace de probabilité $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.
- $X_1, \cdots, X_n$ une suite de variables aléatoires de valeurs dans un ensemble E; $n \in \mathbb{N}$.
- Quand X_n prend la valeur i,

Pr. Chaabane Djamal

- On considère un espace de probabilité $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.
- $X_1, \cdots, X_n$ une suite de variables aléatoires de valeurs dans un ensemble E; $n \in \mathbb{N}$.
- Quand X_n prend la valeur i, on dit que le système est à l'état i à l'instant n,

Pr. Chaabane Djamal

- On considère un espace de probabilité $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.
- $X_1, \cdots, X_n$ une suite de variables aléatoires de valeurs dans un ensemble E; $n \in \mathbb{N}$.
- Quand X_n prend la valeur i, on dit que le système est à l'état i à l'instant n, on écrit $\forall \omega \in \Omega$; $X_n(\omega) = i$

Pr. Chaabane Djamal

- On considère un espace de probabilité $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.
- $X_1, \cdots, X_n$ une suite de variables aléatoires de valeurs dans un ensemble E; $n \in \mathbb{N}$.
- Quand X_n prend la valeur i, on dit que le système est à l'état i à l'instant n, on écrit $\forall \omega \in \Omega$; $X_n(\omega) = i$ et l'ensemble des valeurs de X_n; $\forall n \in \mathbb{N}$ est appelé ensemble des états.

- On considère un espace de probabilité $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.
- $X_1, \cdots, X_n$ une suite de variables aléatoires de valeurs dans un ensemble E; $n \in \mathbb{N}$.
- Quand X_n prend la valeur i, on dit que le système est à l'état i à l'instant n, on écrit $\forall \omega \in \Omega$; $X_n(\omega) = i$ et l'ensemble des valeurs de X_n; $\forall n \in \mathbb{N}$ est appelé ensemble des états.

$\mathscr{D}$éfinition

Le processus stochastique $X = \{X_n;, n \in \mathbb{N}\}$ est une chaîne de Markov si

Pr. Chaabane Djamal

- On considère un espace de probabilité $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.
- $X_1, \cdots, X_n$ une suite de variables aléatoires de valeurs dans un ensemble E; $n \in \mathbb{N}$.
- Quand X_n prend la valeur i, on dit que le système est à l'état i à l'instant n, on écrit $\forall \omega \in \Omega$; $X_n(\omega) = i$ et l'ensemble des valeurs de $X_n; \forall n \in \mathbb{N}$ est appelé ensemble des états.

$\mathscr{D}$éfinition

Le processus stochastique $X = \{X_n; , n \in \mathbb{N}\}$ est une chaîne de Markov si

$$P(X_{n+1} = j | X_0, X_1, \cdots, X_n) = P(X_{n+1} = j | X_n)$$
$$\forall j \in E \ \forall n \in \mathbb{N}$$

Pr. Chaabane Djamal

12/12/2015 06:53:52

𝒩otation

$$P\left(X_{n+1} = j \,|\, X_n = i\right) = P_{i,j} \quad \forall i, j \in E$$

Ces probabilités constituent une matrice dite **matrice de probabilités de transition**.

Pr. Chaabane Djamal

𝒩otation

$$P\left(X_{n+1} = j \,|\, X_n = i\right) = P_{i,j} \quad \forall i, j \in E$$

Ces probabilités constituent une matrice dite **matrice de probabilités de transition**.

𝒫robabilités de transition

Considérons un ensembles des états $E = \{0, 1, 2, \cdots, \}$. On écrit

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} & p_{02} & \cdots \\ p_{10} & p_{11} & p_{12} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Plan

1. Chaînes de Markov
   - Introduction
   - Matrices Stochastiques
   - Relation de Chapman-Kolmogorov
2. Illustrations
   - Illustration 1
   - Illustration 2
3. Classification des états
   - Passage par un état fixe
4. Etude asymptotique
5. Résultats dŠalgèbre linéaire pour les chaînes de Markov

Pr. Chaabane Djamal

12/12/2015 06:53:52

Pr. Chaabane Djamal

12/12/2015 06:53:52

Matrice Stochastique

La matrice $\mathbb{P}$est dite matrice de **MARKOV** si

1. $p_{ij} \geq 0, \ , \forall i, j \in E$

Pr. Chaabane Djamal

12/12/2015
06:53:52

$\mathscr{M}$atrice $\mathscr{S}$tochastique

La matrice $\mathbb{P}$est dite matrice de MARKOV si

1. $p_{ij} \geq 0, \ , \forall i, j \in E$
2. $\sum_{j \in E} p_{ij} = 1 \ \forall i \in E$

Pr. Chaabane Djamal

$\mathscr{M}$atrice $\mathscr{S}$tochastique

La matrice $\mathbb{P}$est dite matrice de MARKOV si

1. $p_{ij} \geq 0, \, , \forall i, j \in E$
2. $\sum_{j \in E} p_{ij} = 1 \ \forall i \in E$

$\mathscr{M}$atrice $\mathscr{S}$tochastique

Inversement,

Pr. Chaabane Djamal

$\mathscr{M}$atrice $\mathscr{S}$tochastique

La matrice $\mathbb{P}$est dite matrice de MARKOV si

1. $p_{ij} \geq 0, \, , \forall i, j \in E$
2. $\displaystyle\sum_{j \in E} p_{ij} = 1 \;\forall i \in E$

$\mathscr{M}$atrice $\mathscr{S}$tochastique

Inversement, pour toute matrice Markovienne donnée,

Pr. Chaabane Djamal

$\mathscr{M}$atrice $\mathscr{S}$tochastique

La matrice $\mathbb{P}$est dite matrice de MARKOV si

1. $p_{ij} \geq 0, \, , \forall i, j \in E$
2. $\sum_{j \in E} p_{ij} = 1 \; \forall i \in E$

$\mathscr{M}$atrice $\mathscr{S}$tochastique

Inversement, pour toute matrice Markovienne donnée, sur un ensemble dénombrable E,

Pr. Chaabane Djamal

12/12/2015
06:53:52

$\mathscr{M}$atrice $\mathscr{S}$tochastique

La matrice $\mathbb{P}$est dite matrice de MARKOV si

1. $p_{ij} \geq 0, \, , \forall i, j \in E$
2. $\displaystyle\sum_{j \in E} p_{ij} = 1 \ \forall i \in E$

$\mathscr{M}$atrice $\mathscr{S}$tochastique

Inversement, pour toute matrice Markovienne donnée, sur un ensemble dénombrable E, il est possible de construire un échantillon d'un espace Ω,

Pr. Chaabane Djamal

12/12/2015
06:53:52

$\mathscr{M}$atrice $\mathscr{S}$tochastique

La matrice $\mathbb{P}$est dite matrice de MARKOV si

❶ $p_{ij} \geq 0, \, , \forall i, j \in E$

❷ $\sum_{j \in E} p_{ij} = 1 \;\; \forall i \in E$

$\mathscr{M}$atrice $\mathscr{S}$tochastique

Inversement, pour toute matrice Markovienne donnée, sur un ensemble dénombrable E, il est possible de construire un échantillon d'un espace Ω, une probabilité p sur tous les sous-ensembles de Ω (tribu)

Pr. Chaabane Djamal

$\mathscr{M}$atrice $\mathscr{S}$tochastique

La matrice $\mathbb{P}$est dite matrice de MARKOV si

1. $p_{ij} \geq 0, \, , \forall i, j \in E$
2. $\displaystyle\sum_{j \in E} p_{ij} = 1 \;\; \forall i \in E$

$\mathscr{M}$atrice $\mathscr{S}$tochastique

Inversement, pour toute matrice Markovienne donnée, sur un ensemble dénombrable E, il est possible de construire un échantillon d'un espace Ω, une probabilité p sur tous les sous-ensembles de Ω (tribu) et des variables aléatoires $X_1, X_2, \cdots$ définies sur Ω prenant ses valeurs dans E telles que

Pr. Chaabane Djamal

$\mathscr{M}$atrice $\mathscr{S}$tochastique

La matrice $\mathbb{P}$est dite matrice de MARKOV si

1. $p_{ij} \geq 0, \, , \forall i, j \in E$
2. $\sum_{j \in E} p_{ij} = 1 \;\; \forall i \in E$

$\mathscr{M}$atrice $\mathscr{S}$tochastique

Inversement, pour toute matrice Markovienne donnée, sur un ensemble dénombrable E, il est possible de construire un échantillon d'un espace Ω, une probabilité p sur tous les sous-ensembles de Ω (tribu) et des variables aléatoires $X_1, X_2, \cdots$ définies sur Ω prenant ses valeurs dans E telles que $X = \{X_1, X_2, \cdots, \}$ est une chaîne de Markov.

Plan

Pr. Chaabane Djamal

- Soit X une chaîne de Markov, de matrice de probabilités de transition $\mathbb{P}$, et espace des états E.

Pr. Chaabane Djamal

- Soit X une chaîne de Markov, de matrice de probabilités de transition $\mathbb{P}$, et espace des états E.
- Soient i, j, k trois états fixés dans E. On a :

Pr. Chaabane Djamal

- Soit X une chaîne de Markov, de matrice de probabilités de transition $\mathbb{P}$, et espace des états E.
- Soient i, j, k trois états fixés dans E. On a :
- $P\left(X_6 = j, X_7 = k \,|\, X_5 = i\right)$

- Soit X une chaîne de Markov, de matrice de probabilités de transition $\mathbb{P}$, et espace des états E.
- Soient i, j, k trois états fixés dans E. On a :
- $P\left(X_6 = j, X_7 = k \,|\, X_5 = i\right) =$
  $P\left(X_7 = k \,|\, X_5 = i, X_6 = j\right) P\left(X_6 = j \,|\, X_5 = i\right)$

Pr. Chaabane Djamal

- Soit X une chaîne de Markov, de matrice de probabilités de transition $\mathbb{P}$, et espace des états E.
- Soient i, j, k trois états fixés dans E. On a :
- $P(X_6 = j, X_7 = k \,|\, X_5 = i) =$
  $P(X_7 = k \,|\, X_5 = i, X_6 = j)\, P(X_6 = j \,|\, X_5 = i)$
- Or $P(X_7 = k \,|\, X_5 = i, X_6 = j) = P(X_7 = k \,|\, X_6 = j) = p_{jk}$

Pr. Chaabane Djamal

12/12/2015 06:53:52

Chaînes de Markov
Introduction
Matrices Stochastiques
Relation de Chapman-Kolmogorov
Illustrations
Illustration 1
Illustration 2
Classification des états
Passage par un état fixe
Etude asymptotique
Résultats dŠalgèbre linéaire pour les chaînes de Markov

- Soit X une chaîne de Markov, de matrice de probabilités de transition $\mathbb{P}$, et espace des états E.
- Soient i, j, k trois états fixés dans E. On a :
- $P(X_6 = j, X_7 = k \mid X_5 = i) =$
  $P(X_7 = k \mid X_5 = i, X_6 = j) P(X_6 = j \mid X_5 = i)$
- Or $P(X_7 = k \mid X_5 = i, X_6 = j) = P(X_7 = k \mid X_6 = j) = p_{jk}$
- Donc $P(X_6 = j, X_7 = k \mid X_5 = i) = p_{ij} \times p_{jk}$

Pr. Chaabane Djamal

12/12/2015
06:53:52

$\mathscr{T}$héorème

Pour tout $n, m \in \mathbb{N}$ avec $m \geq 1$ et $i_0, i_1, \cdots, i_m \in E$

$$P\left(X_{n+1} = i_1, \cdots, X_{n+m} = i_m \,|\, X_n = i_0\right) = P_{i_0,i_1} \times \cdots \times P_{i_{m-1},i_m}$$

Pr. Chaabane Djamal

12/12/2015
06:53:52

Théorème

Pour tout $n, m \in \mathbb{N}$ avec $m \geq 1$ et $i_0, i_1, \cdots, i_m \in E$

$$P\left(X_{n+1} = i_1, \cdots, X_{n+m} = i_m \,|\, X_n = i_0\right) = P_{i_0,i_1} \times \cdots \times P_{i_{m-1},i_m}$$

En posant $n = 0$ on obtient :

Corollaire

Soit π une loi de probabilité sur E, on suppose que $P\left(X_0 = i\right) = \pi_i \ \forall i \in E$.

Pr. Chaabane Djamal

12/12/2015
06:53:52

$\mathscr{T}$héorème

Pour tout $n, m \in \mathbb{N}$ avec $m \geq 1$ et $i_0, i_1, \cdots, i_m \in E$

$$P\left(X_{n+1} = i_1, \cdots, X_{n+m} = i_m \,|\, X_n = i_0\right) = P_{i_0,i_1} \times \cdots \times P_{i_{m-1},i_m}$$

En posant $n = 0$ on obtient :

$\mathscr{C}$orollaire

Soit π une loi de probabilité sur E, on suppose que $P(X_0 = i) = \pi_i \; \forall i \in E$. Alors $\forall m \in \mathbb{N}$ et $i_0, \cdots, i_m \in E$,

Pr. Chaabane Djamal

Théorème

Pour tout $n, m \in \mathbb{N}$ avec $m \geq 1$ et $i_0, i_1, \cdots, i_m \in E$

$$P\left(X_{n+1} = i_1, \cdots, X_{n+m} = i_m \,|\, X_n = i_0\right) = P_{i_0,i_1} \times \cdots \times P_{i_{m-1},i_m}$$

En posant $n = 0$ on obtient :

Corollaire

Soit π une loi de probabilité sur E, on suppose que $P\left(X_0 = i\right) = \pi_i \ \forall i \in E$. Alors $\forall m \in \mathbb{N}$ et $i_0, \cdots, i_m \in E$,

$$P\left(X_0 = i_0, \cdots, X_m = i_m\right) = \pi_{i_0} P_{i_0,i_1} \times \cdots \times P_{i_{m-1},i_m}$$

Pr. Chaabane Djamal

12/12/2015
06:53:52

- $\forall h, i, j, k \in E$ on écrit

Pr. Chaabane Djamal

- $\forall h, i, j, k \in E$ on écrit
- $P(X_{n+1} = i, X_{n+2} = j, X_{n+3} = k \,|\, X_n = h) = \boxed{p_{hi}p_{ij}p_{jk}}$

Pr. Chaabane Djamal

12/12/2015 06:53:52

- $\forall h, i, j, k \in E$ on écrit
- $P(X_{n+1} = i, X_{n+2} = j, X_{n+3} = k \mid X_n = h) = \boxed{p_{hi}p_{ij}p_{jk}}$
- On a

$$P(X_{n+3} = k \mid X_n = h) = \sum_{i \in E} p_{hi} \sum_{j \in E} p_{ij}p_{jk}$$

- $\forall h, i, j, k \in E$ on écrit
- $P\left(X_{n+1} = i, X_{n+2} = j, X_{n+3} = k \mid X_n = h\right) = \boxed{p_{hi} p_{ij} p_{jk}}$
- On a

$$\begin{aligned} P\left(X_{n+3} = k \mid X_n = h\right) &= \sum_{i \in E} p_{hi} \sum_{j \in E} p_{ij} p_{jk} \\ &= \sum_{i \in E} p_{hi} p_{ik}^{(2)} \end{aligned}$$

Pr. Chaabane Djamal

12/12/2015 06:53:52

- $\forall h, i, j, k \in E$ on écrit
- $P(X_{n+1} = i, X_{n+2} = j, X_{n+3} = k \mid X_n = h) = \boxed{p_{hi}p_{ij}p_{jk}}$
- On a

$$
\begin{aligned}
P(X_{n+3} = k \mid X_n = h) &= \sum_{i \in E} p_{hi} \sum_{j \in E} p_{ij}p_{jk} \\
&= \sum_{i \in E} p_{hi} p_{ik}^{(2)} \\
&= p_{hk}^{(3)}
\end{aligned}
$$

Pr. Chaabane Djamal

12/12/2015 06:53:52

- $\forall h, i, j, k \in E$ on écrit
- $P(X_{n+1} = i, X_{n+2} = j, X_{n+3} = k \mid X_n = h) = \boxed{p_{hi}p_{ij}p_{jk}}$
- On a

$$\begin{aligned} P(X_{n+3} = k \mid X_n = h) &= \sum_{i \in E} p_{hi} \sum_{j \in E} p_{ij}p_{jk} \\ &= \sum_{i \in E} p_{hi}p_{ik}^{(2)} \\ &= p_{hk}^{(3)} \end{aligned}$$

$p_{ik}^{(2)}$ est l'élément (i, k) de la matrice $\mathbb{P}^2$

Pr. Chaabane Djamal

12/12/2015
06:53:52

- $\forall h, i, j, k \in E$ on écrit
- $P(X_{n+1} = i, X_{n+2} = j, X_{n+3} = k \mid X_n = h) = \boxed{p_{hi}p_{ij}p_{jk}}$
- On a

$$\begin{aligned}
P(X_{n+3} = k \mid X_n = h) &= \sum_{i \in E} p_{hi} \sum_{j \in E} p_{ij}p_{jk} \\
&= \sum_{i \in E} p_{hi} p_{ik}^{(2)} \\
&= p_{hk}^{(3)}
\end{aligned}$$

$p_{ik}^{(2)}$ est l'élément (i, k) de la matrice $\mathbb{P}^2$

$p_{hk}^{(3)}$ est l'élément (i, k) de la matrice $\mathbb{P}^3$

Pr. Chaabane Djamal

12/12/2015 06:53:52

Proposition

$\forall m \in \mathbb{N}$ on a

$$P\left(X_{n+m} = j \,|\, X_n = i\right) \quad = \quad p_{ij}^{(m)} \; \forall i,j \in E, n \in \mathbb{N}$$

Pr. Chaabane Djamal

12/12/2015 06:53:52

Proposition

$\forall m \in \mathbb{N}$ on a

$$P\left(X_{n+m} = j \,|\, X_n = i\right) = p_{ij}^{(m)} \;\forall i,j \in E, n \in \mathbb{N}$$

$$\mathbb{P}^{n+m} = \mathbb{P}^n \mathbb{P}^m$$

Pr. Chaabane Djamal

12/12/2015 06:53:52

$\mathscr{P}$roposition

$\forall m \in \mathbb{N}$ on a

$$P\left(X_{n+m}=j \,|\, X_n=i\right) = p_{ij}^{(m)} \;\forall i,j \in E, n \in \mathbb{N}$$

$$\mathbb{P}^{n+m} = \mathbb{P}^n \mathbb{P}^m \Longrightarrow p_{ij}^{(n+m)} = \sum_{k\in E} p_{ik}^{(n)} p_{kj}^{(m)}$$

Pr. Chaabane Djamal

12/12/2015
06:53:52

Proposition

$\forall m \in \mathbb{N}$ on a

$$P\left(X_{n+m} = j \,|\, X_n = i\right) = p_{ij}^{(m)} \quad \forall i,j \in E, n \in \mathbb{N}$$

$$\mathbb{P}^{n+m} = \mathbb{P}^n \mathbb{P}^m \Longrightarrow p_{ij}^{(n+m)} = \sum_{k \in E} p_{ik}^{(n)} p_{kj}^{(m)}$$

Relation de **CHAPMAN-KOLMOGOROV**

Plan

$\mathscr{E}$xemple 1

Soit $X = \{X_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ une chaîne de Markov avec $E = \{a, b, c\}$ et

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} 0.50 & 0.25 & 0.25 \\ 0.67 & 0.00 & 0.33 \\ 0.60 & 0.40 & 0.00 \end{pmatrix}$$

▶ Objectif

$$P\left(X_1 = b, X_2 = c, X_3 = a, X_4 = c, X_5 = a, X_6 = c, X_7 = b \,|\, X_0 = c\right)$$
$$= p_{cb}p_{bc}p_{ca}p_{ac}p_{ca}p_{ac}p_{cb}$$
$$= 0.40 \times 0.33 \times 0.60 \times 0.25 \times 0.60 \times 0.25 \times 0.40$$
$$= 0.0012$$

Pr. Chaabane Djamal

12/12/2015 06:53:52

Chaînes de Markov
Introduction
Matrices Stochastiques
Relation de Chapman-Kolmogorov
Illustrations
Illustration 1
Illustration 2
Classification des états
Passage par un état fixe
Etude asymptotique
Résultats dŠalgèbre linéaire pour les chaînes de Markov

$\mathscr{E}$xemple 2

Nous considérons une succession de tirages de Bernoulli, θ est la probabilité de succès, N_n est le nombre de succès en n expériences Bernoulli indépendantes. On a

Pr. Chaabane Djamal

12/12/2015 06:53:52

$\mathscr{E}$xemple 2

Nous considérons une succession de tirages de Bernoulli, θ est la probabilité de succès, N_n est le nombre de succès en n expériences Bernoulli indépendantes. On a

$$P\left(N_{n+m} - N_n = k \,|\, N_0, \cdots, N_n\right)$$

Pr. Chaabane Djamal

12/12/2015 06:53:52

$\mathscr{E}$xemple 2

Nous considérons une succession de tirages de Bernoulli, θ est la probabilité de succès, N_n est le nombre de succès en n expériences Bernoulli indépendantes. On a

$$P\left(N_{n+m} - N_n = k \,|\, N_0, \cdots, N_n\right)$$

$$= P\left(N_{n+m} - N_n = k\right) = C_n^k \theta^k (1-\theta)^{(n-k)}$$

Pr. Chaabane Djamal

$\mathscr{E}$xemple 2

Nous considérons une succession de tirages de Bernoulli, θ est la probabilité de succès, N_n est le nombre de succès en n expériences Bernoulli indépendantes. On a

$$P\left(N_{n+m} - N_n = k \,|\, N_0, \cdots, N_n\right)$$

$$= P\left(N_{n+m} - N_n = k\right) = C_n^k \theta^k (1-\theta)^{(n-k)}$$

Donc, $\{N_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ est une chaîne de Markov homogène.

Pr. Chaabane Djamal

12/12/2015
06:53:52

$\mathscr{E}$xemple 2

Nous considérons une succession de tirages de Bernoulli, θ est la probabilité de succès, N_n est le nombre de succès en n expériences Bernoulli indépendantes. On a

$$P\left(N_{n+m} - N_n = k \,|\, N_0, \cdots, N_n\right)$$

$$= P\left(N_{n+m} - N_n = k\right) = C_n^k \theta^k (1-\theta)^{(n-k)}$$

Donc, $\{N_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ est une chaîne de Markov homogène.
La distribution initiale : $\pi = (\pi_0, \pi_1 \cdots)$ avec

$$\pi_0 = P\left(N_0 = 0\right) = 1 \quad \text{et } \pi_j = 0 \; \forall j \geq 1$$

Pr. Chaabane Djamal

12/12/2015 06:53:52

$\mathscr{E}$xemple 2 (suite)

L'ensemble des états est $E = \{0, 1, 2, \cdots\}$ Les probabilités de transition sont données par :

$$p_{ij} = P\left(N_{n+1} = j \,|\, N_n = i\right) = \begin{cases} \theta & si \quad j = i+1 \\ 1-\theta & si \quad j = i \\ 0 & \quad ailleurs \end{cases}$$

Pr. Chaabane Djamal

$\mathscr{E}$xemple 2 (suite)

La matrice des probabilités de transition

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} 1-\theta & \theta & \cdots & \cdots \\ 0 & 1-\theta & \theta & \cdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & \\ 0 & & & \ddots \end{pmatrix}$$

Pr. Chaabane Djamal

12/12/2015
06:53:52

Plan

$\mathscr{I}$nstant du succès dans le processus de Bernoulli

Pr. Chaabane Djamal

- Soit $\{T_n\}$ la suite de variables aléatoires telle que T_n représente l'instant du $n^{\text{ème}}$ succès dans le Processus de Bernoulli.

$\mathscr{I}$nstant du succès dans le processus de Bernoulli

- Soit $\{T_n\}$ la suite de variables aléatoires telle que T_n représente l'instant du $n^{\text{ème}}$ succès dans le Processus de Bernoulli.
- On a :

$$P(T_{n+1} = j \,|\, T_0, \cdots, T_n) = \begin{cases} 0 & sia\{T_n \geq j\} \\ pq^{j-1-T_n} & si \qquad \{T_n < j\} \end{cases}$$

$\mathscr{I}$nstant du succès dans le processus de Bernoulli

- Soit $\{T_n\}$ la suite de variables aléatoires telle que T_n représente l'instant du $n^{\text{ème}}$ succès dans le Processus de Bernoulli.
- On a :

$$P\left(T_{n+1} = j \,|\, T_0, \cdots, T_n\right) = \begin{cases} 0 & sia\{T_n \geq j\} \\ pq^{j-1-T_n} & si \qquad \{T_n < j\} \end{cases}$$

☛ $\{T_n\}$ est une **chaîne de markov**.

$\mathscr{I}$nstant du succès dans le processus de Bernoulli

Pr. Chaabane Djamal

12/12/2015 06:53:52

- Soit $\{T_n\}$ la suite de variables aléatoires telle que T_n représente l'instant du $n^{\text{ème}}$ succès dans le Processus de Bernoulli.
- On a :

$$P\left(T_{n+1} = j \,|\, T_0, \cdots, T_n\right) = \begin{cases} 0 & sia\{T_n \geq j\} \\ pq^{j-1-T_n} & si \qquad \{T_n < j\} \end{cases}$$

- ☛ $\{T_n\}$ est une **chaîne de markov**.
- L'ensemble des états : $E = \{0, 1, \cdots\}$; $T_0 = 0$

$\mathscr{I}$nstant du succès dans le processus de Bernoulli

- Soit $\{T_n\}$ la suite de variables aléatoires telle que T_n représente l'instant du $n^{\text{ème}}$ succès dans le Processus de Bernoulli.
- On a :

$$P\left(T_{n+1} = j \,|\, T_0, \cdots, T_n\right) = \begin{cases} 0 & sia\{T_n \geq j\} \\ pq^{j-1-T_n} & si \qquad\qquad \{T_n < j\} \end{cases}$$

- ☛ $\{T_n\}$ est une **chaîne de markov**.
- L'ensemble des états : $E = \{0, 1, \cdots\}$; $T_0 = 0$
- La distribution initiale : $\pi(0) = \mathbb{P}(T_0 = 0) = 1, \pi(1) = \pi(2) = \cdots = 0.$

$\mathscr{I}$nstant du succès dans le processus de Bernoulli

Pr. Chaabane Djamal

- Les probabilités de transition sont :
  $\mathbb{P}_{ij} = \mathbb{P}\left(T_{n+1} = j \,|\, T_n = i\right) = \mathbb{P}\left(T_{n+1} - T_n = j - i\right)$

$\mathscr{I}$nstant du succès dans le processus de Bernoulli

Pr. Chaabane Djamal

- Les probabilités de transition sont :
  $\mathbb{P}_{ij} = \mathbb{P}\left(T_{n+1} = j \,|\, T_n = i\right) = \mathbb{P}\left(T_{n+1} - T_n = j - i\right)$
- On a :

$$\mathbb{P}_{ij} = \begin{cases} 0 & si \quad j < i + 1\} \\ pq^{j-i-1} & si \quad j \geq i + 1\} \end{cases}$$

Pr. Chaabane Djamal

12/12/2015 06:53:52

- Les probabilités de transition sont :
  $\mathbb{P}_{ij} = \mathbb{P}\left(T_{n+1} = j \,|\, T_n = i\right) = \mathbb{P}\left(T_{n+1} - T_n = j - i\right)$
- On a :

$$\mathbb{P}_{ij} = \begin{cases} 0 & si \quad j < i + 1\} \\ pq^{j-i-1} & si \quad j \geq i + 1\} \end{cases}$$

- La matrice des probabilités de transitions :

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} 0 & p & pq & pq^2 & pq^3 & \cdots \\ & 0 & p & pq & pq^2 & \cdots \\ & & 0 & p & pq & \cdots \\ & & & 0 & p & \cdots \\ & & & & 0 & \cdots \\ & & & & \ddots & \cdots \\ 0 & & & & & \end{pmatrix}$$

Plan

$\mathscr{P}$assage par un état fixe

$j \in E$ un état fixe

- Soit j un état fixé dans une chaîne de Markov homogène $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ d'espace des états E, de distribution initiale π_0 et de matrice de probabilités de transition $\mathbb{P}$.

Passage par un état fixe

$j \in E$ un état fixe

- Soit j un état fixé dans une chaîne de Markov homogène $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ d'espace des états E, de distribution initiale π_0 et de matrice de probabilités de transition $\mathbb{P}$.
- On s'intéresse à la probabilité du premier passage par l'état j.

$\mathscr{P}$assage par un état fixe

$j \in E$ un état fixe

- Soit j un état fixé dans une chaîne de Markov homogène $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ d'espace des états E, de distribution initiale π_0 et de matrice de probabilités de transition $\mathbb{P}$.
- On s'intéresse à la probabilité du premier passage par l'état j.
- On écrit,

$\mathscr{P}$assage par un état fixe

Pr. Chaabane Djamal

12/12/2015 06:53:52

$j \in E$ un état fixe

- Soit j un état fixé dans une chaîne de Markov homogène $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ d'espace des états E, de distribution initiale π_0 et de matrice de probabilités de transition $\mathbb{P}$.
- On s'intéresse à la probabilité du premier passage par l'état j.
- On écrit,

  $P\left(X_{T_1} = j | X_0 = i\right) =$

$\mathscr{P}$assage par un état fixe

Pr. Chaabane Djamal

$j \in E$ un état fixe

- Soit j un état fixé dans une chaîne de Markov homogène $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ d'espace des états E, de distribution initiale π_0 et de matrice de probabilités de transition $\mathbb{P}$.
- On s'intéresse à la probabilité du premier passage par l'état j.
- On écrit,

$$P\left(X_{T_1} = j | X_0 = i\right) = P\left(T_1 = k | X_0 = i\right) = P_i\left(T_1 = k\right) =$$

$\mathscr{P}$assage par un état fixe

$j \in E$ un état fixe

- Soit j un état fixé dans une chaîne de Markov homogène $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ d'espace des états E, de distribution initiale π_0 et de matrice de probabilités de transition $\mathbb{P}$.
- On s'intéresse à la probabilité du premier passage par l'état j.
- On écrit,

$$P\left(X_{T_1} = j|X_0 = i\right) = P\left(T_1 = k|X_0 = i\right) = P_i\left(T_1 = k\right) = \boxed{\vartheta_{ij}(k)}.$$

$\mathscr{P}$assage par un état fixe

Pr. Chaabane Djamal

- Soit $j \in E$, un état fixe.

Passage par un état fixe

- Soit $j \in E$, un état fixe.
- Pour $\boxed{k = 1}$;

$\mathscr{P}$assage par un état fixe

- Soit $j \in E$, un état fixe.
- Pour $k = 1$;

$$\vartheta_{ij}(1)$$

$\mathscr{P}$assage par un état fixe

Pr. Chaabane Djamal

- Soit $j \in E$, un état fixe.
- Pour $k = 1$;

$$\vartheta_{ij}(1) = P_i\left(T_1 = 1\right) =$$

$\mathscr{P}$assage par un état fixe

- Soit $j \in E$, un état fixe.
- Pour $k = 1$;

$$\vartheta_{ij}(1) = P_i\,(T_1 = 1) = P_i\,(X_1 = j) =$$

Pr. Chaabane Djamal

$\mathscr{P}$assage par un état fixe

- Soit $j \in E$, un état fixe.
- Pour $k = 1$;

$$\vartheta_{ij}(1) = P_i(T_1 = 1) = P_i(X_1 = j) = P(X_1 = j | X_0 = i)$$

$\mathscr{P}$assage par un état fixe

- Soit $j \in E$, un état fixe.
- Pour $k = 1$;

$$\vartheta_{ij}(1) = P_i\left(T_1 = 1\right) = P_i\left(X_1 = j\right) = P\left(X_1 = j | X_0 = i\right) = p_{ij}$$

$\mathscr{P}$assage par un état fixe

- Soit $j \in E$, un état fixe.
- Pour $\boxed{k = 1}$;

$$\vartheta_{ij}(1) = P_i\left(T_1 = 1\right) = P_i\left(X_1 = j\right) = P\left(X_1 = j | X_0 = i\right) = p_{ij}$$

- Pour $\boxed{k \geq 2}$;

$$\vartheta_{ij}(k) = P\left(X_1 \neq j, X_2 \neq j, \cdots, X_{k-1} \neq j, X_k = j | X_0 = i\right)$$

$\mathscr{P}$assage par un état fixe

- Soit $j \in E$, un état fixe.
- Pour $\boxed{k = 1}$;

$$\vartheta_{ij}(1) = P_i\left(T_1 = 1\right) = P_i\left(X_1 = j\right) = P\left(X_1 = j | X_0 = i\right) = p_{ij}$$

- Pour $\boxed{k \geq 2}$;

$$\begin{aligned}\vartheta_{ij}(k) &= P\left(X_1 \neq j, X_2 \neq j, \cdots, X_{k-1} \neq j, X_k = j | X_0 = i\right) \\ &= \sum_{b \in E \setminus \{j\}} P\left(X_1 = b, X_2 \neq j, \cdots, X_{k-1} \neq j, X_k = j | X_0 = i\right)\end{aligned}$$

$\mathscr{P}$assage par un état fixe

- Soit $j \in E$, un état fixe.
- Pour $\boxed{k = 1}$;

$$\vartheta_{ij}(1) = P_i\left(T_1 = 1\right) = P_i\left(X_1 = j\right) = P\left(X_1 = j|X_0 = i\right) = p_{ij}$$

- Pour $\boxed{k \geq 2}$;

$$\begin{aligned}
\vartheta_{ij}(k) &= P\left(X_1 \neq j, X_2 \neq j, \cdots, X_{k-1} \neq j, X_k = j|X_0 = i\right) \\
&= \sum_{b \in E\setminus\{j\}} P\left(X_1 = b, X_2 \neq j, \cdots, X_{k-1} \neq j, X_k = j|X_0 = i\right) \\
&= \sum_{b \in E\setminus\{j\}} P\left(X_1 = b|X_0 = i\right) \times \\
&\quad P\left(X_2 \neq j, \cdots, X_{k-1} \neq j, X_k = j|X_0 = i, X_1 = b\right)
\end{aligned}$$

$\mathscr{P}$assage par un état fixe

$$\vartheta_{ij}(k) = \sum_{b \in E \setminus \{j\}} P_{ib} \times P\left(X_2 \neq j, \cdots, X_{k-1} \neq j, X_k = j | X_1 = b\right)$$

Pr. Chaabane Djamal

12/12/2015
06:53:52

$\mathscr{P}$assage par un état fixe

$$
\begin{aligned}
\vartheta_{ij}(k) &= \sum_{b \in E\backslash\{j\}} P_{ib} \times P\left(X_2 \neq j, \cdots, X_{k-1} \neq j, X_k = j | X_1 = b\right) \\
&= \sum_{b \in E\backslash\{j\}} P_{ib} \times \vartheta_{bj}(k-1)
\end{aligned}
$$

$\mathscr{P}$assage par un état fixe

$$\begin{aligned}
\vartheta_{ij}(k) &= \sum_{b \in E \setminus \{j\}} P_{ib} \times P\left(X_2 \neq j, \cdots, X_{k-1} \neq j, X_k = j | X_1 = b\right) \\
&= \sum_{b \in E \setminus \{j\}} P_{ib} \times \vartheta_{bj}(k-1)
\end{aligned}$$

Donc,

$$\boxed{\vartheta_{ij}(k) = \begin{cases} p_{ij} & \text{si } k = 1 \\ \displaystyle\sum_{b \in E \setminus \{j\}} P_{ib} \times \vartheta_{bj}(k-1) & \text{si } k \geq 2 \end{cases}}$$

Passage par un état fixe

Exemple

On considère une chaîne de Markov avec $E = \{0, 1, 2\}$ et

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{3}{5} & \frac{1}{15} \end{pmatrix}$$

$\mathscr{P}$assage par un état fixe

$\mathscr{E}$xemple

On considère une chaîne de Markov avec $E = \{0, 1, 2\}$ et

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{3}{5} & \frac{1}{15} \end{pmatrix}$$

- Soit $j = 2$ l'état fixé.

$\mathscr{P}$assage par un état fixe

$\mathscr{E}$xemple

On considère une chaîne de Markov avec $E = \{0, 1, 2\}$ et

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{3}{5} & \frac{1}{15} \end{pmatrix}$$

- Soit $j = 2$ l'état fixé.
- On calcul $\vartheta_{02}(k)$, $\vartheta_{12}(k)$ et $\vartheta_{22}(k)$

$\mathscr{P}$assage par un état fixe

$\mathscr{E}$xemple

On considère une chaîne de Markov avec $E = \{0, 1, 2\}$ et

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{3}{5} & \frac{1}{15} \end{pmatrix}$$

- Soit $j = 2$ l'état fixé.
- On calcul $\vartheta_{02}(k)$, $\vartheta_{12}(k)$ et $\vartheta_{22}(k)$
- On pose $f_2(k) = (\vartheta_{02}(k), \vartheta_{12}(k) et \vartheta_{22}(k))'$

$\mathscr{P}$assage par un état fixe

$$f_2(1) = \begin{bmatrix} \vartheta_{02}(1) \\ \vartheta_{12}(1) \\ \vartheta_{22}(1) \end{bmatrix} =$$

Pr. Chaabane Djamal

12/12/2015
06:53:52

$$f_2(1) = \begin{bmatrix} \vartheta_{02}(1) \\ \vartheta_{12}(1) \\ \vartheta_{22}(1) \end{bmatrix} = \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{3}{5} & \frac{1}{15} \end{matrix}$$

$\mathscr{P}$assage par un état fixe

$$f_2(1) = \begin{bmatrix} \vartheta_{02}(1) \\ \vartheta_{12}(1) \\ \vartheta_{22}(1) \end{bmatrix} = \begin{matrix} 0 \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{15} \end{matrix}$$

Pr. Chaabane Djamal

12/12/2015
06:53:52

Passage par un état fixe

$$\mathbf{Q} = \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{3}{5} & 0 \end{matrix}$$

$\mathscr{P}$assage par un état fixe

Soit j un état fixé dans une chaîne de Markov $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ d'espace des états E, de distribution initiale π_0 et de matrice de transition $\mathbb{P}$.

Pr. Chaabane Djamal

$\mathscr{P}$assage par un état fixe

Soit j un état fixé dans une chaîne de Markov $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ d'espace des états E, de distribution initiale π_0 et de matrice de transition $\mathbb{P}$.

Proposition

On a :

$$v_{ij} = P_{ij} + \sum_{b\in E\setminus\{j\}} P_{ib} v_{bj} \tag{1}$$

$\mathscr{P}$assage par un état fixe

Soit $N_j(\omega)$ le nombre de passage par un état fixé dans une chaîne de Markov $\{Xn\}_{n\in\mathbb{N}}$ pour toute réalisation $\omega \in \Omega$.

$\mathscr{P}$assage par un état fixe

Soit $N_j(\omega)$ le nombre de passage par un état fixé dans une chaîne de Markov $\{Xn\}_{n\in\mathbb{N}}$ pour toute réalisation $\omega \in \Omega$.

☛ $N_j(\omega) = m$

$\mathscr{P}$assage par un état fixe

Pr. Chaabane Djamal

Soit $N_j(\omega)$ le nombre de passage par un état fixé dans une chaîne de Markov $\{Xn\}_{n\in\mathbb{N}}$ pour toute réalisation $\omega \in \Omega$.

$$N_j(\omega) = m$$

$$\Updownarrow$$

$$(T_1(\omega) < \infty), (T_2(\omega) < \infty), ..., (T_m(\omega) < \infty)$$
$$(T_{m+1}(\omega) = \infty)$$

$\mathscr{P}$assage par un état fixe

Soit $N_j(\omega)$ le nombre de passage par un état fixé dans une chaîne de Markov $\{Xn\}_{n\in\mathbb{N}}$ pour toute réalisation $\omega \in \Omega$.

$$N_j(\omega) = m$$

$$\Updownarrow$$

$$(T_1(\omega) < \infty), (T_2(\omega) < \infty), ..., (T_m(\omega) < \infty)$$
$$(T_{m+1}(\omega) = \infty)$$

d'où les évènements

$$(T_1 < \infty), (T_2 - T_1 < \infty), ..., (T_m - T_{m-1} < \infty)$$
$$(T_{m+1} - T_m = \infty)$$

$\mathscr{P}$assage par un état fixe

Soit $N_j(\omega)$ le nombre de passage par un état fixé dans une chaîne de Markov $\{Xn\}_{n\in\mathbb{N}}$ pour toute réalisation $\omega \in \Omega$.

☛ $N_j(\omega) = m$

$$\Updownarrow$$

$$(T_1(\omega) < \infty), (T_2(\omega) < \infty), ..., (T_m(\omega) < \infty)$$
$$(T_{m+1}(\omega) = \infty)$$

d'où les évènements

$$(T_1 < \infty), (T_2 - T_1 < \infty), ..., (T_m - T_{m-1} < \infty)$$
$$(T_{m+1} - T_m = \infty)$$

sont indépendants et de probabilités en commençant

l'évolution de i

Passage par un état fixe

Soit $N_j(\omega)$ le nombre de passage par un état fixé dans une chaîne de Markov $\{Xn\}_{n\in\mathbb{N}}$ pour toute réalisation $\omega \in \Omega$.

☛ $N_j(\omega) = m$

$$\Updownarrow$$

$$(T_1(\omega) < \infty), (T_2(\omega) < \infty), ..., (T_m(\omega) < \infty)$$
$$(T_{m+1}(\omega) = \infty)$$

d'où les évènements

$$(T_1 < \infty), (T_2 - T_1 < \infty), ..., (T_m - T_{m-1} < \infty)$$
$$(T_{m+1} - T_m = \infty)$$

sont indépendants et de probabilités en commençant l'évolution de i

$$\mathbf{v_{ij}, v_{jj}, ..., v_{jj}} \text{ et } \mathbf{(1 - v_{jj})}$$

respectivement.

$\mathscr{P}$assage par un état fixe

Pr. Chaabane Djamal

Proposition

Soit N_j le nombre de passage par l'état j. Alors

$$P_j(N_j = m) = v_{jj}^{m-1}(1 - v_{jj}), \qquad m = 1, 2, ...; \tag{2}$$

et pour $i \neq j$

$$P_i(N_j = m) = \begin{cases} 1 - v_{ij} & m = 0 \\ v_{ij} v_{jj}^{m-1}(1 - v_{jj}) & m = 1, 2, ... \end{cases} \tag{3}$$

Pr. Chaabane Djamal

12/12/2015
06:53:52

Passage par un état fixe

- Pour $v_{jj} < 1$ on a :

Passage par un état fixe

- Pour $v_{jj} < 1$ on a :

$$\sum_{m=1}^{\infty} P_j(N_j = m) \quad = \quad \sum_{m=1}^{\infty} v_{jj}^{m-1}(1 - v_{jj})$$

Passage par un état fixe

- Pour $v_{jj} < 1$ on a :

$$\begin{aligned}\sum_{m=1}^{\infty} P_j(N_j = m) &= \sum_{m=1}^{\infty} v_{jj}^{m-1}(1 - v_{jj}) \\ &= (1 - v_{jj}) \sum_{m=1}^{\infty} v_{jj}^{m-1}\end{aligned}$$

$\mathscr{P}$assage par un état fixe

- Pour $v_{jj} < 1$ on a :

$$\begin{aligned}
\sum_{m=1}^{\infty} P_j(N_j = m) &= \sum_{m=1}^{\infty} v_{jj}^{m-1}(1 - v_{jj}) \\
&= (1 - v_{jj}) \sum_{m=1}^{\infty} v_{jj}^{m-1} \\
&= (1 - v_{jj}) \frac{1}{1 - v_{jj}} = 1
\end{aligned}$$

$\mathscr{P}$assage par un état fixe

- Pour $v_{jj} < 1$ on a :

$$\begin{aligned}\sum_{m=1}^{\infty} P_j(N_j = m) &= \sum_{m=1}^{\infty} v_{jj}^{m-1}(1 - v_{jj}) \\ &= (1 - v_{jj}) \sum_{m=1}^{\infty} v_{jj}^{m-1} \\ &= (1 - v_{jj}) \frac{1}{1 - v_{jj}} = 1\end{aligned}$$

- Pour $v_{jj} = 1$ on a :

$\mathscr{P}$assage par un état fixe

- Pour $v_{jj} < 1$ on a :

$$\begin{aligned}
\sum_{m=1}^{\infty} P_j(N_j = m) &= \sum_{m=1}^{\infty} v_{jj}^{m-1}(1 - v_{jj}) \\
&= (1 - v_{jj}) \sum_{m=1}^{\infty} v_{jj}^{m-1} \\
&= (1 - v_{jj}) \frac{1}{1 - v_{jj}} = 1
\end{aligned}$$

- Pour $v_{jj} = 1$ on a :

$$\sum_{m=1}^{\infty} P_j(N_j = m) = \sum_{m=1}^{\infty} 1^{m-1} \times 0 = 0$$

Passage par un état fixe

Pr. Chaabane Djamal

12/12/2015 06:53:52

Proposition

On a :

$$P_j(N_j < \infty) = \begin{cases} 1 & si \quad v_{jj} < 1 \\ 0 & si \quad v_{jj} = 1 \end{cases} \tag{4}$$

$\mathscr{P}$assage par un état fixe

Proposition

On a :

$$P_j(N_j < \infty) = \begin{cases} 1 & si \quad v_{jj} < 1 \\ 0 & si \quad v_{jj} = 1 \end{cases} \tag{4}$$

- Si $v_{jj} = 1$,

Pr. Chaabane Djamal

$\mathscr{P}$assage par un état fixe

Proposition

On a :

$$P_j(N_j < \infty) = \begin{cases} 1 & si \quad v_{jj} < 1 \\ 0 & si \quad v_{jj} = 1 \end{cases} \tag{4}$$

- Si $v_{jj} = 1$, alors $N_j = \infty$ certainement

$\mathscr{P}$assage par un état fixe

Pr. Chaabane Djamal

Proposition

On a :

$$P_j(N_j < \infty) = \begin{cases} 1 & si \quad v_{jj} < 1 \\ 0 & si \quad v_{jj} = 1 \end{cases} \tag{4}$$

- Si $v_{jj} = 1$, alors $N_j = \infty$ certainement $P_j(N_j = \infty) = 1 - P_j(N_j < \infty) = 1 - 0 = 1$. Donc, $\mathbf{E_j(N_j) = \infty}$

Passage par un état fixe

Proposition

On a :

$$P_j(N_j < \infty) = \begin{cases} 1 & si \quad v_{jj} < 1 \\ 0 & si \quad v_{jj} = 1 \end{cases} \tag{4}$$

- Si $v_{jj} = 1$, alors $N_j = \infty$ certainement $P_j(N_j = \infty) = 1 - P_j(N_j < \infty) = 1 - 0 = 1$. Donc, $\mathbf{E_j(N_j) = \infty}$
- Si $v_{jj} < 1$, $N_j \sim Geom\left(E_j(N_j) = p = \dfrac{1}{1 - v_{jj}}\right)$; probabilité de succès est $\mathbf{p = 1 - v_{jj}}$

$\mathscr{P}$assage par un état fixe

Pr. Chaabane Djamal

Proposition

On a :

$$P_j(N_j < \infty) = \begin{cases} 1 & si \quad v_{jj} < 1 \\ 0 & si \quad v_{jj} = 1 \end{cases} \tag{4}$$

- Si $v_{jj} = 1$, alors $N_j = \infty$ certainement $P_j(N_j = \infty) = 1 - P_j(N_j < \infty) = 1 - 0 = 1$. Donc, $\mathbf{E_j(N_j) = \infty}$
- Si $v_{jj} < 1$, $N_j \sim Geom\left(E_j(N_j) = p = \dfrac{1}{1 - v_{jj}} \right)$; probabilité de succès est $\mathbf{p = 1 - v_{jj}}$
- La matrice potentielle est : $\mathscr{R} = (r_{ij})_{i,j \in E}$

Passage par un état fixe

Pr. Chaabane Djamal

Corollaire

On a :

- ☞ $r_{jj} = \dfrac{1}{1 - v_{jj}}$
- ☞ $r_{ij} = v_{ij} r_{jj} \qquad si\ i \neq j$

$\mathscr{P}$assage par un état fixe

On a :

$$\forall \omega \in \Omega : N_j(\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} \Im_j(X_n(\omega))$$

avec

$$\Im_j(X_n(\omega)) = \begin{cases} 1 & \text{si } X_n(\omega) = j \\ 0 & \text{si } X_n(\omega) \neq j \end{cases}$$

$\mathscr{P}$assage par un état fixe

On a :

$$r_{ij} = E_i[\sum_{n=0}^{\infty} \Im_j(X_n)]$$

$\mathscr{P}$assage par un état fixe

On a :

$$\begin{aligned} r_{ij} &= E_i[\sum_{n=0}^{\infty} \mathfrak{I}_j(X_n)] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} E_i[\mathfrak{I}_j(X_n)] \end{aligned}$$

$\mathscr{P}$assage par un état fixe

On a :

$$\begin{aligned} r_{ij} &= E_i[\sum_{n=0}^{\infty} \Im_j(X_n)] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} E_i[\Im_j(X_n)] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} P_i(X_n = j) = \sum_{n=0}^{\infty} P(X_n = j | X_0 = i) \end{aligned}$$

$\mathscr{P}$assage par un état fixe

On a :

$$
\begin{aligned}
r_{ij} &= E_i[\sum_{n=0}^{\infty} \mathfrak{I}_j(X_n)] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} E_i[\mathfrak{I}_j(X_n)] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} P_i(X_n = j) = \sum_{n=0}^{\infty} P(X_n = j | X_0 = i) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} P_{ij}^{n}
\end{aligned}
$$

$\mathscr{P}$assage par un état fixe

Pr. Chaabane Djamal

12/12/2015
06:53:52

On a :

$$
\begin{aligned}
r_{ij} &= E_i[\sum_{n=0}^{\infty} \mathfrak{I}_j(X_n)] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} E_i[\mathfrak{I}_j(X_n)] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} P_i(X_n = j) = \sum_{n=0}^{\infty} P(X_n = j | X_0 = i) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} P_{ij}^n
\end{aligned}
$$

$$\boxed{\mathscr{R} = I + P + P^2 + ..}$$

$\mathscr{P}$assage par un état fixe

On a :

$$\mathscr{R}P \quad = \quad P + P^2 + P^3 + \ldots = \mathscr{R} - I$$

$\mathscr{P}$assage par un état fixe

Pr. Chaabane Djamal

On a :

$$\begin{aligned} \mathscr{R}P &= P + P^2 + P^3 + \ldots = \mathscr{R} - I \\ P\mathscr{R} &= P + P^2 + P^3 + \ldots = \mathscr{R} - I \end{aligned}$$

$\mathscr{P}$assage par un état fixe

On a :

$$\begin{aligned} \mathscr{R}P &= P + P^2 + P^3 + \ldots = \mathscr{R} - I \\ P\mathscr{R} &= P + P^2 + P^3 + \ldots = \mathscr{R} - I \end{aligned}$$

Donc ☛

$\mathscr{P}$assage par un état fixe

Pr. Chaabane Djamal

On a :

$$\begin{aligned} \mathscr{R}P &= P + P^2 + P^3 + \ldots = \mathscr{R} - I \\ P\mathscr{R} &= P + P^2 + P^3 + \ldots = \mathscr{R} - I \end{aligned}$$

Donc ☛ $\mathscr{R}(I - P) = (I - P)\mathscr{R} = I$

$\mathscr{C}$lassification

Pr. Chaabane Djamal

Étant donnée une chaîne de Markov $\{Xn\}_{n\in\mathbb{N}}$ d'espace des états E, de distribution initiale π_0 et de matrice de transition $\mathbb{P}$. Soit T l'instant du premier passage par un état fixé $j, j \in E$ et N_j le nombre totale de passage par l'état j.

Classification

Étant donnée une chaîne de Markov $\{Xn\}_{n\in\mathbb{N}}$ d'espace des états E, de distribution initiale π_0 et de matrice de transition $\mathbb{P}$. Soit T l'instant du premier passage par un état fixé $j, j \in E$ et N_j le nombre totale de passage par l'état j.

Définition

- L'état j est dit **récurrent** (persistant) si

$$P_j\{T < \infty\} = 1$$

$\mathscr{C}$lassification

Étant donnée une chaîne de Markov $\{Xn\}_{n\in\mathbb{N}}$ d'espace des états E, de distribution initiale π_0 et de matrice de transition $\mathbb{P}$. Soit T l'instant du premier passage par un état fixé $j, j \in E$ et N_j le nombre totale de passage par l'état j.

Définition

- L'état j est dit **récurrent** (persistant) si

$$P_j\{T < \infty\} = 1$$

- Sinon, si $P_j\{T = \infty\} > 0$ alors j est **transitoire**.

Classification

Étant donnée une chaîne de Markov $\{Xn\}_{n\in\mathbb{N}}$ d'espace des états E, de distribution initiale π_0 et de matrice de transition $\mathbb{P}$. Soit T l'instant du premier passage par un état fixé $j, j \in E$ et N_j le nombre totale de passage par l'état j.

Définition

- L'état j est dit **récurrent** (persistant) si

$$P_j\{T < \infty\} = 1$$

- Sinon, si $P_j\{T = \infty\} > 0$ alors j est **transitoire**.
- Un état récurrent j est dit **nul** si $E_j(T) = +\infty$.

$\mathscr{C}$lassification

Étant donnée une chaîne de Markov $\{Xn\}_{n\in\mathbb{N}}$ d'espace des états E, de distribution initiale π_0 et de matrice de transition $\mathbb{P}$. Soit T l'instant du premier passage par un état fixé $j, j \in E$ et N_j le nombre totale de passage par l'état j.

Définition

- L'état j est dit **récurrent** (persistant) si

$$P_j\{T < \infty\} = 1$$

- Sinon, si $P_j\{T = \infty\} > 0$ alors j est **transitoire**.
- Un état récurrent j est dit **nul** si $E_j(T) = +\infty$.
- Sinon il est dit **non nul**.

Pr. Chaabane Djamal

12/12/2015
06:53:52

Définition (suite)

☛ Un état récurrent j est dit **périodique** de période δ si $\delta \geq 2$ est le plus grand entier tel que

$$P_j\{T = n\delta \text{ pour } n \geq 1\} = 1$$

Classification

Définition (suite)

- Un état récurrent j est dit **périodique** de période δ si $\delta \geq 2$ est le plus grand entier tel que

$$P_j\{T = n\delta \text{ pour } n \geq 1\} = 1$$

- Sinon, s'il n'existe pas un tel n avec $\delta \geq 2$, j est dit **apériodique**.

Classification

- Si j récurrent

Pr. Chaabane Djamal

12/12/2015
06:53:52

- Si j récurrent $\Rightarrow v_{jj} = 1$

$\mathscr{C}$lassification

- Si j récurrent $\Rightarrow v_{jj} = 1 \Rightarrow r_{jj} = +\infty$

Pr. Chaabane Djamal

Classification

- Si j récurrent $\Rightarrow v_{jj} = 1 \Rightarrow r_{jj} = +\infty \Rightarrow \{N_j = \infty\}$ est presque certain

Classification

- Si j récurrent $\Rightarrow v_{jj} = 1 \Rightarrow r_{jj} = +\infty \Rightarrow \{N_j = \infty\}$ est presque certain
- Si j est transitoire

Classification

- Si j récurrent $\Rightarrow v_{jj} = 1 \Rightarrow r_{jj} = +\infty \Rightarrow \{N_j = \infty\}$ est presque certain
- Si j est transitoire $\Rightarrow v_{jj} < 1$

Pr. Chaabane Djamal

12/12/2015
06:53:52

Classification

- Si j récurrent $\Rightarrow v_{jj} = 1 \Rightarrow r_{jj} = +\infty \Rightarrow \{N_j = \infty\}$ est presque certain
- Si j est transitoire $\Rightarrow v_{jj} < 1 \Rightarrow$ La probabilité de quitter sans retour $1 - v_{jj} > 0$

Classification

- Si j récurrent $\Rightarrow v_{jj} = 1 \Rightarrow r_{jj} = +\infty \Rightarrow \{N_j = \infty\}$ est presque certain
- Si j est transitoire $\Rightarrow v_{jj} < 1 \Rightarrow$ La probabilité de quitter sans retour $1 - v_{jj} > 0 \Rightarrow r_{jj} < \infty$

- Si j récurrent $\Rightarrow v_{jj} = 1 \Rightarrow r_{jj} = +\infty \Rightarrow \{N_j = \infty\}$ est presque certain
- Si j est transitoire $\Rightarrow v_{jj} < 1 \Rightarrow$ La probabilité de quitter sans retour $1 - v_{jj} > 0 \Rightarrow r_{jj} < \infty$
- $r_{jj} < \infty$;

Pr. Chaabane Djamal

12/12/2015
06:53:52

Classification

- Si j récurrent $\Rightarrow v_{jj} = 1 \Rightarrow r_{jj} = +\infty \Rightarrow \{N_j = \infty\}$ est presque certain
- Si j est transitoire $\Rightarrow v_{jj} < 1 \Rightarrow$ La probabilité de quitter sans retour $1 - v_{jj} > 0 \Rightarrow r_{jj} < \infty$
- $r_{jj} < \infty$;donc $r_{ij} = v_{ij} r_{jj} < r_{jj} < \infty$
  $\forall i \in E; \sum_{n \geq 0} p_{ij}^n < \infty \Rightarrow P_{ij}^n \to 0.$

$\mathscr{C}$lassification

- Si j récurrent $\Rightarrow v_{jj} = 1 \Rightarrow r_{jj} = +\infty \Rightarrow \{N_j = \infty\}$ est presque certain
- Si j est transitoire $\Rightarrow v_{jj} < 1 \Rightarrow$ La probabilité de quitter sans retour $1 - v_{jj} > 0 \Rightarrow r_{jj} < \infty$
- $r_{jj} < \infty$;donc $r_{ij} = v_{ij} r_{jj} < r_{jj} < \infty$
  $\forall i \in E; \sum_{n \geq 0} p_{ij}^n < \infty \Rightarrow P_{ij}^n \to 0.$
- Si j est un état récurrent nul, donc $E_j(T) = \infty$ (durée moyenne entre deux retours vers j est infinie) $\to P_{ij}^n \to 0.$

Classification

Théorème

Si j est transitoire ou récurrent nul alors

$$\lim_{n\to\infty} P_{ij}^{n} = 0 \tag{5}$$

Classification

Théorème

- *Si j est transitoire ou récurrent nul alors*

$$\lim_{n\to\infty} P_{ij}^n = 0 \tag{5}$$

- *Si j est un état récurrent apériodique, alors*

$$\pi_j = \lim_{n\to\infty} P_{ij}^n > 0 \tag{6}$$

Classification

Pr. Chaabane Djamal

Théorème

- *Si j est transitoire ou récurrent nul alors*

$$\lim_{n\to\infty} P_{ij}^{n} = 0 \tag{5}$$

- *Si j est un état récurrent apériodique, alors*

$$\pi_j = \lim_{n\to\infty} P_{ij}^{n} > 0 \tag{6}$$

- *Pour tout $i \in E$*

$$\lim_{n\to\infty} P_{ij}^{n} = \nu_{ij}\pi_j \tag{7}$$

Classification

Définition (suite)

- **accessible** :l'état j est accessible depuis l'état i si il existe au moins un chemin menant de i à j. Ce qui donne : $\exists n \in \mathbb{N} | p_{ij}^{n} > 0$.

Classification

Définition (suite)

- **accessible** :l'état j est accessible depuis l'état i si il existe au moins un chemin menant de i à j. Ce qui donne : $\exists n \in \mathbb{N} | p_{ij}^{n} > 0$.
- **communiquant** :les états i et j communique si il existe au moins de chemin menant de i à j et un chemin qui mène de j à i.

$$\exists n \in \mathbb{N} | p_{ij}^{n} > 0 \text{ et } \exists m \in \mathbb{N} | p_{ji}^{m} > 0$$

Classification

Définition

☛ ***accessible*** *:l'état j est accessible depuis l'état i si il existe au moins un chemin menant de i à j. Ce qui donne :*
$\exists n \in \mathbb{N} | p_{ij}^{n} > 0.$

Classification

Définition

- ***accessible*** *:l'état j est accessible depuis l'état i si il existe au moins un chemin menant de i à j. Ce qui donne :* $\exists n \in \mathbb{N} | p_{ij}^{n} > 0$.
- ***communiquant*** *:les états i et j communique si il existe au moins de chemin menant de i à j et un chemin qui mène de j à i.*

$$\exists n \in \mathbb{N} | p_{ij}^{n} > 0 \ et \ \exists m \in \mathbb{N} | p_{ji}^{m} > 0$$

$\mathscr{C}$lassification

Proposition

$i \to j$ *si et seulement si il existe* $n \in \mathbb{N}$ *tel que* $p_{i,j}^{(n)} > 0$.

Classification

Proposition

$i \to j$ si et seulement si il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $p_{i,j}^{(n)} > 0$.

Proposition

Si $i \to j$ et $j \to k$ alors $i \to k$.

$\mathscr{C}$lassification

Proposition

$i \to j$ *si et seulement si il existe* $n \in \mathbb{N}$ *tel que* $p_{i,j}^{(n)} > 0$.

Proposition

Si $i \to j$ *et* $j \to k$ *alors* $i \to k$.

Preuve

- *Si* $i \to j$, *alors* $\exists r \geq 0 \,|\, p_{ij}^{r} > 0$.

$\mathscr{C}$lassification

Pr. Chaabane Djamal

12/12/2015 06:53:52

Proposition

$i \to j$ *si et seulement si il existe* $n \in \mathbb{N}$ *tel que* $p_{i,j}^{(n)} > 0.$

Proposition

Si $i \to j$ *et* $j \to k$ *alors* $i \to k.$

Preuve

- *Si* $i \to j$*, alors* $\exists r \geq 0 \,|\, p_{ij}^{r} > 0.$
- *Si* $j \to k$*, alors* $\exists s \geq 0 \,|\, p_{jk}^{s} > 0.$

Classification

Proposition

$i \to j$ si et seulement si il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $p_{i,j}^{(n)} > 0$.

Proposition

Si $i \to j$ et $j \to k$ alors $i \to k$.

Preuve

- *Si $i \to j$, alors $\exists r \geq 0 \,|\, p_{ij}^{r} > 0$.*
- *Si $j \to k$, alors $\exists s \geq 0 \,|\, p_{jk}^{s} > 0$.*
- *Pour $n = r + s$, on a :*

$$p_{ik}^{n} = \sum_{\alpha \in E} p_{i\alpha}^{r} p_{\alpha k}^{s} \geq p_{ij}^{r} p_{jk}^{s} > 0.$$

Classification

Pr. Chaabane Djamal

Proposition

$i \to j$ *si et seulement si il existe* $n \in \mathbb{N}$ *tel que* $p_{i,j}^{(n)} > 0$.

Proposition

Si $i \to j$ *et* $j \to k$ *alors* $i \to k$.

Preuve

- *Si* $i \to j$, *alors* $\exists r \geq 0 \,|\, p_{ij}^{r} > 0$.
- *Si* $j \to k$, *alors* $\exists s \geq 0 \,|\, p_{jk}^{s} > 0$.
- *Pour* $n = r + s$, *on a :*

$$p_{ik}^{n} = \sum_{\alpha \in E} p_{i\alpha}^{r} p_{\alpha k}^{s} \geq p_{ij}^{r} p_{jk}^{s} > 0.$$

Donc $i \to k$ ∎

Classification

Définition

Un ensemble d'états C est dit fermé si : $i \in C$ et $i \to j$ alors $j \in C$.

Classification

Définition

Un ensemble d'états C est dit fermé si : $i \in C$ et $i \rightarrow j$ alors $j \in C$.

Définition

- *Un ensemble C fermé est* ***irréductible*** *si aucun sous-ensemble de C n'est fermé.*

Classification

Définition

Un ensemble d'états C est dit fermé si : $i \in C$ et $i \to j$ alors $j \in C$.

Définition

- *Un ensemble C fermé est* ***irréductible*** *si aucun sous-ensemble de C n'est fermé.*
- *Une chaîne de Markov est* ***irréductible*** *si son ensemble des états est l'unique ensemble fermé.*

Classification

Définition

Un ensemble d'états C est dit fermé si : $i \in C$ et $i \to j$ alors $j \in C$.

Définition

- *Un ensemble C fermé est **irréductible** si aucun sous-ensemble de C n'est fermé.*
- *Une chaîne de Markov est **irréductible** si son ensemble des états est l'unique ensemble fermé.*

Définition

Un état i est dit absorbant si $\{i\}$ est un ensemble fermée.

Classification

Critère

Un état j est absorbant si et seulement si $p_{jj} = 1$

Classification

Critère

Un état j est absorbant si et seulement si $p_{jj} = 1$

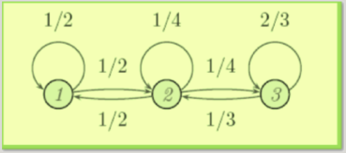
Proposition

Soit C un sous-ensemble d'un ensemble des états E d'une chaîne de Markov. La sous-matrice Q correspondante à C est stochastique.

Classification

Exemple

Considérons la chaîne de Markov suivante :



- *Cette chaîne est irréductible car tous les états communiquent. Bien que* $p_{13} = 0$, $p_{13}^{(n)} > 0$ *pour* $n \geq 2$.

Classification

Exemple

Considérons la chaîne de Markov suivante :

$$\mathbb{P} = \begin{array}{c|ccccc|} & a & b & c & d & e \\ a & 0.5 & 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ b & 0 & 0.25 & 0 & 0.75 & 0 \\ c & 0 & 0 & 0.33 & 0 & 0.67 \\ d & 0.25 & 0.50 & 0 & 0.25 & 0 \\ e & 0.33 & 0 & 0.33 & 0 & 0.33 \end{array}$$

Les classes fermées : $\{a, c, e\}, \{a, b, c, d, e\}$ *et donc la chaîne n'est pas irréductible.*

Classification

Pr. Chaabane Djamal

12/12/2015
06:53:52

Lemme

$\mathscr{C}$lassification

Lemme

Si $\mathbf{j}$ ***est un état récurrent*** *et* $\mathbf{j} \to \mathbf{k}$,

Classification

Lemme

Si $\mathbf{j}$ ***est un état récurrent*** *et* $\mathbf{j} \to \mathbf{k}$, *alors* $\mathbf{k} \to \mathbf{j}$

Classification

Lemme

Si $\mathbf{j}$ ***est un état récurrent*** *et* $\mathbf{j} \rightarrow \mathbf{k}$, *alors* $\mathbf{k} \rightarrow \mathbf{j}$ *et* $\mathbf{v_{kj}} = \mathbf{1}$.

Preuve

- *Soit* j *un état récurent, et* $j \rightarrow k$, $k \in E$ *sans retour à* j.

Classification

Lemme

Si $\mathbf{j}$ ***est un état récurrent*** *et* $\mathbf{j} \to \mathbf{k}$, *alors* $\mathbf{k} \to \mathbf{j}$ *et* $\mathbf{v_{kj}} = \mathbf{1}$.

Preuve

- *Soit* j *un état récurent, et* $j \to k$, $k \in E$ *sans retour à* j.
- *On pose* $\alpha; \alpha > 0$ *la probabilité correspondante.*

Classification

Lemme

Si **j** ***est un état récurrent*** *et* **j** $\rightarrow$ **k**, *alors* **k** $\rightarrow$ **j** *et* $\mathbf{v_{kj}} = \mathbf{1}$.

Preuve

- *Soit j un état récurent, et* $j \rightarrow k$, $k \in E$ *sans retour à j.*
- *On pose* $\alpha; \alpha > 0$ *la probabilité correspondante.*
- *Une fois le processus est à k, la probabilité de ne pas retourner à j est* $1 - v_{kj}$.

Classification

Lemme

Si **j** ***est un état récurrent*** *et* **j** $\rightarrow$ **k***, alors* **k** $\rightarrow$ **j***et* $\mathbf{v_{kj}} = \mathbf{1}$.

Preuve

- *Soit j un état récurent, et* $j \rightarrow k$, $k \in E$ *sans retour à j.*
- *On pose* $\alpha; \alpha > 0$ *la probabilité correspondante.*
- *Une fois le processus est à k, la probabilité de ne pas retourner à j est* $1 - v_{kj}$.
- *La probabilité de ne pas retourner à j à partir de j est la probabilité d'être dans un état quelconque de E (k est l'un de ces états) et puis ne pas retourner à j à partir de cet état.*

Classification

Preuve (Suite)

- *Donc,* $1 - v_{jj} =$
  $Prob\{(\bigcup_{i \in E} \text{être à l'état } i) \bigcap \text{ ne pas retourner à } j \text{ de } i\}$ *d'où*

$$1 - vjj \geq \alpha \times (1 - v_{kj}) \geq 0.$$

$\alpha > 0$ *et* j *récurrent donc* $v_{jj} = 1.$

Classification

Preuve (Suite)

- *Donc,* $1 - v_{jj} =$ $Prob\{(\bigcup_{i \in E}$ *être à l'état i*$) \bigcap$ *ne pas retourner à j de i*$\}$ *d'où*

$$1 - vjj \geq \alpha \times (1 - v_{kj}) \geq 0.$$

$\alpha > 0$ *et j récurrent donc* $v_{jj} = 1$.

- *En conclusion,* $v_{kj} = 1$ *et donc* $k \to j$. ■

Classification

Théorème

A partir d'un état récurrent seulement les états récurrent peuvent être atteint

Pr. Chaabane Djamal

12/12/2015
06:53:52

Classification

Théorème

A partir d'un état récurrent seulement les états récurrent peuvent être atteint

Pr. Chaabane Djamal

Preuve

- *On pose* $\beta = p_{jk}^{r} \times p_{kj}^{s}$;

Pr. Chaabane Djamal

Preuve

- *On pose* $\beta = p^r_{jk} \times p^s_{kj}$;
- *Comme* $\{X_{s+n+r} = k\} \supset \{X_s = j, X_{s+n} = j, X_{s+n+r} = k\}$,

Classification

Preuve

- *On pose* $\beta = p_{jk}^{r} \times p_{kj}^{s}$;
- *Comme* $\{X_{s+n+r} = k\} \supset \{X_s = j, X_{s+n} = j, X_{s+n+r} = k\}$,
- *on a :*

$$P_{kk}^{s+n+r} = P_k\{X_{s+n+r} = k\}$$

$\mathscr{C}$lassification

Pr. Chaabane Djamal

12/12/2015
06:53:52

Preuve

- *On pose* $\beta = p_{jk}^{r} \times p_{kj}^{s}$;
- *Comme* $\{X_{s+n+r} = k\} \supset \{X_s = j, X_{s+n} = j, X_{s+n+r} = k\}$,
- *on a :*

$$\begin{aligned} P_{kk}^{s+n+r} &= P_k\{X_{s+n+r} = k\} \\ &\geq P_k\{X_s = j, X_{s+n} = j, X_{s+n+r} = k\} \end{aligned}$$

$\mathscr{C}$lassification

Preuve

- *On pose* $\beta = p^r_{jk} \times p^s_{kj}$;
- *Comme* $\{X_{s+n+r} = k\} \supset \{X_s = j, X_{s+n} = j, X_{s+n+r} = k\}$,
- *on a :*

$$\begin{aligned} P^{s+n+r}_{kk} &= P_k\{X_{s+n+r} = k\} \\ &\geq P_k\{X_s = j, X_{s+n} = j, X_{s+n+r} = k\} \\ &= P^s_{kj} P^n_{jj} P^r_{jk} \end{aligned}$$

Classification

Preuve

- *On pose* $\beta = p^r_{jk} \times p^s_{kj}$;
- *Comme* $\{X_{s+n+r} = k\} \supset \{X_s = j, X_{s+n} = j, X_{s+n+r} = k\}$,
- *on a :*

$$\begin{aligned} P^{s+n+r}_{kk} &= P_k\{X_{s+n+r} = k\} \\ &\geq P_k\{X_s = j, X_{s+n} = j, X_{s+n+r} = k\} \\ &= P^s_{kj} P^n_{jj} P^r_{jk} \\ &= \beta P^n_{jj} \end{aligned}$$

$\mathscr{C}$lassification

Preuve

- *on a :*

$$r_{kk} = \sum_{\ell=0}^{\infty} P_{kk}^{\ell} \geq \sum_{\ell=r+s}^{\infty} P_{kk}^{\ell}$$

Classification

Preuve

- *on a :*

$$\begin{aligned} r_{kk} = \sum_{\ell=0}^{\infty} P_{kk}^{\ell} &\geq \sum_{\ell=r+s}^{\infty} P_{kk}^{\ell} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} P_{kk}^{n+r+s} \end{aligned}$$

Classification

Preuve

- *on a :*

$$
\begin{aligned}
r_{kk} = \sum_{\ell=0}^{\infty} P_{kk}^{\ell} &\geq \sum_{\ell=r+s}^{\infty} P_{kk}^{\ell} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} P_{kk}^{n+r+s} \\
&\geq \beta \sum_{n=0}^{\infty} P_{jj}^{n}
\end{aligned}
$$

$\mathscr{C}$lassification

Preuve

- *on a :*

$$
\begin{aligned}
r_{kk} = \sum_{\ell=0}^{\infty} P_{kk}^{\ell} & \geq \sum_{\ell=r+s}^{\infty} P_{kk}^{\ell} \\
& = \sum_{n=0}^{\infty} P_{kk}^{n+r+s} \\
& \geq \beta \sum_{n=0}^{\infty} P_{jj}^{n} \\
& = \beta r_{jj}
\end{aligned}
$$

Classification

Preuve

- *on a :*

$$
\begin{aligned}
r_{kk} = \sum_{\ell=0}^{\infty} P_{kk}^{\ell} &\geq \sum_{\ell=r+s}^{\infty} P_{kk}^{\ell} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} P_{kk}^{n+r+s} \\
&\geq \beta \sum_{n=0}^{\infty} P_{jj}^{n} \\
&= \beta r_{jj}
\end{aligned}
$$

- *j récurrent, alors $r_{jj} = \infty$.*

Classification

Preuve

- *on a :*

$$\begin{aligned} r_{kk} = \sum_{\ell=0}^{\infty} P_{kk}^{\ell} &\geq \sum_{\ell=r+s}^{\infty} P_{kk}^{\ell} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} P_{kk}^{n+r+s} \\ &\geq \beta \sum_{n=0}^{\infty} P_{jj}^{n} \\ &= \beta r_{jj} \end{aligned}$$

- *j récurrent, alors $r_{jj} = \infty$. Comme $\beta > 0$*

Classification

Preuve

- *on a :*

$$\begin{aligned} r_{kk} = \sum_{\ell=0}^{\infty} P_{kk}^{\ell} &\geq \sum_{\ell=r+s}^{\infty} P_{kk}^{\ell} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} P_{kk}^{n+r+s} \\ &\geq \beta \sum_{n=0}^{\infty} P_{jj}^{n} \\ &= \beta r_{jj} \end{aligned}$$

- *j récurrent, alors $r_{jj} = \infty$. Comme $\beta > 0$ donc $r_{kk} = \infty$*

Classification

Preuve

- *on a :*

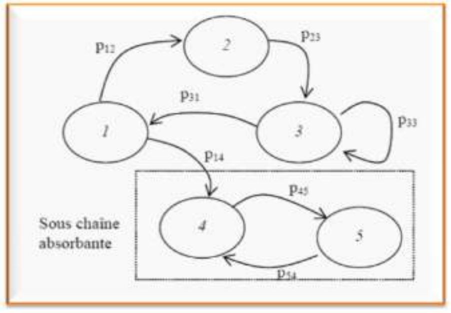
$$\begin{aligned} r_{kk} = \sum_{\ell=0}^{\infty} P_{kk}^{\ell} &\geq \sum_{\ell=r+s}^{\infty} P_{kk}^{\ell} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} P_{kk}^{n+r+s} \\ &\geq \beta \sum_{n=0}^{\infty} P_{jj}^{n} \\ &= \beta r_{jj} \end{aligned}$$

- *j récurrent, alors $r_{jj} = \infty$. Comme $\beta > 0$ donc $r_{kk} = \infty \Rightarrow k$ est récurrent.* ■

Pr. Chaabane Djamal

Exemple

La chaîne suivante possède une sous- chaîne de Markov irréductible $\{4, 5\}$ *:*



Classification

Lemme

Pour chaque état récurrent j il existe un ensemble fermé irréductible qui contient j.

Classification

Pr. Chaabane Djamal

12/12/2015 06:53:52

Lemme

Pour chaque état récurrent j il existe un ensemble fermé irréductible qui contient j.

Preuve

- *Soient j un état récurrent et C l'ensemble de tous les états accessibles de j.*

Classification

Lemme

Pour chaque état récurrent j il existe un ensemble fermé irréductible qui contient j.

Preuve

- *Soient j un état récurrent et C l'ensemble de tous les états accessibles de j. Manifestement, ceci forme un ensemble fermé.*

Classification

Lemme

Pour chaque état récurrent j il existe un ensemble fermé irréductible qui contient j.

Preuve

- *Soient j un état récurrent et C l'ensemble de tous les états accessibles de j. Manifestement, ceci forme un ensemble fermé.On démontre que si $i, k \in C$ alors $i \to k$.*

Pr. Chaabane Djamal

Lemme

Pour chaque état récurrent j il existe un ensemble fermé irréductible qui contient j.

Preuve

- *Soient j un état récurrent et C l'ensemble de tous les états accessibles de j. Manifestement, ceci forme un ensemble fermé.On démontre que si $i, k \in C$ alors $i \to k$.*
- *Si $i \in C$, alors $j \to i$.*

Classification

Lemme

Pour chaque état récurrent j il existe un ensemble fermé irréductible qui contient j.

Preuve

- *Soient j un état récurrent et C l'ensemble de tous les états accessibles de j. Manifestement, ceci forme un ensemble fermé.On démontre que si $i, k \in C$ alors $i \to k$.*
- *Si $i \in C$, alors $j \to i$.Comme j est récurrent, d'après le lemme (1) ceci implique $i \to j$.*

Classification

Lemme

Pour chaque état récurrent j il existe un ensemble fermé irréductible qui contient j.

Preuve

- *Soient j un état récurrent et C l'ensemble de tous les états accessibles de j. Manifestement, ceci forme un ensemble fermé.On démontre que si $i, k \in C$ alors $i \to k$.*
- *Si $i \in C$, alors $j \to i$.Comme j est récurrent, d'après le lemme (1) ceci implique $i \to j$. Donc Si $k \in C$ un autre état, alors $j \to k$.*

Classification

Lemme

Pour chaque état récurrent j il existe un ensemble fermé irréductible qui contient j.

Preuve

- *Soient j un état récurrent et C l'ensemble de tous les états accessibles de j. Manifestement, ceci forme un ensemble fermé.On démontre que si $i, k \in C$ alors $i \to k$.*
- *Si $i \in C$, alors $j \to i$.Comme j est récurrent, d'après le lemme (1) ceci implique $i \to j$. Donc Si $k \in C$ un autre état, alors $j \to k$.*

$$i \to j \wedge j \to k \Rightarrow i \to k$$

■

$\mathscr{C}$lassification

Théorème (IMPORTANT)

Dans une chaîne de Markov les états récurrents peuvent être divisé d'une manière unique, en ensembles fermés irréductibles $C_1, C_2, \ldots$

Pr. Chaabane Djamal

12/12/2015 06:53:52

Remarque

- *En général une chaîne de Markov contient l'ensemble fermé des états récurrents* $C = C_1 \cup C_2 \cup \ldots$ *et l'ensemble des états transitoires* D.

$\mathscr{C}$lassification

Remarque

- *En général une chaîne de Markov contient l'ensemble fermé des états récurrents $C = C_1 \cup C_2 \cup \ldots$ et l'ensemble des états transitoires D.*
- *En vertu de la remarque ci-dessus, P peut être réécrite sous la forme :*

$$\overline{\mathbb{P}} = \begin{pmatrix} P_1 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & P_2 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & P_3 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ Q_1 & Q_2 & Q_3 & \cdot & \cdot & \cdot & Q \end{pmatrix} \tag{8}$$

Classification

Théorème

Soit X une chaîne de Markov irréductible. Ou bien tous les états sont ***transitoires****,ou* ***récurrents nuls*** *ou tous sont* ***récurrents non nuls*** *.*

Pr. Chaabane Djamal

12/12/2015 06:53:52

Classification

Corollaire

Soit C un ensemble irréductible fermé de cardinal finie. Alors aucun état n'est récurrent nul.

Classification

Corollaire

Soit C un ensemble irréductible fermé de cardinal finie. Alors aucun état n'est récurrent nul.

Corollaire

Si C est un ensemble irréductible fermé de cardinal finie. Alors aucun état n'est transitoire.

$\mathscr{C}$lassification

Exemple

Soit une chaîne de Markov avec espace d'états $E = \{1, 2, ..., 10\}$ *et matrice des probabilités de transition*

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Pr. Chaabane Djamal

Exemple

$\{N_n; n \in \mathbb{N}\}$ *le processus qui représente le nombre de succès obtenu dans une succession de tirages de Bernoulli* $\{0, 1, ..., n\}$

Classification

Exemple

$\{N_n; n \in \mathbb{N}\}$ *le processus qui représente le nombre de succès obtenu dans une succession de tirages de Bernoulli* $\{0, 1, ..., n\}$
Toutes les transitions sont de la forme $j \to j + 1 \forall j \in E$ *donc*

$\mathscr{C}$lassification

Exemple

$\{N_n; n \in \mathbb{N}\}$ le processus qui représente le nombre de succès obtenu dans une succession de tirages de Bernoulli $\{0, 1, ..., n\}$ Toutes les transitions sont de la forme $j \to j+1 \forall j \in E$ donc tous les états sont transitoires.

Classification

Théorème

Soit X une chaîne de Markov iréductible dont E sont ensemble des états et $\mathbb{P}$; Considérons le système d'équations linéaires

$$\vartheta_j = \sum_{i \in E} \vartheta_i p_{ij} \quad \forall j \in E. \tag{9}$$

Tous les états sont récurrents positifs ***si et seulement si*** *il existe une solution ϑ vérifiant*

$$\sum_{j \in E} \vartheta_j = 1 \tag{10}$$

Si (9) et (10) admettent une solution ϑ, alors $\vartheta_j > 0, \ \forall j \in E$ et elle est ***unique****.*

Classification

Théorème

Soit X une chaîne de Markov irréductible dont E son ensemble des états et $\mathbb{P}$;

$\mathscr{C}$lassification

Théorème

Soit X une chaîne de Markov irréductible dont E son ensemble des états et $\mathbb{P}$; soit $\mathbf{Q}$ la matrice obtenue de $\mathbb{P}$ en éliminant la ligne et la colonne k pour un k de E.

$\mathscr{C}$lassification

Théorème

Soit X une chaîne de Markov irréductible dont E son ensemble des états et $\mathbb{P}$; soit $\mathbf{Q}$ la matrice obtenue de $\mathbb{P}$ en éliminant la ligne et la colonne k pour un k de E. Donc ***tous les états sont récurrents si et seulement si l'unique solution du système d'équations linéaires***

$$\boxed{h_i = \sum_{j \in E \setminus \{k\}} Q_{ij} h_j \quad 0 \leq h_j \leq 1 \forall j \in E \setminus \{k\}.}$$

est $h_i = 0 \quad \forall i \in E \setminus \{k\}. \forall j \in E$ et elle est ***unique***.

$\mathscr{A}$pplications

Marche aléatoire

Considérons le processus stochastique**MARCHE ALÉATOIRE** avec barrière . $E = \{0, 1, ..\}$ et matrice de probabilité de transition

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ q & 0 & p & 0 & 0 & \dots \\ 0 & q & 0 & p & 0 & \dots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \end{pmatrix} \tag{11}$$

Pour $0 < p < 1$ et q=1-p.
Si le système est à l'état i à un instant n,

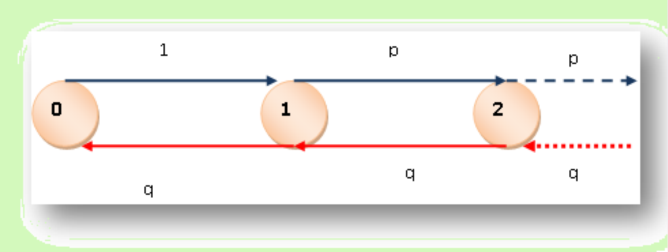
$\mathscr{A}$pplications

Marche aléatoire

Considérons le processus stochastique**MARCHE ALÉATOIRE avec barrière** . $E = \{0, 1, ..\}$ et matrice de probabilité de transition

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ q & 0 & p & 0 & 0 & \dots \\ 0 & q & 0 & p & 0 & \dots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \end{pmatrix} \tag{11}$$

Pour $0 < p < 1$ et q=1-p.
Si le système est à l'état i à un instant n, il passera à l'état $\mathbf{i+1}$ à l'instant $n+1$ ou à l'état $\mathbf{i-1}$ sauf pour $\mathbf{i=0}$, le système passera sûrement à l'état $\mathbf{1}$.


1
p
p
0
1
2
q
q
q

$\mathscr{A}$pplications

Pr. Chaabane Djamal

Marche aléatoire

Applications

Marche aléatoire

- Tous les états sont communicants $\Rightarrow$ la chaîne est irréductible

$\mathscr{A}$pplications

Marche aléatoire

- Tous les états sont communicants $\Rightarrow$ la chaîne est irréductible
- L'état $\{0\}$ est périodique et de période égale à $\delta = 2$ et comme la chaîne est irréductible $\Rightarrow$ donc tous les états ont la même période.

Pr. Chaabane Djamal

12/12/2015
06:53:52

$\mathscr{A}$pplications

Marche aléatoire

- Tous les états sont communicants $\Rightarrow$ la chaîne est irréductible
- L'état $\{0\}$ est périodique et de période égale à $\delta = 2$ et comme la chaîne est irréductible $\Rightarrow$ donc tous les états ont la même période.
- Tous les états sont transitoires, récurrents positifs ou récurrents nuls.

$\mathscr{A}$pplications

Le système

- Résolvons le système des équations linéaires suivant

$$\begin{array}{lcl} \vartheta_0 & = & q\vartheta_1 \\ \vartheta_1 & = & \vartheta_0 + q\vartheta_2 \\ \vartheta_2 & = & p\vartheta_1 + q\vartheta_3 \\ \dots & \dots & \dots \end{array} \tag{12}$$

$\mathscr{A}$pplications

Le système

- Résolvons le système des équations linéaires suivant

$$\begin{array}{ccc} \vartheta_0 & = & q\vartheta_1 \\ \vartheta_1 & = & \vartheta_0 + q\vartheta_2 \\ \vartheta_2 & = & p\vartheta_1 + q\vartheta_3 \\ \dots & \dots & \dots \end{array} \tag{12}$$

La solution

- On obtient

$$\vartheta_j = \frac{1}{q}\left(\frac{p}{q}\right)^{j-1}\vartheta_0; \quad j = 1, 2, \dots \tag{13}$$
$$\vartheta_0 \geq 0$$

Si $p < q$

- On obtient

$$\sum_{j=0}^{\infty} \vartheta_j = \left(1 + \frac{1}{q} \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{p}{q}\right)^{j-1}\right) \vartheta_0 = \frac{2q}{q-p} \vartheta_0; \qquad (14)$$

Si $p < q$

- On obtient

$$\sum_{j=0}^{\infty} \vartheta_j = \left(1 + \frac{1}{q}\sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{p}{q}\right)^{j-1}\right)\vartheta_0 = \frac{2q}{q-p}\vartheta_0; \tag{14}$$

En choisissant

-

$$\vartheta_0 = \frac{q-p}{2q} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{p}{q}\right) \tag{15}$$

Si $p < q$

- On obtient

$$\sum_{1}^{\infty} \vartheta_j = 1 \tag{16}$$

Pr. Chaabane Djamal

12/12/2015 06:53:52

Si $p < q$

☛

$$\vartheta_j = \begin{cases} \frac{1}{2}\left(1 - \frac{p}{q}\right) & si \quad j = 0 \\ \frac{1}{2q}\left(1 - \frac{p}{q}\right)\left(\frac{p}{q}\right)^{j-1} & si \quad j \geq 1 \end{cases} \tag{17}$$

Si $p \geq q$

- Tous les états sont récurrents nuls ou transitoires. Considérons

$$\mathbb{Q} = \begin{pmatrix} 0 & p & 0 & 0 & 0 & \dots \\ q & 0 & p & 0 & 0 & \dots \\ 0 & q & 0 & p & 0 & \dots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \end{pmatrix}$$

Si $p \geq q$

- Tous les états sont récurrents nuls ou transitoires. Considérons

$$\mathbb{Q} = \begin{pmatrix} 0 & p & 0 & 0 & 0 & \dots \\ q & 0 & p & 0 & 0 & \dots \\ 0 & q & 0 & p & 0 & \dots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \end{pmatrix}$$

- Résoudre le système d'équations linéaires suivant :

Si $p \geq q$

- Tous les états sont récurrents nuls ou transitoires. Considérons

$$\mathbb{Q} = \begin{pmatrix} 0 & p & 0 & 0 & 0 & \dots \\ q & 0 & p & 0 & 0 & \dots \\ 0 & q & 0 & p & 0 & \dots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \end{pmatrix}$$

- Résoudre le système d'équations linéaires suivant :

$$h = \mathbb{Q} \times h$$

où $h = (h_1, h_2, ...)^t$

Si $p \geq q$

- Ce qui donne

$$\begin{cases} h_i & = & qh_{i-1} + ph_{i+1} \\ & & \end{cases}$$

Si $p \geq q$

- Ce qui donne

$$\begin{cases} h_i & = & qh_{i-1} + ph_{i+1} \\ h_i & = & qh_i + ph_i \end{cases} \tag{18}$$

Si $p \geq q$

☛ Ce qui donne

$$\left\{\begin{array}{lcl} h_i & = & qh_{i-1} + ph_{i+1} \\ h_i & = & qh_i + ph_i \end{array}\right. \tag{18}$$

$$\Downarrow$$

Si $p \geq q$

- Ce qui donne

$$\begin{cases} h_i & = & qh_{i-1} + ph_{i+1} \\ h_i & = & qh_i + ph_i \end{cases} \tag{18}$$

$$\Downarrow$$

Si $p \geq q$

- Ce qui donne

Si $p \geq q$

- Ce qui donne

$$\begin{cases} h_i & = & qh_{i-1} + ph_{i+1} \\ h_i & = & qh_i + ph_i \end{cases} \tag{18}$$

$$\Downarrow$$

Si $p \geq q$

- Ce qui donne

$$\mathbf{p}\left(\mathbf{h_{i+1}} - \mathbf{h_i}\right) \quad = \quad \mathbf{q}\left(\mathbf{h_i} - \mathbf{h_{i-1}}\right) \qquad i = 1, 2, \ldots; \tag{19}$$

Si $p \geq q$

- On trouve

$$\begin{cases} (h_{i+1} - h_i) = \dfrac{q}{p}(h_i - h_{i-1}) \\ \\ \\ \end{cases}$$

Si $p \geq q$

- On trouve

$$\begin{cases} (h_{i+1} - h_i) & = & \dfrac{q}{p}(h_i - h_{i-1}) \\ \dots & = & \left(\dfrac{q}{p}\right)^{i-1} (h_2 - h_1) \\ & & \end{cases}$$

Si $p \geq q$

- On trouve

$$\begin{cases} (h_{i+1} - h_i) & = & \frac{q}{p}(h_i - h_{i-1}) \\ \ldots & = & \left(\frac{q}{p}\right)^{i-1} (h_2 - h_1) \\ & = & \left(\frac{q}{p}\right)^{i} h_1 \quad i = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

Si $p \geq q$

- Donc

$$\begin{aligned} \forall i \geq 1 \quad h_{i+1} &= (h_{i+1} - h_i) + (h_i - h_{i-1}) \\ &+ \ldots + (h_2 - h_1) + h_1 \end{aligned}$$

Si $p \geq q$

- Donc

$$\begin{aligned} \forall i \geq 1 \quad h_{i+1} &= (h_{i+1} - h_i) + (h_i - h_{i-1}) \\ &+ \ldots + (h_2 - h_1) + h_1 \\ &= \left[1 + \frac{q}{p} + \ldots + \left(\frac{q}{p}\right)^i\right] h_1. \end{aligned}$$

Si $p \geq q$

- Donc

$$\begin{aligned} \forall i \geq 1 \quad h_{i+1} &= (h_{i+1} - h_i) + (h_i - h_{i-1}) \\ &+ \ldots + (h_2 - h_1) + h_1 \\ &= \left[1 + \frac{q}{p} + \ldots + \left(\frac{q}{p}\right)^i\right] h_1. \end{aligned}$$

- La solution du système $h = \mathbb{Q}h$ est de la forme

$$h_i = c\left[1 + \frac{q}{p} + \ldots + \left(\frac{q}{p}\right)^{i-1}\right] \quad i = 1, 2, \ldots \tag{20}$$

c est une constante

Si $p = q$

- Dans ce cas l'équation (20) montre que la solution est $h_i = ic \quad \forall i \geq 1$ avec $0 \leq h_i \leq 1 \quad \forall i \geq 1 \Rightarrow \quad c = 0$

Si $p = q$

- Dans ce cas l'équation (20) montre que la solution est $h_i = ic \quad \forall i \geq 1$ avec $0 \leq h_i \leq 1 \quad \forall i \geq 1 \Rightarrow \quad c = 0$

$$\Downarrow$$

Si $p = q$

- Dans ce cas l'équation (20) montre que la solution est $h_i = ic \quad \forall i \geq 1$ avec $0 \leq h_i \leq 1 \quad \forall i \geq 1 \Rightarrow \quad c = 0$

$$\Downarrow$$

Si $p = q$

- Donc l'unique solution du système $h = \mathbb{Q}h$ est $h = 0$, d'où tous les états sont récurrents (ils ne sont pas positifs, donc nuls).

Si $p > q$

- En choisissant $c = 1 - \left(\frac{q}{p}\right)$ on obtient

$$h_i = 1 - \left(\frac{q}{p}\right)^i, \quad i = 1, 2, \ldots$$

vérifiant $0 \leq h_i \leq 1, \quad \forall i.$

- **Dans ce cas tous les états sont tansitoires.**

$\mathscr{C}$alcul de la matrice Potentielle $\mathscr{R}$

Considérons une chaîne de Markov, E espace des états et $\mathbb{P}$ la matrice de probabilités de transition. Soit j un état de E.

$\mathscr{C}$alcul de la matrice Potentielle $\mathscr{R}$

Considérons une chaîne de Markov, E espace des états et $\mathbb{P}$ la matrice de probabilités de transition. Soit j un état de E.

☛ Si j est un état récurrent, donc $\vartheta_{jj} = 1 \Rightarrow r_{jj} = \infty$.

- Si j est accessible à partir de $i; i \in E$ alors $\vartheta_{ij} > 0$ donc $r_{ij} = \infty$.

$\mathscr{C}$alcul de la matrice Potentielle $\mathscr{R}$

Considérons une chaîne de Markov, E espace des états et $\mathbb{P}$ la matrice de probabilités de transition. Soit j un état de E.

- ☛ Si j est un état récurrent, donc $\vartheta_{jj} = 1 \Rightarrow r_{jj} = \infty$.
  - Si j est accessible à partir de i; $i \in E$ alors $\vartheta_{ij} > 0$ donc $r_{ij} = \infty$.
  - Si j n'est pas accessible à partir de i alors $\vartheta_{ij} = 0$ donc $r_{ij} = 0; (0 \times \infty = 0)$

$\mathscr{C}$alcul de la matrice Potentielle $\mathscr{R}$

Considérons une chaîne de Markov, E espace des états et $\mathbb{P}$ la matrice de probabilités de transition. Soit j un état de E.

☛ Si j est un état récurrent, donc $\vartheta_{jj} = 1 \Rightarrow r_{jj} = \infty$.

- Si j est accessible à partir de i; $i \in E$ alors $\vartheta_{ij} > 0$ donc $r_{ij} = \infty$.
- Si j n'est pas accessible à partir de i alors $\vartheta_{ij} = 0$ donc $r_{ij} = 0; (0 \times \infty = 0)$

☛ Donc j est un état récurrent

$\mathscr{C}$alcul de la matrice Potentielle $\mathscr{R}$

Considérons une chaîne de Markov, E espace des états et $\mathbb{P}$ la matrice de probabilités de transition. Soit j un état de E.

- Si j est un état récurrent, donc $\vartheta_{jj} = 1 \Rightarrow r_{jj} = \infty$.
  - Si j est accessible à partir de $i; i \in E$ alors $\vartheta_{ij} > 0$ donc $r_{ij} = \infty$.
  - Si j n'est pas accessible à partir de i alors $\vartheta_{ij} = 0$ donc $r_{ij} = 0; (0 \times \infty = 0)$
- Donc j est un état récurrent $\Rightarrow r_{ij} = \begin{cases} 0 & si \vartheta_{ij} = 0 \\ \infty & si \vartheta_{ij} > 0 \end{cases}$

Pr. Chaabane Djamal

12/12/2015
06:53:52

Chaînes de Markov
Introduction
Matrices Stochastiques
Relation de Chapman-Kolmogorov
Illustrations
Illustration 1
Illustration 2
Classification des états
Passage par un état fixe
Etude asymptotique
Résultats dŠalgèbre linéaire pour les chaînes de Markov

- Si j est un état transitoire et i un état récurrent alors $\vartheta_{ij} = 0 \Rightarrow r_{ij} = 0$

$\mathscr{C}$alcul de la matrice Potentielle $\mathscr{R}$

- Si j est un état transitoire et i un état récurrent alors $\vartheta_{ij} = 0 \Rightarrow r_{ij} = 0$
- Si $i, j \in D \subset E$ sont des états transitoires, on considère $\mathbb{Q}$ la sous-matrice correspondante de $\mathbb{P}$ et $\mathbb{S}$ la sous-matrice correspondante de $\mathscr{R}$.

$\mathscr{C}$alcul de la matrice Potentielle $\mathscr{R}$

- Si j est un état transitoire et i un état récurrent alors $\vartheta_{ij} = 0 \Rightarrow r_{ij} = 0$
- Si $i, j \in D \subset E$ sont des états transitoires, on considère $\mathbb{Q}$ la sous-matrice correspondante de $\mathbb{P}$ et $\mathbb{S}$ la sous-matrice correspondante de $\mathscr{R}$.

Ecrivons $\mathbb{P} = \begin{pmatrix} \mathbb{K} & O \\ \mathbb{L} & \mathbb{Q} \end{pmatrix}$

$\mathscr{C}$alcul de la matrice Potentielle $\mathscr{R}$

- Si j est un état transitoire et i un état récurrent alors $\vartheta_{ij} = 0 \Rightarrow r_{ij} = 0$
- Si $i, j \in D \subset E$ sont des états transitoires, on considère $\mathbb{Q}$ la sous-matrice correspondante de $\mathbb{P}$ et $\mathbb{S}$ la sous-matrice correspondante de $\mathscr{R}$.

Ecrivons $\mathbb{P} = \begin{pmatrix} \mathbb{K} & O \\ \mathbb{L} & \mathbb{Q} \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbb{P}^n = \begin{pmatrix} \mathbb{K}^n & O \\ \mathbb{L}_n & \mathbb{Q}^n \end{pmatrix}$

$\mathscr{C}$alcul de la matrice Potentielle $\mathscr{R}$

- Si j est un état transitoire et i un état récurrent alors $\vartheta_{ij} = 0 \Rightarrow r_{ij} = 0$
- Si $i, j \in D \subset E$ sont des états transitoires, on considère $\mathbb{Q}$ la sous-matrice correspondante de $\mathbb{P}$ et $\mathbb{S}$ la sous-matrice correspondante de $\mathscr{R}$.

$$\text{Ecrivons } \mathbb{P} = \begin{pmatrix} \mathbb{K} & O \\ \mathbb{L} & \mathbb{Q} \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbb{P}^n = \begin{pmatrix} \mathbb{K}^n & O \\ \mathbb{L}_n & \mathbb{Q}^n \end{pmatrix}$$

$$\text{d'où } \mathscr{R} = \sum_{m\geq 0} \mathbb{P}^m = \begin{pmatrix} \sum_{m\geq 0} \mathbb{K}^m & O \\ \sum_{m\geq 0} \mathbb{L}_m & \sum_{m\geq 0} \mathbb{Q}^m \end{pmatrix}$$

$\mathscr{C}$alcul de la matrice Potentielle $\mathscr{R}$

Donc $\mathbb{S} = \sum_{m \geq 0} \mathbb{Q}^m = \mathbb{I} + \mathbb{Q} + \mathbb{Q}^2 + \ldots = \mathbb{S} - \mathbb{I}$

$\mathscr{C}$alcul de la matrice Potentielle $\mathscr{R}$

Donc $\mathbb{S} = \sum_{m \geq 0} \mathbb{Q}^m = \mathbb{I} + \mathbb{Q} + \mathbb{Q}^2 + \ldots = \mathbb{S} - \mathbb{I}$

$$\begin{cases} (\mathbb{I} - \mathbb{Q})\,\mathbb{S} = \mathbb{I} \\ \mathbb{S}\,(\mathbb{I} - \mathbb{Q}) = \mathbb{I} \end{cases} \tag{21}$$

$\mathscr{C}$alcul de la matrice Potentielle $\mathscr{R}$

Proposition

Si card(D) $< \infty$ alors $\mathbb{S} = (\mathbb{I} - \mathbb{Q})^{-1}$. Par contre, si card(D) $= \infty$ alors $\mathbb{S}$ est la solution minimale du systeme (21).

La matrice $\mathscr{R}$

Exemple

Soit une chaîne de Markov avec espace d'états $E = \{1, 2, ..., 8\}$ *et matrice des probabilités de transition*

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.3 & 0.2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.3 & 0.7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.6 & 0.4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1 & 0.9 & 0 \\ 0.2 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.3 \\ 0.2 & 0 & 0.2 & 0 & 0 & 0.6 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice $\mathscr{R}$

- Les classes finales : $C_1 = \{1,2,3\}; C_2\{4,5\}$, l'ensemble $\mathbb{D} = \{6,7,8\}$.

$$\mathbb{Q} = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.9 & 0 \\ 0 & 0 & 0.3 \\ 0.6 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice $\mathscr{R}$

- Les classes finales : $C_1 = \{1, 2, 3\}$; $C_2\{4, 5\}$, l'ensemble $\mathbb{D} = \{6, 7, 8\}$.

$$\mathbb{Q} = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.9 & 0 \\ 0 & 0 & 0.3 \\ 0.6 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- $\mathbb{S} = (\mathbb{I} - \mathbb{Q})^{-1} = \begin{pmatrix} 1.355 & 1.219 & 0.366 \\ 0.244 & 1.219 & 0.366 \\ 0.813 & 0.732 & 1.219 \end{pmatrix}$

La matrice $\mathscr{R}$

- La matrice potentielle $\mathscr{R}$:

$$\mathscr{R} = \begin{pmatrix} \infty & \infty & \infty & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \infty & \infty & \infty & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \infty & \infty & \infty & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \infty & \infty & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \infty & \infty & 0 & 0 & 0 \\ \infty & \infty & \infty & 0 & 0 & \mathbf{1.355} & \mathbf{1.219} & \mathbf{0.366} \\ \infty & \infty & \infty & 0 & 0 & \mathbf{0.244} & \mathbf{1.219} & \mathbf{0.366} \\ \infty & \infty & \infty & 0 & 0 & \mathbf{0.813} & \mathbf{0.732} & \mathbf{1.219} \end{pmatrix}$$

$\mathscr{C}$alcul de la matrice Potentielle $\mathscr{V}$

Considérons une chaîne de Markov, E espace des états et $\mathbb{P}$ la matrice de probabilités de transition. Soit $\mathscr{V} = (\vartheta_{ij})_{i,j \in E}$

$\mathscr{C}$alcul de la matrice Potentielle $\mathscr{V}$

Considérons une chaîne de Markov, E espace des états et $\mathbb{P}$ la matrice de probabilités de transition. Soit $\mathscr{V} = (\vartheta_{ij})_{i,j\in E}$

- ☛ Si i, j deux états récurrents d'une même classe, alors $\vartheta_{ij} = 1$

$\mathscr{C}$alcul de la matrice Potentielle $\mathscr{V}$

Considérons une chaîne de Markov, E espace des états et $\mathbb{P}$ la matrice de probabilités de transition. Soit $\mathscr{V} = (\vartheta_{ij})_{i,j\in E}$

- Si i, j deux états récurrents d'une même classe, alors $\vartheta_{ij} = 1$
- Si i, j des états récurrents dans deux classes différentes alors $\vartheta_{ij} = 0$.

$\mathscr{C}$alcul de la matrice Potentielle $\mathscr{V}$

Considérons une chaîne de Markov, E espace des états et $\mathbb{P}$ la matrice de probabilités de transition. Soit $\mathscr{V} = (\vartheta_{ij})_{i,j\in E}$

- Si i, j deux états récurrents d'une même classe, alors $\vartheta_{ij} = 1$
- Si i, j des états récurrents dans deux classes différentes alors $\vartheta_{ij} = 0$.
- Si i est récurrent et j transitoire, alors $\vartheta_{ij} = 0$.

$\mathscr{C}$alcul de la matrice Potentielle $\mathscr{V}$

Considérons une chaîne de Markov, E espace des états et $\mathbb{P}$ la matrice de probabilités de transition. Soit $\mathscr{V} = (\vartheta_{ij})_{i,j \in E}$

- Si i, j deux états récurrents d'une même classe, alors $\vartheta_{ij} = 1$
- Si i, j des états récurrents dans deux classes différentes alors $\vartheta_{ij} = 0$.
- Si i est récurrent et j transitoire, alors $\vartheta_{ij} = 0$.
- Si i, j deux états transitoires, alors

$\mathscr{C}$alcul de la matrice Potentielle $\mathscr{V}$

Considérons une chaîne de Markov, E espace des états et $\mathbb{P}$ la matrice de probabilités de transition. Soit $\mathscr{V} = (\vartheta_{ij})_{i,j\in E}$

- Si i, j deux états récurrents d'une même classe, alors $\vartheta_{ij} = 1$
- Si i, j des états récurrents dans deux classes différentes alors $\vartheta_{ij} = 0$.
- Si i est récurrent et j transitoire, alors $\vartheta_{ij} = 0$.
- Si i, j deux états transitoires, alors $r_{ij} < \infty; \vartheta_{jj} = 1 - \dfrac{1}{r_{jj}}; \vartheta_{ij} = \dfrac{r_{ij}}{r_{jj}}$

$\mathscr{C}$alcul de la matrice Potentielle $\mathscr{V}$

Considérons une chaîne de Markov, E espace des états et $\mathbb{P}$ la matrice de probabilités de transition. Soit $\mathscr{V} = (\vartheta_{ij})_{i,j \in E}$

- Si i, j deux états récurrents d'une même classe, alors $\vartheta_{ij} = 1$
- Si i, j des états récurrents dans deux classes différentes alors $\vartheta_{ij} = 0$.
- Si i est récurrent et j transitoire, alors $\vartheta_{ij} = 0$.
- Si i, j deux états transitoires, alors $r_{ij} < \infty; \vartheta_{jj} = 1 - \dfrac{1}{r_{jj}}; \vartheta_{ij} = \dfrac{r_{ij}}{r_{jj}}$
- i transitoire et j est récurrent on a :

$\mathscr{C}$alcul de la matrice Potentielle $\mathscr{V}$

Lemme

Soit C une classe finale irréductible, alors

$$\vartheta_{ij} = \vartheta_{ik} \quad \forall j, k \in C (j \neq k)$$

ϑ_{ij} ou ϑ_{ik} est la probabilité d'accès à la classe C.

$\mathscr{C}$alcul de la matrice Potentielle $\mathscr{V}$

Lemme

Soit C une classe finale irréductible, alors

$$\vartheta_{ij} = \vartheta_{ik} \quad \forall j, k \in C (j \neq k)$$

ϑ_{ij} ou ϑ_{ik} est la probabilité d'accès à la classe C.

La matrice $\mathscr{V}$

On forme la mtrice

$$\hat{\mathbb{P}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ b_1 & b_2 & \dots & b_n & \mathbb{Q} \end{pmatrix}$$

$\mathscr{C}$alcul de la matrice Potentielle $\mathscr{V}$

- Les éléments des vecteurs $b_j; j \in C_j$ sont $b_j(i) = \sum_{k \in C_j} p_{ik}$

$\mathscr{C}$alcul de la matrice Potentielle $\mathscr{V}$

- Les éléments des vecteurs $b_j; j \in C_j$ sont $b_j(i) = \sum_{k \in C_j} p_{ik}$
- On écrit $\mathbb{P}$ comme :

$\mathscr{C}$alcul de la matrice Potentielle $\mathscr{V}$

Pr. Chaabane Djamal

- Les éléments des vecteurs $b_j; j \in C_j$ sont $b_j(i) = \sum_{k \in C_j} p_{ik}$
- On écrit $\mathbb{P}$ comme : $\hat{\mathbb{P}} = \begin{pmatrix} \mathbb{I} & 0 \\ \mathbb{B} & \mathbb{Q} \end{pmatrix}$

$\mathscr{C}$alcul de la matrice Potentielle $\mathscr{V}$

- Les éléments des vecteurs $b_j; j \in C_j$ sont $b_j(i) = \sum_{k \in C_j} p_{ik}$
- On écrit $\mathbb{P}$ comme : $\hat{\mathbb{P}} = \begin{pmatrix} \mathbb{I} & 0 \\ \mathbb{B} & \mathbb{Q} \end{pmatrix}$
- d'où $\hat{\mathbb{P}}^n = \begin{pmatrix} \mathbb{I} & 0 \\ (\mathbb{I} + \mathbb{Q} + \ldots + \mathbb{Q}^{n-1})\mathbb{B} & \mathbb{Q}^n \end{pmatrix}$
  $B_n(i,j)$ est la probabilité d'accèder la classe C_j à partir l'état i en n étapes.

$\mathscr{C}$alcul de la matrice Potentielle $\mathscr{V}$

- Les éléments des vecteurs $b_j; j \in C_j$ sont $b_j(i) = \sum_{k \in C_j} p_{ik}$
- On écrit $\mathbb{P}$ comme : $\hat{\mathbb{P}} = \begin{pmatrix} \mathbb{I} & 0 \\ \mathbb{B} & \mathbb{Q} \end{pmatrix}$
- d'où $\hat{\mathbb{P}}^n = \begin{pmatrix} \mathbb{I} & 0 \\ (\mathbb{I} + \mathbb{Q} + \ldots + \mathbb{Q}^{n-1})\mathbb{B} & \mathbb{Q}^n \end{pmatrix}$
  $B_n(i,j)$ est la probabilité d'accèder la classe C_j à partir l'état i en n étapes.
- $\mathbb{G} = \lim_{n\to\infty} \mathbb{B}_n = \left(\sum_{k\geq 0} \mathbb{Q}^n \right) \mathbb{B} = \mathbb{S} \times \mathbb{B}$

$\mathscr{C}$alcul de la matrice Potentielle $\mathscr{R}$

Proposition

Soit $\mathbb{Q}$ une matrice obtenue à partir de $\mathbb{P}$ en éliminant les entrées relatives aux états récurrents. On a $\mathbb{G} = \mathbb{S} \times \mathbb{B}$ et pour tout état transitoire i et toute classe récurrente C_j on a ;

$$G_{ij} = \vartheta_{ik} \quad \forall k \in C_j$$

$\mathscr{C}$alcul de la matrice Potentielle $\mathscr{R}$

☛ S'il y a seulement une seule classe finale et un nombre fini d'états transitoires.

$\mathscr{C}$alcul de la matrice Potentielle $\mathscr{R}$

- S'il y a seulement une seule classe finale et un nombre fini d'états transitoires.
  Comme $\mathbb{P}1 = 1 \Rightarrow \mathbb{B} + \mathbb{Q}1 = 1 \Rightarrow \mathbb{B} = 1 - \mathbb{Q}1$

$\mathscr{C}$alcul de la matrice Potentielle $\mathscr{R}$

- S'il y a seulement une seule classe finale et un nombre fini d'états transitoires.
  Comme $\mathbb{P}1 = 1 \Rightarrow \mathbb{B} + \mathbb{Q}1 = 1 \Rightarrow \mathbb{B} = 1 - \mathbb{Q}1$
  $\mathbb{B}_n = \left(\mathbb{I} + \mathbb{Q} + ... + \mathbb{Q}^{n-1}\right)(1 - \mathbb{Q}1) = 1 - \mathbb{Q}^n 1$

$\mathscr{C}$alcul de la matrice Potentielle $\mathscr{R}$

- S'il y a seulement une seule classe finale et un nombre fini d'états transitoires.
  Comme $\mathbb{P}1 = 1 \Rightarrow \mathbb{B} + \mathbb{Q}1 = 1 \Rightarrow \mathbb{B} = 1 - \mathbb{Q}1$
  $\mathbb{B}_n = \left(\mathbb{I} + \mathbb{Q} + ... + \mathbb{Q}^{n-1}\right)(1 - \mathbb{Q}1) = 1 - \mathbb{Q}^n 1$
  $\mathbb{G} = \lim_{n\to\infty}(1 - \mathbb{Q}^n 1) = 1$

$\mathscr{C}$alcul de la matrice Potentielle $\mathscr{R}$

- S'il y a seulement une seule classe finale et un nombre fini d'états transitoires.
  Comme $\mathbb{P}1 = 1 \Rightarrow \mathbb{B} + \mathbb{Q}1 = 1 \Rightarrow \mathbb{B} = 1 - \mathbb{Q}1$
  $\mathbb{B}_n = \left(\mathbb{I} + \mathbb{Q} + \ldots + \mathbb{Q}^{n-1}\right)(1 - \mathbb{Q}1) = 1 - \mathbb{Q}^n 1$
  $\mathbb{G} = \lim\limits_{n\to\infty}(1 - \mathbb{Q}^n 1) = 1$
  car $\sum\limits_{n\geq 0} \mathbb{Q}^n$ est convegente $\Rightarrow \mathbb{Q}^n \to 0$ qd $n \to \infty$.

$\mathscr{C}$alcul de la matrice Potentielle $\mathscr{R}$

☛ 1 est toujours valeur propre d'une matrice stochatique.

$\mathscr{C}$alcul de la matrice Potentielle $\mathscr{R}$

Pr. Chaabane Djamal

- 1 est toujours valeur propre d'une matrice stochatique.

$$\boxed{\mathbb{P}1 = 1}$$

$\mathscr{C}$alcul de la matrice Potentielle $\mathscr{R}$

- 1 est toujours valeur propre d'une matrice stochatique.

$$\boxed{\mathbb{P}1 = 1}$$

- Soit $\mathbb{P}$ une matrice carrée stochastique, elle est dite ergodique si existe $\lim\limits_{n\to\infty} P^n$ existe.

$\mathscr{C}$alcul de la matrice Potentielle $\mathscr{R}$

- 1 est toujours valeur propre d'une matrice stochatique.

$$\mathbb{P}1 = 1$$

- Soit $\mathbb{P}$ une matrice carrée stochastique, elle est dite ergodique si existe $\lim_{n\to\infty} P^n$ existe.
- Si 1 est valeur propre simple de $\mathbb{P}$, et si toutes les valeurs propres de $\mathbb{P}$ autres que 1 sont de module strictement inférieur à 1, alors la suite de matrice $(P^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une matrice stochastique. De plus, toutes les lignes de la matrice sont **identiques**.

$\mathscr{C}$alcul de la matrice Potentielle $\mathscr{R}$

☛ Si 1 est valeur propre multiple de $\mathbb{P}$, et que toutes les autres valeurs propres sont de module strictement inférieur à 1, la suite $(P^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une matrice stochastique.

$\mathscr{C}$alcul de la matrice Potentielle $\mathscr{R}$

- Si 1 est valeur propre multiple de $\mathbb{P}$, et que toutes les autres valeurs propres sont de module strictement inférieur à 1, la suite $(P^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une matrice stochastique.
- Si $\mathbb{P}$ a au moins une valeur propre autre que 1 dont le module est égal à 1, alors la suite $(P^n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas.

Pr. Chaabane Djamal

12/12/2015
06:53:52

La matrice stochastique

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccccc} [0\ 1\ 1] & [0\ 2\ 0] & [0\ 0\ 2] & [2\ 0\ 0] & [1\ 1\ 0] & [1\ 0\ 1] \end{array} \\
\begin{array}{c} [0\ 1\ 1] \\ [0\ 2\ 0] \\ [0\ 0\ 2] \\ [2\ 0\ 0] \\ [1\ 1\ 0] \\ [1\ 0\ 1] \end{array} &
\begin{bmatrix}
0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\
\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\
\frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} & 0
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

$\mathscr{C}$alcul de la matrice Potentielle $\mathscr{R}$

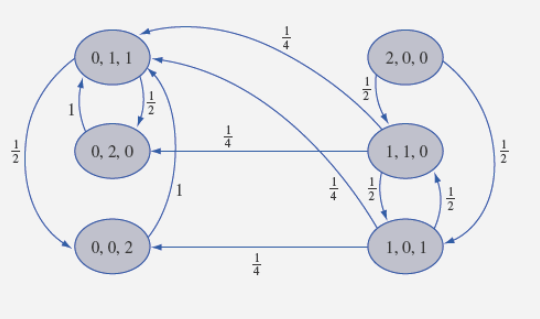
La matrice stochastique

$$\begin{array}{c|c} & \begin{array}{cccccc} [0\ 1\ 1] & [0\ 2\ 0] & [0\ 0\ 2] & [2\ 0\ 0] & [1\ 1\ 0] & [1\ 0\ 1] \end{array} \\ \begin{array}{c} [0\ 1\ 1] \\ [0\ 2\ 0] \\ [0\ 0\ 2] \\ [2\ 0\ 0] \\ [1\ 1\ 0] \\ [1\ 0\ 1] \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

a pour $\mathbb{P}^n; n \geq 15$

0	0.5000	0.5000	0	0	0
1.0000	0	0	0	0	0
1.0000	0	0	0	0	0
0.5000	0.2500	0.2500	0	0.0000	0.0000
0.5000	0.2500	0.2500	0	0	0.0000
0.5000	0.2500	0.2500	0	0.0000	0

𝒢raphe



Génération

```
function markov
type = 'max';
nombre − inst = 10;
new − set=input('Nouveau répertoire : ');
mkdir (new − set);
cd (new − set);
for m=2:2:30
    repvar=['mn= ' int2str(m) '.' int2str(m) ];
    mkdir (repvar);
    cd (repvar);
```

Génération

```
    for i = 1 : nombre-inst
        fichier=[int2str( m*100+m*10) '-' int2str(i)];
        savefile = fichier;
        [A]=generer-determine(m);
        save (savefile,'A');
    end
    cd ..
end
cd..
```