Cours des Méthodes Numériques Appliquées
Master I - Energie Solaire-
Département de Génie Mécanique

Discrétisation des EDP

Dr H. Madani

Les trois familles des EDP

- Les différences finies:
  - la méthode consiste à remplacer les dérivées partielles par des différences divisées ou combinaisons de valeurs ponctuelles de la fonction en nombre fini de points discrets ou nœuds du maillage.

- Avantages :
  - grande simplicité d'écriture
  - et faible coût de calcul.

- Inconvénients:
  - limitation à des géométries simples,
  - difficultés de prise en compte des conditions aux type Neumann.

Les trois familles des EDP

- Les éléments finis :
  - La méthode consiste à approcher, dans un sous-espace de dimension finie, un problème écrit sous forme variationnelle (comme minimisation de l'énergie en général) dans un espace de dimension infinie. La solution approchée est dans ce cas une fonction déterminée par un nombre infini de paramètres comme, par exemple, ses valeurs en certains points ou nœuds du maillage.
- Avantages:
  - Traitement possible de géométries complexes,
  - Nombreux résultats théoriques sur la convergence.
- Inconvénient:
  - Complexité de mise en œuvre ,
  - Grand coût en temps de calcul et mémoire.

Les trois familles des EDP

- Les volumes finies:
- La méthode intègre, sur des volumes élémentaires de forme simple, les équations écrites sous forme de loi de conservation. Elle fournit ainsi de manière naturelle des approximations discrètes conservatives et est particulièrement bien adaptée aux équations de la mécaniques des fluides. Sa mise en œuvre est simple avec des volumes élémentaires rectangulaires.
- Avantages:
  - Permet de traiter des géométries complexes avec des volumes de forme quelconque,
  - Détermination plus naturelle des conditions aux limites de type Neumann.
- Inconvénient:
  - Peu de résultats théoriques de convergences.

Les différences finies

1. **Principe – ordre de précision:**

   La méthode des différences finies consiste à approximer les dérivées des équations de la physique au moyen des développements de Taylor et se déduit directement de la définition de la dérivée. Elle est due aux travaux de plusieurs mathématiciens du 18ème siècle (Euler, Taylor, Leibniz….).

- Soit u(x,y,z,t) une fonction de l'espace et du temps. Par définition de la dérivée, on a:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x, y, z, t) - u(x, y, z, t)}{\Delta x}$$

- Si Δx est petit, un développement de Taylor de $u(x+\Delta x, y,z,t)$ au voisinage de x donne:

$$u(x+\Delta x, y, z, t) = u(x, y, z, t) + \Delta x \frac{\partial u}{\partial x}(x, y, z, t) + \frac{\Delta x^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y, z, t) + \frac{\Delta x^3}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(x, y, z, t) + ...$$

Les différences finies

- En tronquant la série au premier ordre en Δx, on obtient:

$$\frac{u(x+\Delta x, y, z, t) - u(x, y, z, t)}{\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial x}(x, y, z, t) + \mathcal{O}(\Delta x)$$

- L'approximation de la dérivée $\frac{\partial u}{\partial x}(x)$ est alors d'ordre 1. indiquant que l'erreur de troncature $Q(\Delta x)$ tend vers zéro comme la puissance première de Δx.

- Définition:
  - La puissance de Δx avec laquelle l'erreur de troncature tend vers zéro est appelée l'ordre de la méthode.

Les différences finies

2. Notation indicielle - cas 1 D:

- Considérons un cas monodimensionnel où l'on souhaite déterminer une grandeur $u(x)$ sur l'intervalle $[0, 1]$. La recherche d'une discrète de la grandeur u amène à constituer un maillage de l'intervalle de définition. On considère un maillage (ou grille de calcul) composé de $N + 1$ points x_i pour $i = 0,.....,N$ régulièrement espacés avec un pas Δx. Les points $x_i = i\Delta x$ sont appelés les nœuds du maillage.

- Le problème continu de départ de détermination d'une grandeur sur un ensemble de dimension infinie se ramène ainsi à la recherche de N valeurs discrètes de cette grandeur aux différents nœuds du maillage.

Les différences finies

- **Notation:**
- On note u_i la valeur discrète de $u(x)$ au point x_i, soit $u_i = u(x_i)$. De même pour la dérivée de $u(x)$ au nœud x_i, on note :

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=x_i} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i = u'_i.$$

- Cette notation s'utilise de façon équivalente pour toute les dérivées d'ordre successif de la grandeur u.
- Le schéma aux différences finies d'ordre 1 présente au-dessus s'écrit, en notation indicielle:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i = \frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x)$$

Les différences finies

- Ce schéma est dit « avant » ou « décentré avant » ou upwind.
- Il est possible de construire un autre schéma d'ordre 1, appelé « arrière »:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i = \frac{u_i - u_{i-1}}{\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x)$$

3. Schéma d'ordre supérieur

- Des schémas aux différences finies d'ordre supérieur peuvent être construits en manipulant des développements de Taylor au voisinage de x_i. On écrit:

$$\begin{aligned} u_{i+1} &= u(x_i + \Delta x) = u_i + \Delta x \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i + \frac{\Delta x^2}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_i + \mathcal{O}(\Delta x^3) \\ u_{i-1} &= u(x_i - \Delta x) = u_i - \Delta x \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i + \frac{\Delta x^2}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_i + \mathcal{O}(\Delta x^3) \end{aligned}$$

Les différences finies

- La soustraction de ces deux relations donne:

$$u_{i+1} - u_{i-1} = 2\Delta x \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i + \mathcal{O}(\Delta x^3)$$

- Ce qui permet d'obtenir le schéma d'ordre deux dit « centré » pour approximer la dérivée première de u:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i = \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x^2)$$

- Pour obtenir des ordres supérieurs, il faut utiliser plusieurs nœuds voisins de x_i. Le nombre de points nécessaires à l'écriture du schéma s'appelle le stencil. Par exemple, un schéma aux différences finies d'ordre 3 pour la dérivée première s'écrit:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i = \frac{-u_{i+2} + 6u_{i+1} - 3u_i - 2u_{i-1}}{6\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x^3)$$

Les différences finies

4. Dérivée d'ordre supérieur:

- Le principe est identique et repose sur les développements de Taylor au voisinage de x_i. Par exemple pour construire un schéma d'approximation de la dérivée seconde de u, on écrit:

$$\begin{aligned} u_{i+1} &= u_i + \Delta x \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i + \frac{\Delta x^2}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_i + \frac{\Delta x^3}{6}\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)_i + \mathcal{O}(\Delta x^4) \\ u_{i-1} &= u_i - \Delta x \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i + \frac{\Delta x^2}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_i - \frac{\Delta x^3}{6}\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)_i + \mathcal{O}(\Delta x^4) \end{aligned}$$

- En faisant la somme de ces deux égalités, on aboutit à:

$$u_{i+1} - u_{i-1} - 2u_i = \Delta x^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_i + \mathcal{O}(\Delta x^4)$$

- Ce qui permet d'obtenir le schéma d'ordre deux dit « centré » pour approximer la dérivée seconde de u:

Les différences finies

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_i = \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{\Delta x^2} + \mathcal{O}(\Delta x^2)$$

- Il existe aussi une formulation « avant » et « arrière » pour la dérivée seconde, toute deux d'ordre 1:

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_i = \frac{u_{i+2} - 2u_{i+1} + u_{i-1}}{\Delta x^2} + \mathcal{O}(\Delta x) \qquad \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_i = \frac{u_i - 2u_{i-1} + u_{i-2}}{\Delta x^2} + \mathcal{O}(\Delta x)$$

- Il est également possible de construire, par le même procédé, des schémas aux différences finies d'ordre supérieur pour les dérivées deuxième, troisième, etc…

Les différences finies

5. Généralisation de la notation indicielle:

- Dans le cas 1D instationnaire, considérons l'évolution d'une grandeur u(x,t) en fonction de l'espace et du temps. Le domaine de définition de u est décomposé en N nœuds x_i répartis régulièrement avec un pas d'espace Δx. De même, le temps est décomposé en intervalle élémentaire de pas constant Δt. On notera u_i^n la valeur discrète de la grandeur u(x,t) au nœuds x_i et au temps $n\Delta t$.
- Dans le cas 2D, considérons une grandeur u(x,y) définie sur un certain domaine. Ce dernier est décomposé en N * P nœuds (x_i,y_i) répartis régulièrement avec un pas d'espace Δx dans l'espace x et Δy dans l'autre direction. On notera u_{ij} la valeur discrète de la grandeur u(x,y) au nœud (x_i,y_i) .

Les différences finies

- De similaire, dans le cas 2D instationnaire, on notera u_{ij}^{n} la valeur discrète de la grandeur u(x, y, t) au nœud x_i, y_i au temps $n\Delta t$.
- Dans le cas 3D instationnaire, on notera u_{ijk}^{n} la valeur discrète de la grandeur u(x, y, z, t) au nœud (x_i, y_i, z_k) et au temps $n\Delta t$.

6. Quelques schémas en 1D:

Différences finies avant, ordre 1

	u_i	u_{i+1}	u_{i+2}	u_{i+3}	u_{i+4}
$\Delta x u_i'$	-1	1			
$\Delta x^2 u_i''$	1	-2	1		
$\Delta x^3 u_i'''$	-1	3	-3	1	
$\Delta x^4 u_i^{(4)}$	1	-4	6	-4	1

Différences finies arrière, ordre 1

	u_{i-4}	u_{i-3}	u_{i-2}	u_{i-1}	u_i
$\Delta x u_i'$				-1	1
$\Delta x^2 u_i''$			1	-2	1
$\Delta x^3 u_i'''$		-1	3	-3	1
$\Delta x^4 u_i^{(4)}$	1	-4	6	-4	1

Les différences finies

Différences finies centré, ordre 2

	u_{i-2}	u_{i-1}	u_i	u_{i+1}	u_{i+2}
$2\Delta x u'_i$		-1		1	
$\Delta x^2 u''_i$		1	-2	1	
$2\Delta x^3 u'''_i$	-1	2	0	-2	1
$\Delta x^4 u^{(4)}_i$	1	-4	6	-4	1

Différences finies centré, ordre 4

	u_{i-3}	u_{i-2}	u_{i-1}	u_i	u_{i+1}	u_{i+2}	u_{i+3}
$12\Delta x u'_i$		1	-8	0	8	-1	
$12\Delta x^2 u''_i$		-1	16	-30	16	-1	
$8\Delta x^3 u'''_i$	-1	-8	13	0	-13	8	-1
$6\Delta x^4 u^{(4)}_i$	-1	12	-39	56	-39	12	-1

Les différences finies

7. Dérivée croisée:

- Déterminons une approximation de la dérivée croisée $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ de la fonction de deux variables f(x, y). La discrétisation du domaine de calcul est bidimensionnelle et fait intervenir deux pas d'espace supposés constants Δx et Δy dans les directions x et y.

- Le principe est toujours basé sur les développements de Taylor:

$$\begin{aligned} f(x_{i+l}, y_{j+m}) &= f(x_i, y_j) + l\Delta x \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_i + m\Delta y \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_j + \frac{(l\Delta x)^2}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_i + \frac{(m\Delta y)^2}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_j \\ &+ \frac{2ml\Delta x\Delta y}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)_{i,j} + \ldots \end{aligned}$$

Les différences finies

Au voisinage du point (i, j) :

$$
\begin{aligned}
f_{i+1,j+1} &= f_{i,j} + \Delta x \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_i + \Delta y \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_j + \Delta x \Delta y \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)_{i,j} + \frac{\Delta x^2}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_i + \frac{\Delta y^2}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_i \\
f_{i-1,j-1} &= f_{i,j} - \Delta x \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_i - \Delta y \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_j + \Delta x \Delta y \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)_{i,j} + \frac{\Delta x^2}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_i + \frac{\Delta y^2}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_i \\
f_{i+1,j-1} &= f_{i,j} + \Delta x \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_i - \Delta y \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_j - \Delta x \Delta y \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)_{i,j} + \frac{\Delta x^2}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_i + \frac{\Delta y^2}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_i \\
f_{i-1,j+1} &= f_{i,j} - \Delta x \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_i + \Delta y \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_j - \Delta x \Delta y \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)_{i,j} + \frac{\Delta x^2}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_i + \frac{\Delta y^2}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_i
\end{aligned}
$$

Les différences finies

- En effectuant une approximation linéaire des quatre équations précédentes ((1) + (2) – (3) – (4)), nous obtenons une approximation de la dérivée croisée à l'ordre 1:

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)_{i,j} = \frac{f_{i+1,j+1} - f_{i+1,j-1} - f_{i-1,j+1} + f_{i-1,j-1}}{4\Delta x \Delta y}$$

8. Exemple simple 1D avec condition de Dirichlet:

Considérons l'équation différentielle suivante :

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x) & , \quad x \in]0,1[\\ u(0) = \alpha \quad \text{et} \quad u(1) = \beta & \end{cases}$$

où f est une fonction continue.

Les différences finies

- Le maillage est construit en introduisant N + 1 nœuds x_i avec i = 0, 1,………., N, régulièrement espacés avec un pas Δx. la quantité u_i désignera la valeur de la fonction u(x) au nœud x_i.
- L'équation à résoudre s'écrit, sous forme discrète en chaque nœud x_i:

$$-\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)_i = f(x_i) = f_i$$

- Approximons la dérivée seconde de u au moyen d'un schéma centré à l'ordre 2:

$$\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)_i = \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{\Delta x^2}$$

- L'équation discrète est ainsi:

Les différences finies

$$\frac{2u_i - u_{i+1} - u_{i-1}}{\Delta x^2} = f_i \quad ; \text{ pour } i \text{ variant de 1 à N-1}$$

- Il est très pratique d'utiliser une formulation en faisant apparaître le vecteur des inconnues discrètes:

$$\frac{1}{\Delta x^2}\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{N-2} \\ u_{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 + \alpha/\Delta x^2 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{N-2} \\ f_{N-1} + \beta/\Delta x^2 \end{bmatrix}$$

Les différences finies

9. Exemple simple 1D avec conditions mixtes Dirichlet-Neumann:

Considérons l'équation différentielle suivante:

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x) & , \quad x \in]0,1[\\ u(0) = \alpha \quad \text{et} \quad u'(1) = \beta & \end{cases}$$

Où l'on a cette fois une condition de Neumann en x = 1.

- Les modifications du problème discrétisé par rapport au cas précédent sont les suivantes:
  - Tout d'abord, le nombre d'inconnues à changé. Il y a une inconnue au bord en x = 1. le problème discret a donc maintenant, sur la base du même maillage que précédemment, N inconnues u_i pour i variant de 1 à N.
  - D'autre part, il faut discrétisée la condition de Neumann u'(1) = β. Plusieurs choix sont possibles pour approximer cette dérivée première.

Les différences finies

- Inconvénients:
  - Elle ne donne pas de façon naturelle une bonne approximation des conditions de Neumann.
- Dans notre cas, utilisons une approximation d'ordre 1:

$$u'(1) = \frac{u_N - u_{N-1}}{\Delta x}$$

- Sous forme matricielle, on obtient:

$$\frac{1}{\Delta x^2}\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{N-2} \\ u_{N-1} \\ u_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 + \alpha/\Delta x^2 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{N-2} \\ f_{N-1} \\ \beta/\Delta x \end{bmatrix}$$

Les différences finies

10. Discrétisation de l'équation de la chaleur 1D

- Considérons le problème monodimensionnel de la conduction de la chaleur dans un barre de 1 m de longueur. Le champs de température T(x, t) vérifie l'équation de la chaleur:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

  α: est la diffusivité thermique.

- A cette EDP s'ajoute deux conditions aux limites aux extrémités de la barre $T(0, t) = T_g$ et $T(1, t) = T_d$ ainsi qu'une condition initiale $T(x, 0) = T_0$
- L'intervalle [0, 1] est discrétisé en N + 1 nœuds de coordonnées x_i (i variant de 0 à N) régulièrement espacés.

Les différences finies

- Notons Δx le pas d'espace. Le temps est discrétisé en intervalle de pas constant Δt.
- Notons T_i^n la température au nœud $x_i = i\Delta x$ et à l'instant $t = n\Delta t$.
- On peut utiliser deux approches pour discrétiser cette équation de la chaleur.
- La première dite explicite utilise une discrétisation au nœud x_i et à l'itération courante n:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_i^n = \alpha \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right)_i^n$$

- La seconde dite implicite utilise une discrétisation au nœud x_i et à l'itération n + 1:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_i^{n+1} = \alpha \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right)_i^{n+1}$$

Les différences finies

10.1 schéma explicite

- Nous utilisons un schéma avant d'ordre 1 pour évaluer la dérivée temporelle et un schéma centré d'ordre 2 pour la dérivée seconde en espace:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_i^n = \frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t}$$

$$\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right)_i^n = \frac{T_{i+1}^n - 2T_i^n + T_{i-1}^n}{\Delta x^2}$$

- En posant $\lambda = \alpha \frac{\Delta t}{\Delta x^2}$, la température à l'itération n + 1 est donnée par:

$$T_i^{n+1} = \lambda T_{i-1}^n + (1 - 2\lambda) T_i^n + \lambda T_{i+1}^n$$

i variant de 1 à N – 1.

Les différences finies

- Soit sous forme matricielle:

$$\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ \vdots \\ T_{N-2} \\ T_{N-1} \end{bmatrix}^{n+1} = \begin{bmatrix} 1-2\lambda & \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ \lambda & 1-2\lambda & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \lambda & 1-2\lambda & \lambda \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 1-2\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ \vdots \\ T_{N-2} \\ T_{N-1} \end{bmatrix}^{n} + \lambda \begin{bmatrix} T_g \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ T_d \end{bmatrix}$$

10.2. Schéma implicite

- Nous utilisons un schéma arrière d'ordre 1 pour évaluer la dérivée temporelle et un schéma centré d'ordre 2 pour la dérivée seconde en espace:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_i^{n+1} = \frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t}$$

$$\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right)_i^{n+1} = \frac{T_{i+1}^{n+1} - 2T_i^{n+1} + T_{i-1}^{n+1}}{\Delta x^2}$$

Les différences finies

- En posant $\lambda = \alpha \frac{\Delta t}{\Delta x^2}$, la température à l'itération n + 1 est donnée par:

$$(1+2\lambda)T_i^{n+1} - \lambda(T_{i-1}^{n+1} + T_{i-1}^{n+1}) = T_i^n$$

i variant de 1 à N + 1.

- On constate que les inconnues à l'itération n + 1 sont reliées entre elle par une relation implicite.
- Sous forme matricielle:

$$\begin{bmatrix} 1+2\lambda & -\lambda & 0 & \cdots & 0 \\ -\lambda & 1+2\lambda & -\lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & -\lambda & 1+2\lambda & -\lambda \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda & 1+2\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ \vdots \\ T_{N-2} \\ T_{N-1} \end{bmatrix}^{n+1} = \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ \vdots \\ T_{N-2} \\ T_{N-1} \end{bmatrix}^{n} + \lambda \begin{bmatrix} T_g \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ T_d \end{bmatrix}$$

Les différences finies

- A chaque itération, le vecteur des inconnues discrètes se détermine par résolution d'un système linéaire.
- La matrice du système étant tridiagonale, un algorithme de Thomas (basé sur la méthode du pivot de Gauss) est très souvent utilisé.

Algorithme de Tomas

- Cet algorithme est utilisé pour la résolution d'un système avec une matrice tridiagonale:

$$\begin{bmatrix} b_1 & c_1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & a_{N-2} & b_{N-2} & c_{N-2} \\ 0 & 0 & 0 & a_{N-1} & b_{N-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_{N-2} \\ X_{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 - a_1 X_0 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_{N-2} \\ d_{N-1} - c_{N-1} X_n \end{bmatrix}$$

Les différences finies

- Le calcul s'effectue en deux étapes (qui correspondent aux étapes du pivot de Gauss).
- L'étape de triangularisation fait apparaitre les coefficients α_i et β_i évalués par:

$$\alpha_i = \frac{-a_i}{b_i + c_i\alpha_{i+1}} \quad \text{et} \quad \beta_i = \frac{d_i - c_i\beta_{i+1}}{b_i + c_i\alpha_{i+1}} \quad \text{pour i variant de N-1 à 1}$$

- Avec $\alpha_N = 0$ et $\beta_N = X_N$ (où X_N est une condition aux limites).
- La deuxième étape détermine les inconnues, pour i variant de 1 à N – 1:

$$X_i = \alpha_i X_{i-1} + \beta_i$$

Les différences finies

2.11. Discrétisation de l'équation de la chaleur 2D stationnaire

- Considérons le problème bidimensionnel stationnaire de la conduction de la chaleur dans un domaine rectangulaire $[0, L_x] \times [0, L_y]$. Le champs de température $T(x, y)$ vérifie l'équation de Laplace:

$$\begin{cases} \Delta T = \dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 & , \quad (x, y) \in [0, L_x] \times [0, L_y] \\ T(0, y) = T_g \quad \text{et} \quad T(L_x, y) = T_d & \quad 0 < y < L_y \\ T(x, 0) = T_b \quad \text{et} \quad T(x, L_y) = T_h & \quad 0 < x < L_x \end{cases}$$

- Le domaine de calcul est discrétisé en $(N + 1) \times (P + 1)$ nœuds (x_i, y_j) (i variant de 0 à N et j variant de 0 à P). On supposera que les pas d'espace dans chaque direction Δx et Δy sont constantes. La température discrète au nœud (x_i, y_j) sera notée $T_{ij} = T(x_i, y_j)$.

Les différences finies

- Nous utilisons un schéma centré d'ordre 2 pour approximer les dérivées secondes en espace:

$$\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right)_{ij} = \frac{T_{i+1,j} - 2T_{i,j} + T_{i-1,j}}{\Delta x^2}$$

$$\left(\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right)_{ij} = \frac{T_{i,j+1} - 2T_{i,j} + T_{i,j-1}}{\Delta y^2}$$

- La formulation discrétisée est alors, pour i variant de 1 à N – 1 et j variant de 1 à P – 1 :

$$\Delta y^2 \left(T_{i+1,j} + T_{i-1,j}\right) + \Delta x^2 \left(T_{i,j+1} + T_{i,j-1}\right) - 2(\Delta x^2 + \Delta y^2)T_{i,j} = 0$$

Les différences finies

- Soit sous forme matricielle:

$$\begin{bmatrix} -2A & \Delta y^2 & 0 & \Delta x^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \Delta y^2 & -2A & \Delta y^2 & 0 & \Delta x^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Delta y^2 & -2A & 0 & 0 & \Delta x^2 & 0 & 0 & 0 \\ \Delta x^2 & 0 & 0 & -2A & \Delta y^2 & 0 & \Delta x^2 & 0 & 0 \\ 0 & \Delta x^2 & 0 & \Delta y^2 & -2A & \Delta y^2 & 0 & \Delta x^2 & 0 \\ 0 & 0 & \Delta x^2 & 0 & \Delta y^2 & -2A & 0 & 0 & \Delta x^2 \\ 0 & 0 & 0 & \Delta x^2 & 0 & 0 & -2A & \Delta y^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \Delta x^2 & 0 & \Delta y^2 & -2A & \Delta y^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Delta x^2 & 0 & \Delta y^2 & -2A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{11} \\ T_{21} \\ T_{31} \\ T_{12} \\ T_{22} \\ T_{32} \\ T_{13} \\ T_{23} \\ T_{33} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \Delta x^2 T_b + \Delta y^2 T_g \\ \Delta x^2 T_b \\ \Delta x^2 T_b + \Delta y^2 T_d \\ \Delta y^2 T_g \\ 0 \\ \Delta y^2 T_d \\ \Delta x^2 T_h + \Delta y^2 T_g \\ \Delta x^2 T_h \\ \Delta x^2 T_h + \Delta y^2 T_d \end{bmatrix}$$

- Dans le cas où les pas d'espace sont identiques $\Delta x = \Delta y$, la formulation devient, pour i variant de 1 à N – 1 et j variant de 1 à P – 1:

$$T_{i+1,j} + T_{i,j-1} + T_{i-1,j} + T_{i,j+1} - 4T_{i,j} = 0$$

Les différences finies

- Soit sous forme matricielle, pour N = P = 4:

$$\begin{bmatrix} -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{11} \\ T_{21} \\ T_{31} \\ T_{12} \\ T_{22} \\ T_{32} \\ T_{13} \\ T_{23} \\ T_{33} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} T_b + T_g \\ T_b \\ T_b + T_d \\ T_g \\ 0 \\ T_d \\ T_h + T_g \\ T_h \\ T_h + T_d \end{bmatrix}$$

- Notons I la matrice identique d'ordre 3 et D la matrice de dimension 3 définie par:

Les différences finies

$$D = \begin{bmatrix} -4 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

- Notons T_1, T_2 et T_3 les vecteurs à 3 composantes définies par:

$$T_1 = \begin{bmatrix} T_{11} \\ T_{21} \\ T_{31} \end{bmatrix} \qquad T_2 = \begin{bmatrix} T_{12} \\ T_{22} \\ T_{32} \end{bmatrix} \qquad T_3 = \begin{bmatrix} T_{13} \\ T_{23} \\ T_{33} \end{bmatrix}$$

- Le système peut s'écrire sous la forme matricielle bloc suivante:

$$\begin{bmatrix} D & I & 0 \\ I & D & I \\ 0 & I & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{bmatrix}$$

Les différences finies

- La matrice obtenue est tridiagonale et chacun de ses blocs est tridiagonale.
- La résolution du système peut s'effectuer par une méthode de Thomas matriciel où une méthode itérative matricielle (méthode de Gauss –Seidel).

Algorithme de Thomas matriciel

- Cet algorithme est utilisée pour la résolution d'un système avec une matrice tridiagonale par bloc faisant intervenir un vecteur d'inconnues discrètes X_i, de la forme:

$$A_i X_{i-1} + B_i X_i + C_i X_{i+1} = D_i \qquad i \text{ variant de 1 à N-1}$$

où A_i, B_i , C_i sont des matrices et D_i un vecteur.

Les différences finies

- Sous forme matricielle:

$$\begin{bmatrix} B_1 & C_1 & 0 & \cdots & 0 \\ A_2 & B_2 & C_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & A_{N-2} & B_{N-2} & C_{N-2} \\ 0 & 0 & 0 & A_{N-1} & B_{N-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_{N-2} \\ X_{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_1 - A_1 X_0 \\ D_2 \\ \vdots \\ D_{N-2} \\ D_{N-1} - C_{N-1} X_n \end{bmatrix}$$

- On introduit la matrice α_i et le vecteur β_i évalués par les relations de récurrence suivante:

$$\alpha_i = (B_i + C_i \alpha_{i+1})^{-1} A_i \quad \text{et} \quad \beta_i = (B_i + C_i \alpha_{i+1})^{-1} \times (D_i - C_i \beta_{i+1}) \quad \text{pour i variant de N-1 à 1}$$

avec $\alpha_N = 0$ et $\beta_N = X_N$ (où X_N exprime une condition aux limites).

- La deuxième étape détermine les inconnues, pour i variant de 1 à N – 1:

$$X_i = \alpha_i X_{i-1} + \beta_i.$$

Merci de votre attention