Pr. Chaabane Djamal

Introduction

Outils de base

Décisions et Chaînes de Markov

L'algorithme Stochastique

Décisions et Chaînes de Markov

PRMIERE ANNEE MASTER

ROMARIN

Département de Recherche Opérationnelle

USTHB- /Faculté des Mathématique

Pr. Chaabane Djamal

Introduction
Outils de base
Décisions et Chaînes de Markov
L'algorithme Stochastique

Le Plan du cours

1. Introduction
   - Outils de base
   - Décisions et Chaînes de Markov
   - L'algorithme Stochastique

Introduction

Pr. Chaabane Djamal

Introduction
Outils de base
Décisions et Chaînes de Markov
L'algorithme Stochastique

- Soit un système dont les états sont : $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$.

Introduction

- Soit un système dont les états sont : $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$.
- Une suite de décisions doit être prise, à chaque période de temps (seconde, jour, mois, année,$\cdots$);

Introduction

- Soit un système dont les états sont : $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$.
- Une suite de décisions doit être prise, à chaque période de temps (seconde, jour, mois, année,$\cdots$);
- L'état du système à la période suivante, ainsi que le coût de la transition dépendent uniquement de l'état présent, de la décision prise.

Introduction
Outils de base
Décisions et Chaînes de Markov
L'algorithme Stochastique

Pr. Chaabane Djamal

Introduction
Outils de base
Décisions et Chaînes de Markov
L'algorithme Stochastique

Introduction

- Soit un système dont les états sont : $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$.
- Une suite de décisions doit être prise, à chaque période de temps (seconde, jour, mois, année,$\cdots$);
- L'état du système à la période suivante, ainsi que le coût de la transition dépendent uniquement de l'état présent, de la décision prise.
- On connaît la probabilité de transition d'un état à un autre en une période p_{ij}, soit la matrice correspondante $\mathbb{P}$.

Introduction

Pr. Chaabane Djamal

Introduction
Outils de base
Décisions et Chaînes de Markov
L'algorithme Stochastique

- Soit un système dont les états sont : $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$.
- Une suite de décisions doit être prise, à chaque période de temps (seconde, jour, mois, année,$\cdots$);
- L'état du système à la période suivante, ainsi que le coût de la transition dépendent uniquement de l'état présent, de la décision prise.
- On connaît la probabilité de transition d'un état à un autre en une période p_{ij}, soit la matrice correspondante $\mathbb{P}$.
- A chaque état, le décideur est confronté à des choix,

Introduction

- Soit un système dont les états sont : $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$.
- Une suite de décisions doit être prise, à chaque période de temps (seconde, jour, mois, année,$\cdots$);
- L'état du système à la période suivante, ainsi que le coût de la transition dépendent uniquement de l'état présent, de la décision prise.
- On connaît la probabilité de transition d'un état à un autre en une période p_{ij}, soit la matrice correspondante $\mathbb{P}$.
- A chaque état, le décideur est confronté à des choix, et chaque choix entraine des coûts,

Introduction
Outils de base
Décisions et Chaînes de Markov
L'algorithme Stochastique

Introduction

- Soit un système dont les états sont : $E = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$.
- Une suite de décisions doit être prise, à chaque période de temps (seconde, jour, mois, année,$\cdots$);
- L'état du système à la période suivante, ainsi que le coût de la transition dépendent uniquement de l'état présent, de la décision prise.
- On connaît la probabilité de transition d'un état à un autre en une période p_{ij}, soit la matrice correspondante $\mathbb{P}$.
- A chaque état, le décideur est confronté à des choix, et chaque choix entraine des coûts, l'objectif est d'orienter le décideur vers un meilleur choix de façon qu'il dépense moins ou gagne plus.

Introduction
Outils de base
Décisions et Chaînes de Markov
L'algorithme Stochastique

Applications

- Marketing : ventes d'un produit; publicité, changement de produit,

Applications

- Marketing : ventes d'un produit; publicité, changement de produit,
- parc de ressources (machines, camions, etc $\cdots$)

Applications

- Marketing : ventes d'un produit; publicité, changement de produit,
- parc de ressources (machines, camions, etc $\cdots$)
- Gestion de stock : décisions d'achat. Coût de stockage.

Plan

1 Introduction
- Outils de base
- Décisions et Chaînes de Markov
- L'algorithme Stochastique

Introduction

Définition

On associe à chaque tansition $(\mathbf{i}, \mathbf{j})$ *un coût* $\mathbf{A_{ij}}$

Introduction
Outils de base
Décisions et Chaînes de Markov
L'algorithme Stochastique

Introduction

Définition

On associe à chaque tansition $(\mathbf{i}, \mathbf{j})$ *un coût* $\mathbf{A_{ij}}$

$$\Downarrow$$

une matrice coût $\boxed{\mathbb{A}}$ *est associée à chaque matrice des probabilités de transition* $\boxed{\mathbb{P}}$.

Introduction

Définition

On associe à chaque tansition $(\mathbf{i},\mathbf{j})$ *un coût* $\mathbf{A_{ij}}$

$$\Downarrow$$

une matrice coût $\mathbb{A}$ *est associée à chaque matrice des probabilités de transition* $\mathbb{P}$.

Définition

L'espérance du coût en une transition à partir de l'état $i; i \in E$ *est notée* a_i *et vaut :*

$$\mathbf{a_i} = \sum_{\mathbf{j} \in \mathbf{E}} \mathbf{A_{ij} p_{ij}} \tag{1}$$

Introduction

Pr. Chaabane Djamal

Introduction
Outils de base
Décisions et Chaînes de Markov
L'algorithme Stochastique

Théorème

L'espérance du coût en n transitions à partir de l'état i est noté $v_i(n)$ et vaut :

$$\begin{aligned} v_i(n) &= a_i + \sum_{j \in E} p_{ij} v_j(n-1) \\ v_i(n) &= v_i(n-1) + \sum_{j \in E} p_{ij}^{(n-1)} a_j \end{aligned} \tag{2}$$

Introduction

Théorème

L'espérance du coût en n transitions à partir de l'état i est noté $v_i(n)$ et vaut :

$$\begin{aligned} \mathbf{v_i(n)} &= \mathbf{a_i} + \sum_{\mathbf{j \in E}} \mathbf{p_{ij} v_j(n-1)} \\ \mathbf{v_i(n)} &= \mathbf{v_i(n-1)} + \sum_{\mathbf{j \in E}} \mathbf{p_{ij}^{(n-1)} a_j} \end{aligned} \tag{2}$$

Matricielle

$$\begin{aligned} V^{(n)} &= a + \mathbb{P} V^{(n-1)} \\ V^{(n)} &= V^{(n-1)} + \mathbb{P}^{(n-1)} a \end{aligned} \tag{3}$$

Introduction

- Les n périodes sont décomposées en une première période puis en $(n-1)$ périodes restantes:

Introduction
Outils de base
Décisions et Chaînes de Markov
L'algorithme Stochastique

Pr. Chaabane Djamal

Introduction

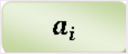
- Les n périodes sont décomposées en une première période puis en $(n-1)$ périodes restantes:

Introduction

Pr. Chaabane Djamal

Introduction
Outils de base
Décisions et Chaînes de Markov
L'algorithme Stochastique

- Les n périodes sont décomposées en une première période puis en $(n-1)$ périodes restantes:



Pr. Chaabane Djamal

Introduction

- Les n périodes sont décomposées en une première période puis en $(n-1)$ périodes restantes:

1	n-1

$$a_i$$

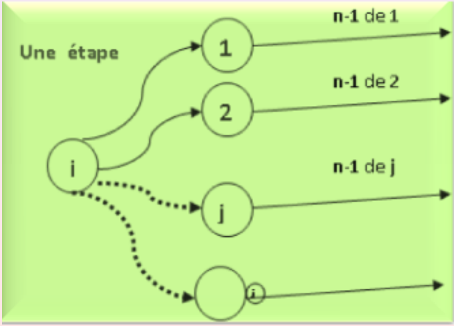
$$\sum_{j \in E} p_{ij} v_j^{(n-1)}$$

Introduction

- Les n périodes sont décomposées en une première période puis en $(n-1)$ périodes restantes:

1	n-1

$$a_i \qquad\qquad \sum_{j \in E} p_{ij} v_j^{(n-1)}$$



Introduction
Outils de base
Décisions et Chaînes de Markov
L'algorithme Stochastique

Pr. Chaabane Djamal

Introduction
Outils de base
Décisions et Chaînes de Markov
L'algorithme Stochastique

Introduction

- Les n périodes sont décomposées en $(n-1)$ périodes et une période restante:

Introduction

- Les n périodes sont décomposées en $(n-1)$ périodes et une période restante:

n-1	1

Introduction
Outils de base
Décisions et Chaînes de Markov
L'algorithme Stochastique

Pr. Chaabane Djamal

Introduction

- Les n périodes sont décomposées en $(n-1)$ périodes et une période restante:

$$v_i^{(n-1)}$$

Introduction

- Les n périodes sont décomposées en $(n-1)$ périodes et une période restante:

n-1 | 1

$$v_i^{(n-1)}$$

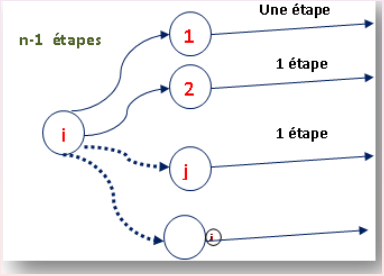
$$\sum_{j \in E} p_{ij}^{(n-1)} a_j$$

Introduction
Outils de base
Décisions et Chaînes de Markov
L'algorithme Stochastique

Introduction

- Les n périodes sont décomposées en $(n-1)$ périodes et une période restante:

$$v_i^{(n-1)} \qquad \sum_{j\in E} p_{ij}^{(n-1)} a_j$$



Pr. Chaabane Djamal

Introduction
Outils de base
Décisions et Chaînes de Markov
L'algorithme Stochastique

Remarque

☞ Si la chaîne admet une distribution limite Π,

Pr. Chaabane Djamal

Introduction
Outils de base
Décisions et Chaînes de Markov
L'algorithme Stochastique

Remarque

- Si la chaîne admet une distribution limite Π,
- L'espérance du coût en une transition en régime stationnaire vaut :

Introduction
Outils de base
Décisions et Chaînes de Markov
L'algorithme Stochastique

Remarque

- Si la chaîne admet une distribution limite Π,
- L'espérance du coût en une transition en régime stationnaire vaut :

$$\begin{aligned} \mathbf{g} \quad &:= \lim_{n\to\infty} \mathbf{v_i^{(n)}} - \mathbf{v_i^{(n-1)}} \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{j\in E} \mathbf{p_{ij}^{(n-1)}} \mathbf{a_j} \\ &= \Pi a \end{aligned}$$

Pr. Chaabane Djamal

Introduction
Outils de base
Décisions et Chaînes de Markov
L'algorithme Stochastique

Exemple (Confectionneur)

Un fabriquant produit un type de vêtement dont les ventes varient d'une année à une autre. Tant qu'il n'y a pas de changement de modèles, les mauvaises années (type 1) et les bonnes années (type 2) se succèdent en formant une chaîne de Markov de probabilités de transition

$$\begin{pmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}$$

Le bénifice est supposé nul pour une année de type 1 et égale à 10 pour une année de type 2. La matrice des coûts de transition est

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -10 & -10 \end{pmatrix}$$

Pr. Chaabane Djamal

Introduction
Outils de base
Décisions et Chaînes de Markov
L'algorithme Stochastique

- Le vecteur espérance conditionnelle du coût en une période a pour composantes :

Pr. Chaabane Djamal

Introduction
Outils de base
Décisions et Chaînes de Markov
L'algorithme Stochastique

- Le vecteur espérance conditionnelle du coût en une période a pour composantes :
  - $a_1 = 0.7 \times 0 + 0.3 \times 0 = 0$

Introduction
Outils de base
Décisions et Chaînes de Markov
L'algorithme Stochastique

- Le vecteur espérance conditionnelle du coût en une période a pour composantes :
  - $a_1 = 0.7 \times 0 + 0.3 \times 0 = 0$
  - $a_2 = 0.5 \times (-10) + 0.5 \times (-10) = -10$

Pr. Chaabane Djamal

Introduction
Outils de base
Décisions et Chaînes de Markov
L'algorithme Stochastique

- Le vecteur espérance conditionnelle du coût en une période a pour composantes :
  - $a_1 = 0.7 \times 0 + 0.3 \times 0 = 0$
  - $a_2 = 0.5 \times (-10) + 0.5 \times (-10) = -10$
- $a = \begin{pmatrix} 0 \\ -10 \end{pmatrix}$

Pr. Chaabane Djamal

Introduction
Outils de base
Décisions et Chaînes de Markov
L'algorithme Stochastique

Exemple (Remplacement d'une machine)

La révision de l'état d'une machine se fait au début de chaque période; trois états sont observés :

Introduction
Outils de base
Décisions et Chaînes de Markov
L'algorithme Stochastique

Exemple (Remplacement d'une machine)

La révision de l'état d'une machine se fait au début de chaque période; trois états sont observés :

- *Etat 1 : Neuve*

Pr. Chaabane Djamal

Introduction
Outils de base
Décisions et Chaînes de Markov
L'algorithme Stochastique

Exemple (Remplacement d'une machine)

La révision de l'état d'une machine se fait au début de chaque période; trois états sont observés :

- *Etat 1 : Neuve*
- *Etat 2 : Usagée.*

Introduction
Outils de base
Décisions et Chaînes de Markov
L'algorithme Stochastique

Exemple (Remplacement d'une machine)

La révision de l'état d'une machine se fait au début de chaque période; trois états sont observés :

- *Etat 1 : Neuve*
- *Etat 2 : Usagée.*
- *Etat 3 : A bout de souffle.*

Pr. Chaabane Djamal

Introduction
Outils de base
Décisions et Chaînes de Markov
L'algorithme Stochastique

Exemple (Remplacement d'une machine)

La révision de l'état d'une machine se fait au début de chaque période; trois états sont observés :

- *Etat 1 : Neuve*
- *Etat 2 : Usagée.*
- *Etat 3 : A bout de souffle.*

Une machine neuve ou usagée, normalement entretenue,

Pr. Chaabane Djamal

Exemple (Remplacement d'une machine)

La révision de l'état d'une machine se fait au début de chaque période; trois états sont observés :

- *Etat 1 : Neuve*
- *Etat 2 : Usagée.*
- *Etat 3 : A bout de souffle.*

Une machine neuve ou usagée, normalement entretenue, sera dans l'état 2 à la période suivanteà moins qu'elle ne tombe en panne.

Pr. Chaabane Djamal

Introduction
Outils de base
Décisions et Chaînes de Markov
L'algorithme Stochastique

Exemple (Remplacement d'une machine)

La révision de l'état d'une machine se fait au début de chaque période; trois états sont observés :

- *Etat 1 : Neuve*
- *Etat 2 : Usagée.*
- *Etat 3 : A bout de souffle.*

Une machine neuve ou usagée, normalement entretenue, sera dans l'état 2 à la période suivanteà moins qu'elle ne tombe en panne. Les probabilités de panne et les coûts d'entretien sont :

Pr. Chaabane Djamal

Introduction
Outils de base
Décisions et Chaînes de Markov
L'algorithme Stochastique

Exemple (Remplacement d'une machine)

La révision de l'état d'une machine se fait au début de chaque période; trois états sont observés :

- *Etat 1 : Neuve*
- *Etat 2 : Usagée.*
- *Etat 3 : A bout de souffle.*

Une machine neuve ou usagée, normalement entretenue, sera dans l'état 2 à la période suivanteà moins qu'elle ne tombe en panne. Les probabilités de panne et les coûts d'entretien sont :

- *Machine neuve : 0.1 ; 100 DA/période*

Pr. Chaabane Djamal

Introduction
Outils de base
Décisions et Chaînes de Markov
L'algorithme Stochastique

Exemple (Remplacement d'une machine)

La révision de l'état d'une machine se fait au début de chaque période; trois états sont observés :

- *Etat 1 : Neuve*
- *Etat 2 : Usagée.*
- *Etat 3 : A bout de souffle.*

Une machine neuve ou usagée, normalement entretenue, sera dans l'état 2 à la période suivanteà moins qu'elle ne tombe en panne. Les probabilités de panne et les coûts d'entretien sont :

- *Machine neuve : 0.1 ; 100 DA/période*
- *Machine usagée : 0.3 ; 150 DA/période*

Introduction
Outils de base
Décisions et Chaînes de Markov
L'algorithme Stochastique

Exemple (Remplacement d'une machine)

Le coût de réparation d'une machine tombée en panne est de 200 DA.

Introduction
Outils de base
Décisions et Chaînes de Markov
L'algorithme Stochastique

Exemple (Remplacement d'une machine)

Le coût de réparation d'une machine tombée en panne est de 200 DA. Une machine neuve ou usagée tombée en panne à la période n sera dans l'état 3 à la période $n+1$.

Introduction
Outils de base
Décisions et Chaînes de Markov
L'algorithme Stochastique

Exemple (Remplacement d'une machine)

Le coût de réparation d'une machine tombée en panne est de 200 DA. Une machine neuve ou usagée tombée en panne à la période n sera dans l'état 3 à la période $n+1$. Une machine dans l'état 3 à la période n devra être remplacée par une machine neuve à la période $n+1$.

Pr. Chaabane Djamal

Exemple (Remplacement d'une machine)

Le coût de réparation d'une machine tombée en panne est de 200 DA. Une machine neuve ou usagée tombée en panne à la période n sera dans l'état 3 à la période $n+1$*. Une machine dans l'état 3 à la période n devra être remplacée par une machine neuve à la période* $n+1$*. Le coût d'achat d'une machine neuve est de 5000 DA.*

- Si nous considérons X_n l'état de la machine à la période n,

Pr. Chaabane Djamal

Introduction
Outils de base
Décisions et Chaînes de Markov
L'algorithme Stochastique

Exemple (Remplacement d'une machine)

Le coût de réparation d'une machine tombée en panne est de 200 DA. Une machine neuve ou usagée tombée en panne à la période n sera dans l'état 3 à la période $n+1$. Une machine dans l'état 3 à la période n devra être remplacée par une machine neuve à la période $n+1$. Le coût d'achat d'une machine neuve est de 5000 DA.

- Si nous considérons X_n l'état de la machine à la période n, on montre aisément que $\{X_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ est une chaîne de Markov avec espace des états $E = \{1, 2, 3\}$,

Pr. Chaabane Djamal

Introduction
Outils de base
Décisions et Chaînes de Markov
L'algorithme Stochastique

Exemple (Remplacement d'une machine)

Le coût de réparation d'une machine tombée en panne est de 200 DA. Une machine neuve ou usagée tombée en panne à la période n sera dans l'état 3 à la période $n+1$. Une machine dans l'état 3 à la période n devra être remplacée par une machine neuve à la période $n+1$. Le coût d'achat d'une machine neuve est de 5000 DA.

- Si nous considérons X_n l'état de la machine à la période n, on montre aisément que $\{X_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ est une chaîne de Markov avec espace des états $E = \{1, 2, 3\}$,matrice des probabilités de transition

Pr. Chaabane Djamal

Introduction
Outils de base
Décisions et Chaînes de Markov
L'algorithme Stochastique

Exemple (Remplacement d'une machine)

Le coût de réparation d'une machine tombée en panne est de 200 DA. Une machine neuve ou usagée tombée en panne à la période n sera dans l'état 3 à la période $n + 1$. Une machine dans l'état 3 à la période n devra être remplacée par une machine neuve à la période $n + 1$. Le coût d'achat d'une machine neuve est de 5000 DA.

- Si nous considérons X_n l'état de la machine à la période n, on montre aisément que $\{X_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ est une chaîne de Markov avec espace des états $E = \{1, 2, 3\}$,matrice des probabilités de transition et matrice des coûts de transition :

Exemple (Remplacement d'une machine)

Le coût de réparation d'une machine tombée en panne est de 200 DA. Une machine neuve ou usagée tombée en panne à la période n sera dans l'état 3 à la période $n + 1$. Une machine dans l'état 3 à la période n devra être remplacée par une machine neuve à la période $n + 1$. Le coût d'achat d'une machine neuve est de 5000 DA.

- Si nous considérons X_n l'état de la machine à la période n, on montre aisément que $\{X_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ est une chaîne de Markov avec espace des états $E = \{1, 2, 3\}$,matrice des probabilités de transition et matrice des coûts de transition :

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} 0 & 0.9 & 0.1 \\ 0 & 0.7 & 0.3 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbb{A} = \begin{pmatrix} 0 & 100 & 300 \\ 0 & 150 & 350 \\ 5000 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Pr. Chaabane Djamal

Introduction
Outils de base
Décisions et Chaînes de Markov
L'algorithme Stochastique

Théorème

On a :

$$V^{(n)} = nge + \vartheta + o(\frac{1}{n}) \quad (4)$$

- *e est le vecteur dont toutes les composantes sont égale à* 1*;*
- ϑ *est solution du système des équations linéaires*

$$\begin{cases} (I - \mathbb{P})\,\vartheta = a - ge \\ \Pi\vartheta = 0 \end{cases} \quad (5)$$

Pr. Chaabane Djamal

Introduction
Outils de base
Décisions et Chaînes de Markov
L'algorithme Stochastique

Preuve

- *Le système (5) admet une solution unique car* 1 *est une valeur propre simple de* $\mathbb{P}$ *donc,* $I - \mathbb{P}$ *est inversible. Soit* ϑ *cette solution*

Pr. Chaabane Djamal

Introduction
Outils de base
Décisions et Chaînes de Markov
L'algorithme Stochastique

Preuve

- *Le système (5) admet une solution unique car* 1 *est une valeur propre simple de* $\mathbb{P}$ *donc,* $I - \mathbb{P}$ *est inversible. Soit* ϑ *cette solution*
- *On a d'après (3)*

$$V^{(n)} = a + \mathbb{P}V^{(n-1)}$$

Pr. Chaabane Djamal

Introduction
Outils de base
Décisions et Chaînes de Markov
L'algorithme Stochastique

Preuve

- *Le système (5) admet une solution unique car* 1 *est une valeur propre simple de* $\mathbb{P}$ *donc,* $I - \mathbb{P}$ *est inversible. Soit* ϑ *cette solution*
- *On a d'après (3)*

$$\begin{aligned} V^{(n)} &= a + \mathbb{P}V^{(n-1)} \\ &= \vartheta - \mathbb{P}\vartheta + ge + \mathbb{P}\mathbf{V}^{(\mathbf{n-1})} \end{aligned}$$

Pr. Chaabane Djamal

Introduction
Outils de base
Décisions et Chaînes de Markov
L'algorithme Stochastique

Preuve

- *Le système (5) admet une solution unique car* 1 *est une valeur propre simple de* $\mathbb{P}$ *donc,* $I - \mathbb{P}$ *est inversible. Soit* ϑ *cette solution*
- *On a d'après (3)*

$$\begin{aligned} V^{(n)} &= a + \mathbb{P}V^{(n-1)} \\ &= \vartheta - \mathbb{P}\vartheta + ge + \mathbb{P}\mathbf{V^{(n-1)}} \\ &= \vartheta - \mathbb{P}\vartheta + ge + \mathbb{P}\left(\mathbf{a} + \mathbf{PV^{(n-2)}}\right) \end{aligned}$$

Pr. Chaabane Djamal

Introduction
Outils de base
Décisions et Chaînes de Markov
L'algorithme Stochastique

Preuve

- *Le système (5) admet une solution unique car* 1 *est une valeur propre simple de* $\mathbb{P}$ *donc,* $I - \mathbb{P}$ *est inversible. Soit* ϑ *cette solution*
- *On a d'après (3)*

$$\begin{aligned} V^{(n)} &= a + \mathbb{P}V^{(n-1)} \\ &= \vartheta - \mathbb{P}\vartheta + ge + \mathbb{P}\mathbf{V}^{(\mathbf{n-1})} \\ &= \vartheta - \mathbb{P}\vartheta + ge + \mathbb{P}\left(\mathbf{a} + \mathbf{PV}^{(\mathbf{n-2})}\right) \\ &= \vartheta - \mathbb{P}\vartheta + ge + \mathbb{P}\left(\vartheta - \mathbb{P}\vartheta + ge + PV^{(n-2)}\right) \end{aligned}$$

Pr. Chaabane Djamal

Introduction
Outils de base
Décisions et Chaînes de Markov
L'algorithme Stochastique

Preuve

- *Le système (5) admet une solution unique car* 1 *est une valeur propre simple de* $\mathbb{P}$ *donc,* $I - \mathbb{P}$ *est inversible. Soit* ϑ *cette solution*
- *On a d'après (3)*

$$
\begin{aligned}
V^{(n)} &= a + \mathbb{P}V^{(n-1)} \\
&= \vartheta - \mathbb{P}\vartheta + ge + \mathbb{P}\mathbf{V}^{(\mathbf{n-1})} \\
&= \vartheta - \mathbb{P}\vartheta + ge + \mathbb{P}\left(\mathbf{a} + \mathbf{P}\mathbf{V}^{(\mathbf{n-2})}\right) \\
&= \vartheta - \mathbb{P}\vartheta + ge + \mathbb{P}\left(\vartheta - \mathbb{P}\vartheta + ge + PV^{(n-2)}\right) \\
&= \vartheta - \mathbb{P}\vartheta + ge + \mathbb{P}\vartheta - \mathbb{P}^2\vartheta + \mathbb{P}ge + \mathbb{P}^2 V^{(n-2)}
\end{aligned}
$$

Introduction
Outils de base
Décisions et Chaînes de Markov
L'algorithme Stochastique

Preuve

- *Le système (5) admet une solution unique car* 1 *est une valeur propre simple de* $\mathbb{P}$ *donc,* $I - \mathbb{P}$ *est inversible. Soit* ϑ *cette solution*
- *On a d'après (3)*

$$\begin{aligned}
V^{(n)} &= a + \mathbb{P}V^{(n-1)} \\
&= \vartheta - \mathbb{P}\vartheta + ge + \mathbb{P}\mathbf{V}^{(\mathbf{n-1})} \\
&= \vartheta - \mathbb{P}\vartheta + ge + \mathbb{P}\left(\mathbf{a} + \mathbf{P}\mathbf{V}^{(\mathbf{n-2})}\right) \\
&= \vartheta - \mathbb{P}\vartheta + ge + \mathbb{P}\left(\vartheta - \mathbb{P}\vartheta + ge + PV^{(n-2)}\right) \\
&= \vartheta - \cancel{\mathbb{P}\vartheta} + ge + \cancel{\mathbb{P}\vartheta} - \mathbb{P}^2\vartheta + g\mathbb{P}e + \mathbb{P}^2V^{(n-2)}
\end{aligned}$$

Pr. Chaabane Djamal

Introduction
Outils de base
Décisions et Chaînes de Markov
L'algorithme Stochastique

Preuve

- *Le système (5) admet une solution unique car* 1 *est une valeur propre simple de* $\mathbb{P}$ *donc,* $I - \mathbb{P}$ *est inversible. Soit* ϑ *cette solution*
- *On a d'après (3)*

$$
\begin{aligned}
V^{(n)} &= a + \mathbb{P}V^{(n-1)} \\
&= \vartheta - \mathbb{P}\vartheta + ge + \mathbb{P}\mathbf{V}^{(\mathbf{n-1})} \\
&= \vartheta - \mathbb{P}\vartheta + ge + \mathbb{P}\left(\mathbf{a} + \mathbf{P}\mathbf{V}^{(\mathbf{n-2})}\right) \\
&= \vartheta - \mathbb{P}\vartheta + ge + \mathbb{P}\left(\vartheta - \mathbb{P}\vartheta + ge + PV^{(n-2)}\right) \\
&= \vartheta + ge - \mathbb{P}^2\vartheta + ge + \mathbb{P}^2 V^{(n-2)}
\end{aligned}
$$

Pr. Chaabane Djamal

Introduction
Outils de base
Décisions et Chaînes de Markov
L'algorithme Stochastique

Preuve

- *Le système (5) admet une solution unique car* 1 *est une valeur propre simple de* $\mathbb{P}$ *donc,* $I - \mathbb{P}$ *est inversible. Soit* ϑ *cette solution*
- *On a d'après (3)*

$$
\begin{aligned}
V^{(n)} &= a + \mathbb{P}V^{(n-1)} \\
&= \vartheta - \mathbb{P}\vartheta + ge + \mathbb{P}\mathbf{V}^{(\mathbf{n-1})} \\
&= \vartheta - \mathbb{P}\vartheta + ge + \mathbb{P}\left(\mathbf{a} + \mathbf{P}\mathbf{V}^{(\mathbf{n-2})}\right) \\
&= \vartheta - \mathbb{P}\vartheta + ge + \mathbb{P}\left(\vartheta - \mathbb{P}\vartheta + ge + PV^{(n-2)}\right) \\
&= \vartheta + 2ge - \mathbb{P}^2\vartheta + \mathbb{P}^2 V^{(n-2)}
\end{aligned}
$$

Pr. Chaabane Djamal

Introduction
Outils de base
Décisions et Chaînes de Markov
L'algorithme Stochastique

Preuve

$$= \quad \vartheta + 2ge - \mathbb{P}^2\vartheta + \mathbb{P}V^{(n-2)} \qquad (\mathbb{P}e = e)$$

Pr. Chaabane Djamal

Introduction
Outils de base
Décisions et Chaînes de Markov
L'algorithme Stochastique

Preuve

$$
\begin{aligned}
&= \vartheta + 2ge - \mathbb{P}^2\vartheta + \mathbb{P}V^{(n-2)} \qquad (\mathbb{P}e = e) \\
&= \ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

Pr. Chaabane Djamal

Preuve

$$
\begin{aligned}
&= \vartheta + 2ge - \mathbb{P}^2\vartheta + \mathbb{P}V^{(n-2)} \qquad (\mathbb{P}e = e)\\
&= \dots\dots\dots\\
&= \vartheta + (n-1)ge - \mathbb{P}^{(n-1)}\vartheta + \mathbb{P}^{(n-1)}(a)\\
&= \vartheta + (n-1)ge - \mathbb{P}^{(n-1)}\vartheta + \mathbb{P}^{(n-1)}\left(\vartheta - \mathbb{P}\vartheta + ge\right)
\end{aligned}
$$

Pr. Chaabane Djamal

Preuve

$$
\begin{aligned}
&= \vartheta + 2ge - \mathbb{P}^2\vartheta + \mathbb{P}V^{(n-2)} \qquad (\mathbb{P}e = e) \\
&= \ldots\ldots\ldots \\
&= \vartheta + (n-1)ge - \mathbb{P}^{(n-1)}\vartheta + \mathbb{P}^{(n-1)}(a) \\
&= \vartheta + (n-1)ge - \mathbb{P}^{(n-1)}\vartheta + \mathbb{P}^{(n-1)}\left(\vartheta - \mathbb{P}\vartheta + ge\right) \\
&= \vartheta + nge - \mathbb{P}^n\vartheta \qquad \left(\mathbb{P}^{(n-1)}e = e\right)
\end{aligned}
$$

Pr. Chaabane Djamal

Introduction
Outils de base
Décisions et Chaînes de Markov
L'algorithme Stochastique

Preuve

$$
\begin{aligned}
&= \vartheta + 2ge - \mathbb{P}^2\vartheta + \mathbb{P}V^{(n-2)} \qquad (\mathbb{P}e = e) \\
&= \ldots\ldots\ldots \\
&= \vartheta + (n-1)ge - \mathbb{P}^{(n-1)}\vartheta + \mathbb{P}^{(n-1)}(a) \\
&= \vartheta + (n-1)ge - \mathbb{P}^{(n-1)}\vartheta + \mathbb{P}^{(n-1)}\left(\vartheta - \mathbb{P}\vartheta + ge\right) \\
&= \vartheta + nge - \mathbb{P}^n\vartheta \qquad \left(\mathbb{P}^{(n-1)}e = e\right)
\end{aligned}
$$

$$
\mathbb{P}^{(n)}\vartheta = \sum_{j\in E} p_{ij}^{(n)}\vartheta_j = \sum_{j\in E}\left(\pi_j + o(\frac{1}{n})\right)\vartheta_j
$$

Pr. Chaabane Djamal

Introduction
Outils de base
Décisions et Chaînes de Markov
L'algorithme Stochastique

Preuve

$$
\begin{aligned}
&= \vartheta + 2ge - \mathbb{P}^2\vartheta + \mathbb{P}V^{(n-2)} \qquad (\mathbb{P}e = e)\\
&= \ldots\ldots\ldots\\
&= \vartheta + (n-1)ge - \mathbb{P}^{(n-1)}\vartheta + \mathbb{P}^{(n-1)}(a)\\
&= \vartheta + (n-1)ge - \mathbb{P}^{(n-1)}\vartheta + \mathbb{P}^{(n-1)}\left(\vartheta - \mathbb{P}\vartheta + ge\right)\\
&= \vartheta + nge - \mathbb{P}^n\vartheta \qquad \left(\mathbb{P}^{(n-1)}e = e\right)
\end{aligned}
$$

$$\mathbb{P}^{(n)}\vartheta = \sum_{j\in E} p_{ij}^{(n)}\vartheta_j = \sum_{j\in E}\left(\pi_j + o(\frac{1}{n})\right)\vartheta_j$$

$$= \sum_{j\in E}\pi_j\vartheta_j + \sum_{j\in E}\vartheta_j o(\frac{1}{n}) = o(\frac{1}{n})$$

Introduction
Outils de base
Décisions et Chaînes de Markov
L'algorithme Stochastique

Corollaire

Le système $(I - \mathbb{P})\vartheta = a - \beta e$; β *étant un scalaire; possède une solution si et seulement si* $\beta = \mathbf{g} = \pi\mathbf{a}$

Pr. Chaabane Djamal

Introduction
Outils de base
Décisions et Chaînes de Markov
L'algorithme Stochastique

Corollaire

Le système $(I - \mathbb{P})\vartheta = a - \beta e$ *; β étant un scalaire; possède une solution si et seulement si* $\beta = \mathbf{g} = \pi\mathbf{a}$

Remarque

On a : $v_j^n - v_i^n = \vartheta_j - \vartheta_i + o(\frac{1}{n})$

$\vartheta_j - \vartheta_i$ *représente la différence des coûts entre les deux évolutions possibles :*

Pr. Chaabane Djamal

Introduction
Outils de base
Décisions et Chaînes de Markov
L'algorithme Stochastique

Corollaire

Le système $(I - \mathbb{P})\vartheta = a - \beta e$ *; β étant un scalaire; possède une solution si et seulement si* $\beta = \mathbf{g} = \pi\mathbf{a}$

Remarque

On a : $v_j^n - v_i^n = \vartheta_j - \vartheta_i + o(\frac{1}{n})$

$\vartheta_j - \vartheta_i$ *représente la différence des coûts entre les deux évolutions possibles :*

- *la somme que l'on devrait être prêt à payer pour que le système commence à évoluer de à partir de i plutôt qu'à l'état j.*

Pr. Chaabane Djamal

Plan

1 Introduction
- Outils de base
- Décisions et Chaînes de Markov
- L'algorithme Stochastique

Pr. Chaabane Djamal

Introduction
Outils de base
Décisions et Chaînes de Markov
L'algorithme Stochastique

Définition

A chaque état $i; i \in E$ une décision d peut être prise. On a :

$\mathbf{p_{ij}^{d}}$ *Probabilité pour qu'on ait une transition dans l'état j*

$$avec\ ;\ p_{ij}^{d} \geq 0\ et\ \sum_{j \in E} p_{ij}^{d} = 1.$$

Pr. Chaabane Djamal

Introduction
Outils de base
Décisions et Chaînes de Markov
L'algorithme Stochastique

Définition

A chaque état $i; i \in E$ une décision d peut être prise. On a :

- $\mathbf{p^d_{ij}}$ *Probabilité pour qu'on ait une transition dans l'état j*

  avec ; $p^d_{ij} \geq 0$ *et* $\sum\limits_{j \in E} p^d_{ij} = 1.$

- $\mathbf{A^d_{ij}}$ *Coût correspondant à une transition de i vers j.*

Pr. Chaabane Djamal

Introduction
Outils de base
Décisions et Chaînes de Markov
L'algorithme Stochastique

Définition

A chaque état i; $i \in E$ une décision d peut être prise. On a :

$\mathbf{p_{ij}^d}$ *Probabilité pour qu'on ait une transition dans l'état j avec ;* $p_{ij}^d \geq 0$ *et* $\sum_{j \in E} p_{ij}^d = 1.$

$\mathbf{A_{ij}^d}$ *Coût correspondant à une transition de i vers j.*

Δ_i *L'ensemble de décisions possibles à l'état i.*

Introduction
Outils de base
Décisions et Chaînes de Markov
L'algorithme Stochastique

Définition

A chaque état $i; i \in E$ une décision d peut être prise. On a :

$\mathbf{p^d_{ij}}$ *Probabilité pour qu'on ait une transition dans l'état j*

avec ; $p^d_{ij} \geq 0$ *et* $\sum_{j \in E} p^d_{ij} = 1.$

$\mathbf{A^d_{ij}}$ *Coût correspondant à une transition de i vers j.*

Δ_i *L'ensemble de décisions possibles à l'état i.*

$\mathbf{a^d_i} = \sum_{j \in E} p^d_{ij} A^d_{ij}$ *: Espérance du coût en une transition*

lorsque la décision d est prise.

Pr. Chaabane Djamal

Introduction
Outils de base
Décisions et Chaînes de Markov
L'algorithme Stochastique

Politique

On appelle **Politique** un ensemble de règles précisant pour chaque état les décisions à prendre.

Pr. Chaabane Djamal

Introduction
Outils de base
Décisions et Chaînes de Markov
L'algorithme Stochastique

Politique

On appelle **Politique** un ensemble de règles précisant pour chaque état les décisions à prendre.

Politique Stationnaire

On appelle **Politique Stationnaire** un ensemble de règles précisant pour chaque état une décision unique à prendre. Le nombre de politiques stationnaires est

$$\prod_{\mathbf{i}\in\mathbf{E}} \mathbf{D_i} \; ; \quad D_i = card(\Delta_i) .$$

Pr. Chaabane Djamal

Introduction
Outils de base
Décisions et Chaînes de Markov
L'algorithme Stochastique

Exemple (Problème du confectionneur)

*Supposons que chaque année, notre confectionneur puisse décider soit de ne pas changer le modèle(**décision** 1) soit de changer le modèle (décion 2). Sont ensemble de décisions est donc le même soit l'année bonne ou mauvaise. Lorsqu'il y a changement de modèle, l'année suivante a une probabilité* 0.25 *d'être mauvaise et* 0.75 *d'être bonne. Le bénifice est toujours nul pour une année mauvaise (**type I**) et est égale à* 10 *pour une année bonne (**type II**) mais un changement de modèle coûte* 5 *DA. Les probabilités de transition et les coûts correspondants à la décision* 1 *sont ceux qui ont été pris en compte précédemment.*

Pr. Chaabane Djamal

Introduction
Outils de base
Décisions et Chaînes de Markov
L'algorithme Stochastique

Données

i	$\mathbf{d_i}$	$\mathbf{p_{ij}^d}$		$\mathbf{A_{ij}^d}$		$\mathbf{a_i^d}$
		$j = 1$	$j = 2$	$j = 1$	$j = 2$	
1	**1**	0.7	0.3	0	0	0
	2	0.25	0.75	5	5	5
2	**1**	0.5	0.5	-10	-10	-10
	2	0.25	0.75	-5	-5	-5

Introduction
Outils de base
Décisions et Chaînes de Markov
L'algorithme Stochastique

Exemple (Problème de remplacement de machine)

Les effets et les coûts d'un entretien standard ont été décrits précédemment, on peut également procéder lorsque la machine est neuve à un entretien préventif (le coût est égale à 500*DA par période) qui aura pour effet de maintenir la machine neuve dans* 1 *cas sur* 10 *et la faire devenir usagée dans* 9 *cas sur* 10*. Dans le cas où la machine est usagée, on peut soit choisir l'entreien standard (décision* 1*) soit un entretien minutieux (décision* 2*) qui coûte* 400 *DA par périod; il a pour effet dans* 8 *cas sur* 10*, la machine reste usagée et dans* 2 *cas sur* 10 *la machine devient à bout de souffle, soit un entretien super (décision* 3*) qui coûte* 750 *DA par période; il a pour effet dans* 9 *cas sur* 10 *la machine reste usagée et dans un cas sur* 10 *la machine devient à bout de souffle.*

Pr. Chaabane Djamal

Introduction
Outils de base
Décisions et Chaînes de Markov
L'algorithme Stochastique

Exemple (Problème de remplacement de machine (suite))

Enfin, quand la machine est à bout de souffle, au lieu de la remplacer à la période suivante(décision 1), lui faire une révision générale (décision 2) dont le coût est de 2500 DA.Dans 9 cas sur 10, cette révision générale permet d'obtenir une machine usagée mais dans un cas sur 10 le remplacement est inévitable.

Pr. Chaabane Djamal

Introduction
Outils de base
Décisions et Chaînes de Markov
L'algorithme Stochastique

i	d_i	$p_{ij}^{d_i}$			$A_{ij}^{d_i}$			$a_i^{d_i}$
		$j=1$	$j=2$	$j=3$	$j=1$	$j=2$	$j=3$	
1	1	0	0.9	0.1	0	100	300	120
	2	0.1	0.9	0	500	500	0	500
2	1	0	0.7	0.3	0	150	350	210
	2	0	0.8	0.2	0	400	600	440
	3	0	0.9	0.1	0	750	950	770
3	1	1	0	0	5000	0	0	5000
	2	0.1	0.9	0	7500	2500	0	3000

- Il y a 12 politiques stationnaires.
- $g = \pi \times a$ est le critère dde choix.

Pr. Chaabane Djamal

Introduction
Outils de base
Décisions et Chaînes de Markov
L'algorithme Stochastique

Plan

1 Introduction
- Outils de base
- Décisions et Chaînes de Markov
- L'algorithme Stochastique

Introduction
Outils de base
Décisions et Chaînes de Markov
L'algorithme Stochastique

Etape 0

✏ Soit S une politique stationnaire initiale.

Introduction
Outils de base
Décisions et Chaînes de Markov
L'algorithme Stochastique

Etape 0

- Soit S une politique stationnaire initiale.

Etape 1

- On considère $\mathbb{P}$, π, $\mathbf{a}$, $\mathbf{g} = \pi\mathbf{a}$
- Résoudre le système d'équations linéaires

$$\begin{cases} (I - \mathbb{P})\,\vartheta = a - ge \\ \pi\vartheta = 0 \end{cases} \tag{6}$$

Pr. Chaabane Djamal

Introduction
Outils de base
Décisions et Chaînes de Markov
L'algorithme Stochastique

Etape 0

- Soit S une politique stationnaire initiale.

Etape 1

- On considère $\mathbb{P}$, π, $\mathbf{a}$, $\mathbf{g} = \pi\mathbf{a}$
- Résoudre le système d'équations linéaires

$$\begin{cases} (I - \mathbb{P})\vartheta = a - ge \\ \pi\vartheta = 0 \end{cases} \tag{6}$$

- Si $\forall i \in E$, on a : $\mathbf{g} + \vartheta_\mathbf{i} \leq \mathbf{a}_\mathbf{i}^{\mathbf{d_i}} + \sum_{\mathbf{j \in E}} \mathbf{p}_\mathbf{ij}^{\mathbf{d_i}} \vartheta_\mathbf{j}; \forall d_i \in \Delta_i$

  alors S est optimale. Sinon aller à l'étape 2.

Introduction
Outils de base
Décisions et Chaînes de Markov
L'algorithme Stochastique

Etape 2

Définir une politique stationnaire S par

$$\min_{d_i}\left(a_i^{d_i}+\sum_{j\in E}p_{ij}^{d_i}\vartheta_j\right)\quad \forall i\in E \text{ et aller à l'étape (1).}$$

Pr. Chaabane Djamal

Introduction
Outils de base
Décisions et Chaînes de Markov
L'algorithme Stochastique

- La **finitude**

Pr. Chaabane Djamal

Introduction
Outils de base
Décisions et Chaînes de Markov
L'algorithme Stochastique

- **La finitude**
  - Soient S', S'' deux politiques stationnaires obtenues dans deux itérations successives.

$$S' \hookrightarrow \mathbb{P}', \pi', \mathbf{a}', \mathbf{g}'$$

$$\Downarrow$$

$$\text{Détermination de } \vartheta'_j$$

Pr. Chaabane Djamal

Introduction
Outils de base
Décisions et Chaînes de Markov
L'algorithme Stochastique

La **finitude**

- Soient S', S'' deux politiques stationnaires obtenues dans deux itérations successives.

$$S' \hookrightarrow \mathbb{P}', \pi', \mathbf{a}', \mathbf{g}'$$
$$\Downarrow$$
$$\text{Détermination de } \vartheta'_j$$

$$S'' \hookrightarrow \mathbb{P}'', \pi'', \mathbf{a}'', \mathbf{g}''$$
$$\Downarrow$$
$$\text{Détermination de } \vartheta'_j$$

La **finitude**

- Soient S', S'' deux politiques stationnaires obtenues dans deux itérations successives.

$$S' \hookrightarrow \mathbb{P}', \pi', \mathbf{a}', \mathbf{g}'$$
$$\Downarrow$$
$$\text{Détermination de } \vartheta'_j$$

$$S'' \hookrightarrow \mathbb{P}'', \pi'', \mathbf{a}'', \mathbf{g}''$$
$$\Downarrow$$
$$\text{Détermination de } \vartheta'_j$$

- On a : $g'e + \vartheta' = \underbrace{a' + \mathbb{P}'\vartheta' \geq a'' + P''\vartheta'}_{\text{étape 1 de l'algorithme}}$

Introduction
Outils de base
Décisions et Chaînes de Markov
L'algorithme Stochastique

$\mathscr{J}$ustification

- On a :

$$(I - \mathbb{P}')\vartheta' = a' - g'e$$

Pr. Chaabane Djamal

Introduction
Outils de base
Décisions et Chaînes de Markov
L'algorithme Stochastique

- On a :

$$\begin{aligned} (I - \mathbb{P}')\vartheta' &= a' - g'e \\ g'e + \vartheta' &= a' + \mathbb{P}'\vartheta' \quad \text{de même} \end{aligned}$$

Pr. Chaabane Djamal

Introduction
Outils de base
Décisions et Chaînes de Markov
L'algorithme Stochastique

- On a :

$$
\begin{aligned}
(I - \mathbb{P}')\vartheta' &= a' - g'e \\
g'e + \vartheta' &= a' + \mathbb{P}'\vartheta' \qquad \text{de même} \\
g''e + \vartheta'' &= a'' + \mathbb{P}''\vartheta''
\end{aligned}
$$

Justification

- On a :

$$\begin{array}{rcll} (I-\mathbb{P}')\vartheta' & = & a'-g'e & \\ g'e+\vartheta' & = & a'+\mathbb{P}'\vartheta' & \text{de même} \\ g''e+\vartheta'' & = & a''+\mathbb{P}''\vartheta'' & \end{array}$$

- donc par soustraction on obtient

$$(g'-g'')e+\vartheta'-\vartheta'' = a'-a''+\mathbb{P}'\vartheta'-\mathbb{P}''\vartheta''$$

Pr. Chaabane Djamal

Introduction
Outils de base
Décisions et Chaînes de Markov
L'algorithme Stochastique

- On a :

$$
\begin{array}{rcll}
(I-\mathbb{P}')\vartheta' & = & a' - g'e & \\
g'e + \vartheta' & = & a' + \mathbb{P}'\vartheta' & \text{de même} \\
g''e + \vartheta'' & = & a'' + \mathbb{P}''\vartheta'' &
\end{array}
$$

- donc par soustraction on obtient

$$
\begin{array}{rcl}
(g'-g'')e + \vartheta' - \vartheta'' & = & a' - a'' + \mathbb{P}'\vartheta' - \mathbb{P}''\vartheta'' \\
(g'-g'')e + \vartheta' - \vartheta'' & = & a' + \mathbb{P}'\vartheta' - a'' - \mathbb{P}''\vartheta' \\
 & + & \mathbb{P}''\vartheta' - \mathbb{P}''\vartheta''
\end{array}
$$

Introduction
Outils de base
Décisions et Chaînes de Markov
L'algorithme Stochastique

- On a :

$$\begin{array}{lcl} (I - \mathbb{P}')\vartheta' & = & a' - g'e \\ g'e + \vartheta' & = & a' + \mathbb{P}'\vartheta' \quad \text{de même} \\ g''e + \vartheta'' & = & a'' + \mathbb{P}''\vartheta'' \end{array}$$

- donc par soustraction on obtient

$$\begin{array}{lcl} (g' - g'')e + \vartheta' - \vartheta'' & = & a' - a'' + \mathbb{P}'\vartheta' - \mathbb{P}''\vartheta'' \\ (g' - g'')e + \vartheta' - \vartheta'' & = & a' + \mathbb{P}'\vartheta' - a'' - \mathbb{P}''\vartheta' \\ & + & \mathbb{P}''\vartheta' - \mathbb{P}''\vartheta'' \\ (g' - g'')e + \vartheta' - \vartheta'' & = & a' + \mathbb{P}'\vartheta' - a'' - \mathbb{P}''\vartheta' \\ & + & \mathbb{P}''(\vartheta' - \vartheta'') \end{array}$$

Justification

- On a :

$$
\begin{array}{rcl}
(I-\mathbb{P}')\vartheta' & = & a' - g'e \\
g'e + \vartheta' & = & a' + \mathbb{P}'\vartheta' \quad \text{de même} \\
g''e + \vartheta'' & = & a'' + \mathbb{P}''\vartheta''
\end{array}
$$

- donc par soustraction on obtient

$$
\begin{array}{rcl}
(g'-g'')e + \vartheta' - \vartheta'' & = & a' - a'' + \mathbb{P}'\vartheta' - \mathbb{P}''\vartheta'' \\
(g'-g'')e + \vartheta' - \vartheta'' & = & a' + \mathbb{P}'\vartheta' - a'' - \mathbb{P}''\vartheta' \\
 & + & \mathbb{P}''\vartheta' - \mathbb{P}''\vartheta'' \\
(g'-g'')e + \vartheta' - \vartheta'' & = & a' + \mathbb{P}'\vartheta' - a'' - \mathbb{P}''\vartheta' \\
 & + & \mathbb{P}''(\vartheta' - \vartheta'') \\
(I-\mathbb{P}'')(\vartheta' - \vartheta'') & = & \varphi - (g'-g'')e
\end{array}
$$

$$\varphi = a' + \mathbb{P}'\vartheta' - a'' - \mathbb{P}''\vartheta' \geq 0$$

$\mathscr{J}$ustification

- On a :

$$
\begin{array}{rcll}
(I-\mathbb{P}')\vartheta' & = & a' - g'e & \\
g'e + \vartheta' & = & a' + \mathbb{P}'\vartheta' & \text{de même} \\
g''e + \vartheta'' & = & a'' + \mathbb{P}''\vartheta'' &
\end{array}
$$

- donc par soustraction on obtient

$$
\begin{array}{rcl}
(g'-g'')e + \vartheta' - \vartheta'' & = & a' - a'' + \mathbb{P}'\vartheta' - \mathbb{P}''\vartheta'' \\
(g'-g'')e + \vartheta' - \vartheta'' & = & a' + \mathbb{P}'\vartheta' - a'' - \mathbb{P}''\vartheta' \\
 & + & \mathbb{P}''\vartheta' - \mathbb{P}''\vartheta'' \\
(g'-g'')e + \vartheta' - \vartheta'' & = & a' + \mathbb{P}'\vartheta' - a'' - \mathbb{P}''\vartheta' \\
 & + & \mathbb{P}''(\vartheta' - \vartheta'') \\
(I-\mathbb{P}'')(\vartheta' - \vartheta'') & = & \varphi - (g'-g'')e
\end{array}
$$

$$\varphi = a' + \mathbb{P}'\vartheta' - a'' - \mathbb{P}''\vartheta' \geq 0$$

Pr. Chaabane Djamal

Introduction
Outils de base
Décisions et Chaînes de Markov
L'algorithme Stochastique

- Comme $a' + \mathbb{P}'\vartheta' \geq a'' + P''\vartheta'$, donc d'après le corollaire précédent le système admet une solution si et seulement si $g = g' - g'' = \pi\varphi \geq 0 \Rightarrow g' \geq g''$ et comme le nombre de politiques stationnaires est fini, alors l'algorithme est fini.

Pr. Chaabane Djamal

Introduction
Outils de base
Décisions et Chaînes de Markov
L'algorithme Stochastique

La Convergence

Pr. Chaabane Djamal

Introduction
Outils de base
Décisions et Chaînes de Markov
L'algorithme Stochastique

La **Convergence**

- Soit $S(\mathbb{P}, a, \pi, g)$ la politique stationnaire obtenue à la sortie.

Introduction
Outils de base
Décisions et Chaînes de Markov
L'algorithme Stochastique

- **La Convergence**
  - Soit $S(\mathbb{P}, a, \pi, g)$ la politique stationnaire obtenue à la sortie.
  - Soit $S^*(\mathbb{P}^*, a^*, \pi^*, g^*$ une politique optimale.

$$(I - \mathbb{P})\vartheta \quad = \quad a - ge$$

Pr. Chaabane Djamal

Introduction
Outils de base
Décisions et Chaînes de Markov
L'algorithme Stochastique

La **Convergence**

- Soit $S(\mathbb{P}, a, \pi, g)$ la politique stationnaire obtenue à la sortie.
- Soit $S^*(\mathbb{P}^*, a^*, \pi^*, g^*$ une politique optimale.

$$\begin{array}{rcll} (I-\mathbb{P})\vartheta & = & a - ge & \\ ge + \vartheta & = & a + \mathbb{P}\vartheta & \text{de même} \end{array}$$

La **Convergence**

- Soit $S(\mathbb{P}, a, \pi, g)$ la politique stationnaire obtenue à la sortie.
- Soit $S^*(\mathbb{P}^*, a^*, \pi^*, g^*$ une politique optimale.

$$\begin{aligned} (I - \mathbb{P})\vartheta &= a - ge \\ ge + \vartheta &= a + \mathbb{P}\vartheta \quad \text{de même} \\ g^*e + \vartheta^* &= a^* + \mathbb{P}^*\vartheta^* \end{aligned}$$

- donc par soustraction on obtient

$$(g - g^*)e + \vartheta - \vartheta^* = a - a^* + \mathbb{P}\vartheta - \mathbb{P}^*\vartheta^*$$

Pr. Chaabane Djamal

Introduction
Outils de base
Décisions et Chaînes de Markov
L'algorithme Stochastique

La **Convergence**

- Soit $S(\mathbb{P}, a, \pi, g)$ la politique stationnaire obtenue à la sortie.
- Soit $S^*(\mathbb{P}^*, a^*, \pi^*, g^*$ une politique optimale.

$$\begin{array}{rcl} (I - \mathbb{P})\vartheta & = & a - ge \\ ge + \vartheta & = & a + \mathbb{P}\vartheta \quad \text{de même} \\ g^*e + \vartheta^* & = & a^* + \mathbb{P}^*\vartheta^* \end{array}$$

- donc par soustraction on obtient

$$\begin{array}{rcl} (g - g^*)e + \vartheta - \vartheta^* & = & a - a^* + \mathbb{P}\vartheta - \mathbb{P}^*\vartheta^* \\ & = & a + \mathbb{P}\vartheta - a^* - \mathbb{P}^*\vartheta \\ & + & \mathbb{P}^*\vartheta - \mathbb{P}^*\vartheta^* \end{array}$$

La **Convergence**

- Soit $S(\mathbb{P}, a, \pi, g)$ la politique stationnaire obtenue à la sortie.
- Soit $S^*(\mathbb{P}^*, a^*, \pi^*, g^*$ une politique optimale.

$$\begin{aligned} (I-\mathbb{P})\vartheta &= a - ge \\ ge + \vartheta &= a + \mathbb{P}\vartheta \quad \text{de même} \\ g^*e + \vartheta^* &= a^* + \mathbb{P}^*\vartheta^* \end{aligned}$$

- donc par soustraction on obtient

$$\begin{aligned} (g-g^*)e + \vartheta - \vartheta^* &= a - a^* + \mathbb{P}\vartheta - \mathbb{P}^*\vartheta^* \\ &= a + \mathbb{P}\vartheta - a^* - \mathbb{P}^*\vartheta \\ &+ \mathbb{P}^*\vartheta - \mathbb{P}^*\vartheta^* \\ &= a + \mathbb{P}\vartheta - (a^* + \mathbb{P}^*\vartheta) \\ &+ \mathbb{P}^*(\vartheta - \vartheta^*) \end{aligned}$$

Pr. Chaabane Djamal

Introduction
Outils de base
Décisions et Chaînes de Markov
L'algorithme Stochastique

La **Convergence**

- Soit $S(\mathbb{P}, a, \pi, g)$ la politique stationnaire obtenue à la sortie.
- Soit $S^*(\mathbb{P}^*, a^*, \pi^*, g^*$ une politique optimale.

$$\begin{array}{rcl} (I - \mathbb{P})\vartheta & = & a - ge \\ ge + \vartheta & = & a + \mathbb{P}\vartheta \quad \text{de même} \\ g^*e + \vartheta^* & = & a^* + \mathbb{P}^*\vartheta^* \end{array}$$

- donc par soustraction on obtient

$$\begin{array}{rcl} (g - g^*)e + \vartheta - \vartheta^* & = & a - a^* + \mathbb{P}\vartheta - \mathbb{P}^*\vartheta^* \\ & = & a + \mathbb{P}\vartheta - a^* - \mathbb{P}^*\vartheta \\ & + & \mathbb{P}^*\vartheta - \mathbb{P}^*\vartheta^* \\ & = & a + \mathbb{P}\vartheta - (a^* + \mathbb{P}^*\vartheta) \\ & + & \mathbb{P}^*\,(\vartheta - \vartheta^*) \\ (I - \mathbb{P}^*)(\vartheta - \vartheta^*) & = & \psi - (g - g^*)e \end{array}$$

avec $\psi = a + \mathbb{P}\vartheta - (a^* + \mathbb{P}^*\vartheta) \leq 0 \Rightarrow$ d'après le corollaire le système admet une solution si et seulement si
$G = g - g^* = \pi\psi \leq 0 \Rightarrow g \leq g^*$ et comme $g^* \leq g \Rightarrow g = g^*$ $\blacksquare$

Introduction
Outils de base
Décisions et Chaînes de Markov
L'algorithme Stochastique

$\mathscr{A}$utre variante

Etape 1

- Choisir $S(d_{\hat{d}_i} \leftrightarrow (\mathbb{P}^{\hat{d},a^{\hat{d}}})$

Etape 2

- Résoudre en g et $vartheta_i$ $(= 2, ..., n)$ le système linéaire