Pr. Chaabane Djamal

November 19, 2016

Chapitre : Processus de Naissance et de Mort

PRMIÈRE ANNÉE MASTER

ROMARIN

Département de Recherche Opérationnelle

Pr. Chaabane Djamal

November 19, 2016

Le Plan du cours

Introduction

- Considérons un processus stochastique défini par $X = \{X_t; t \in \mathbb{R}^+\}$.

Introduction

- Considérons un processus stochastique défini par $X = \{X_t; t \in \mathbb{R}^+\}$.
- Supposons aussi un comportement en chaîne de Markov;

Introduction

- Considérons un processus stochastique défini par $X = \{X_t; t \in \mathbb{R}^+\}$.
- Supposons aussi un comportement en chaîne de Markov;
- possibilité de séjourner sur un état $i \in E$; où E est l'ensemble de valeurs de X.

L'$\mathscr{O}$bjectif :

Pr. Chaabane Djamal

Introduction

- Considérons un processus stochastique défini par $X = \{X_t; t \in \mathbb{R}^+\}$.
- Supposons aussi un comportement en chaîne de Markov;
- possibilité de séjourner sur un état $i \in E$; où E est l'ensemble de valeurs de X.

L'$\mathscr{O}$bjectif :

Déterminer l'état du processus durant une période h

Introduction

- Considérons un processus stochastique défini par $X = \{X_t; t \in \mathbb{R}^+\}$.
- Supposons aussi un comportement en chaîne de Markov;
- possibilité de séjourner sur un état $i \in E$; où E est l'ensemble de valeurs de X.

L'$\mathscr{O}$bjectif :

Déterminer l'état du processus durant une période h

Deux cas particuliers sont à considérer:

Introduction

- Considérons un processus stochastique défini par $X = \{X_t; t \in \mathbb{R}^+\}$.
- Supposons aussi un comportement en chaîne de Markov;
- possibilité de séjourner sur un état $i \in E$; où E est l'ensemble de valeurs de X.

L'$\mathscr{O}$bjectif :

Déterminer l'état du processus durant une période h

Deux cas particuliers sont à considérer: Le processus d'arrivé

Introduction

- Considérons un processus stochastique défini par $X = \{X_t; t \in \mathbb{R}^+\}$.
- Supposons aussi un comportement en chaîne de Markov;
- possibilité de séjourner sur un état $i \in E$; où E est l'ensemble de valeurs de X.

L'$\mathscr{O}$bjectif :
Déterminer l'état du processus durant une période h
Deux cas particuliers sont à considérer: Le processus d'arrivé déjà traité et **les files d'attentes.**

Plan

Pr. Chaabane Djamal

November 19, 2016

Pr. Chaabane Djamal

November 19, 2016

Définition

- *La matrice de Markov pour un tel processus est donnée par :*

$$P\left(X_t = j | X_{t_n} = i_n, \cdots, X_{t_1} = i_1\right) = P\left(X_t = j | X_{t_n} = i_n\right) \quad (1)$$

pour toute suite $t_1 < t_2 < ... < t_n < t$

Pr. Chaabane Djamal

November 19, 2016

Définition

- *La matrice de Markov pour un tel processus est donnée par :*

$$P\left(X_t = j | X_{t_n} = i_n, \cdots, X_{t_1} = i_1\right) = P\left(X_t = j | X_{t_n} = i_n\right) \quad (1)$$

pour toute suite $t_1 < t_2 < ... < t_n < t$

- *Le Processus est homogène si les probabilités ne dépendent pas de t.*

$$P\left(X_{t+s} = j | X_t = i\right) = P\left(X_s = j | X_0 = i\right) \quad \forall t, s \in \mathbb{R}^+ \quad (2)$$

Pr. Chaabane Djamal

November 19, 2016

Définition

- *Les équations de Chapman-Kolmogorov*

$$\boxed{P\left(X_{t+s}=j|X_0=i\right)=\sum_{k\in E}P\left(X_{t+s}=j|X_t=k\right)\times P\left(X_t=k|X_0=i\right) \qquad (3)}$$

Introduction

Pr. Chaabane Djamal

November 19, 2016

Définition

☛ *Les équations de Chapman-Kolmogorov*

$$P\left(X_{t+s}=j|X_0=i\right)=\sum_{k\in E}P\left(X_{t+s}=j|X_t=k\right)\times P\left(X_t=k|X_0=i\right) \quad (3)$$

On a

$$q_j(t)=P(X_t=j)=\sum_{k\in E}P\left(X_t=j|X_0=k\right)P(X_0=k)$$

Introduction

Théorème

Considérons un processus stochastique vérifiant (1, 2,3). La variable aléatoire θ_i qui représente la durée du séjour du processus dans le système à l'état i suit une ***distribution exponentielle****.*

Preuve

On a

$$P\left(\theta_i > t + x | \theta_i > t\right)$$

Preuve

On a

$$P\left(\theta_i > t + x | \theta_i > t\right)$$
$$= P(X_\tau = i; t \leq \tau \leq t + x | X_s = i; 0 \leq s \leq t)$$

Preuve

On a

$$\begin{aligned} & P\left(\theta_i > t + x | \theta_i > t\right) \\ & = P(X_\tau = i; t \leq \tau \leq t + x | X_s = i; 0 \leq s \leq t) \\ & = P(X_\tau = i; t \leq \tau \leq t + x | X_t = i)^{(1)} \end{aligned}$$

Preuve

On a

$$\begin{aligned} & P\left(\theta_i > t + x | \theta_i > t\right) \\ & = P(X_\tau = i; t \leq \tau \leq t + x | X_s = i; 0 \leq s \leq t) \\ & = P(X_\tau = i; t \leq \tau \leq t + x | X_t = i)^{(1)} \\ & = P(X_\tau = i; 0 \leq \tau \leq x | X_0 = i)^{(2)} \end{aligned}$$

Preuve

On a

$$\begin{aligned} & P\left(\theta_i > t + x | \theta_i > t\right) \\ & = P(X_\tau = i; t \leq \tau \leq t + x | X_s = i; 0 \leq s \leq t) \\ & = P(X_\tau = i; t \leq \tau \leq t + x | X_t = i)^{(1)} \\ & = P(X_\tau = i; 0 \leq \tau \leq x | X_0 = i)^{(2)} \\ & = P\left(\theta_i > x\right) \end{aligned}$$

$$Donc\ \theta_i \sim Exp\left(\frac{1}{E(\theta_i)}\right)$$ ■

Pr. Chaabane Djamal

November 19, 2016

Définition

Un processus de naissance et de mort est un processus stochastique vérifiant (1),(2),(3) et en plus

- *L'état :*

$$P\left(X_{t+h} = j | X_t = i\right) = \begin{cases} \lambda_i h + o(h) & si\ j = i + 1 \\ \mu_i h + o(h) & si\ j = i - 1 \\ o(h) & si\ j = i + |k| \\ & et\ |k| > 1 \end{cases} \tag{4}$$

Définition

Un processus de naissance et de mort est un processus stochastique vérifiant (1),(2),(3) et en plus

- *L'état :*

$$P\left(X_{t+h}=j|X_t=i\right)=\begin{cases}\lambda_i h+o(h) & si\ j=i+1\\ \mu_i h+o(h) & si\ j=i-1\\ o(h) & si\ j=i+|k|\\ & et\ |k|>1\end{cases} \tag{4}$$

et

- $$P\left(X_t+\tau\neq i-1,i,i+1;0\leq\tau\leq h|X_t=i\right)=o(h). \tag{5}$$

Pr. Chaabane Djamal

November 19, 2016

Remarque

$$\begin{aligned} P(\theta_i > t) &= P(X_\tau = i; 0 \leq \tau \leq t | X_0 = i) \\ &= 1 - \lambda_i h - \mu_i h + o(h) \\ &= 1 - (\lambda_i + \mu_i)h + o(h) \end{aligned} \quad (6)$$

Pr. Chaabane Djamal

November 19, 2016

Théorème

Dans un processus de naissance et de mort, les probabilités $q_j(t) = P(X_t = j)$ sont solution du système d'équations différentielles suivant :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} q_0'(t) & = & -\lambda_0 q_0(t) + \mu_1 q_1(t) \\ q_j'(t) & = & -(\lambda_j + \mu_j) q_j(t) + \lambda_{j-1} q_{j-1}(t) + \mu_{j+1} q_{j+1}(t) \end{array} \right. \tag{7}$$

Pr. Chaabane Djamal

November 19, 2016

Preuve

- *Soit* $[t, t+h]$;

$$(X_{t+h} = 0) \quad = \quad (X_{t+h} = 0) \cap \Omega$$

Pr. Chaabane Djamal

November 19, 2016

Preuve

- *Soit* $[t, t+h]$;

$$\begin{aligned}(X_{t+h} = 0) &= (X_{t+h} = 0) \cap \Omega \\ &= (X_{t+h} = 0) \cap \left(\bigcup_{k \in E} (X_t = k) \right)\end{aligned}$$

Preuve

- *Soit* $[t, t+h]$;

$$\begin{aligned}
(X_{t+h} = 0) &= (X_{t+h} = 0) \cap \Omega \\
&= (X_{t+h} = 0) \cap \left(\bigcup_{k \in E} (X_t = k) \right) \\
&= \bigcup_{k \in E} ((X_{t+h} = 0) \cap (X_t = k))
\end{aligned}$$

Pr. Chaabane Djamal

November 19, 2016

Preuve

➔ *Soit* $[t, t+h]$;

$$\begin{aligned}
(X_{t+h} = 0) &= (X_{t+h} = 0) \cap \Omega \\
&= (X_{t+h} = 0) \cap \left(\bigcup_{k \in E} (X_t = k) \right) \\
&= \bigcup_{k \in E} ((X_{t+h} = 0) \cap (X_t = k)) \\
P(X_{t+h} = 0) &= \sum_{k \in E} P(X_{t+h} = 0 | X_t = k) P(X_t = k)
\end{aligned}$$

Pr. Chaabane Djamal

November 19, 2016

Preuve

- *Soit* $[t, t+h]$;

$$
\begin{aligned}
(X_{t+h} = 0) &= (X_{t+h} = 0) \cap \Omega \\
&= (X_{t+h} = 0) \cap \left(\bigcup_{k \in E} (X_t = k) \right) \\
&= \bigcup_{k \in E} ((X_{t+h} = 0) \cap (X_t = k)) \\
P(X_{t+h} = 0) &= \sum_{k \in E} P(X_{t+h} = 0 | X_t = k) P(X_t = k) \\
&= P(X_{t+h} = 0 | X_t = 0) P(X_t = 0) \\
&+ P(X_{t+h} = 0 | X_t = 1) P(X_t = 1)
\end{aligned}
$$

Pr. Chaabane Djamal

November 19, 2016

Introduction
Outils de base
Caractérisation du Processus de Naissance et de Mort
Résolution
Processus de Naissance Pure
File d'attente
Structure de base de modèles de file d'attente

Preuve

- *Soit* $[t, t+h]$;

$$
\begin{aligned}
(X_{t+h} = 0) &= (X_{t+h} = 0) \cap \Omega \\
&= (X_{t+h} = 0) \cap \left(\bigcup_{k \in E} (X_t = k) \right) \\
&= \bigcup_{k \in E} ((X_{t+h} = 0) \cap (X_t = k)) \\
P(X_{t+h} = 0) &= \sum_{k \in E} P(X_{t+h} = 0 | X_t = k) P(X_t = k) \\
&= P(X_{t+h} = 0 | X_t = 0) P(X_t = 0) \\
&+ P(X_{t+h} = 0 | X_t = 1) P(X_t = 1) \\
q_0(t+h) &= (1 - \lambda_0 h) q_0(t) + q_1(t) \mu_1 h + o(h)
\end{aligned}
$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{q_0(t+h) - q_0(t)}{h} = -\lambda_0 q_0(t) + \mu_1 q_1(t)$$

Pr. Chaabane Djamal

November 19, 2016

Pr. Chaabane Djamal

November 19, 2016

M&R

$$\lim_{h\to 0} \frac{q_0(t+h) - q_0(t)}{h} = -\lambda_0 q_0(t) + \mu_1 q_1(t)$$

$$\boxed{q_0'(t) = -\lambda_0 q_0(t) + \mu_1 q_1(t)}$$

Pr. Chaabane Djamal

$$\lim_{h\to 0}\frac{q_0(t+h)-q_0(t)}{h} \quad = \quad -\lambda_0 q_0(t)+\mu_1 q_1(t)$$

$$\boxed{q_0'(t) \quad = \quad -\lambda_0 q_0(t)+\mu_1 q_1(t)}$$

➔ Soit $[t, t+h]$; $j \in E$ et $j \neq 0$.

Preuve (suite)

$$\lim_{h\to 0}\frac{q_0(t+h)-q_0(t)}{h} = -\lambda_0 q_0(t)+\mu_1 q_1(t)$$

$$\boxed{q_0'(t) = -\lambda_0 q_0(t)+\mu_1 q_1(t)}$$

➔ Soit $[t, t+h]$; $j\in E$ et $j\neq 0$.

$$P\left(X_{t+h}=j\right) = \sum_{k\in E} P\left(X_{t+h}=j|X_t=k\right)P\left(X_t=k\right)$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{q_0(t+h)-q_0(t)}{h} = -\lambda_0 q_0(t)+\mu_1 q_1(t)$$

$$\boxed{q_0'(t) = -\lambda_0 q_0(t)+\mu_1 q_1(t)}$$

➔ Soit $[t, t+h]$; $j \in E$ et $j \neq 0$.

$$\begin{aligned} P\left(X_{t+h}=j\right) &= \sum_{k\in E} P\left(X_{t+h}=j|X_t=k\right) P\left(X_t=k\right) \\ &= P\left(X_{t+h}=j|X_t=j-1\right) P\left(X_t=j-1\right) \end{aligned}$$

Pr. Chaabane Djamal

$$\lim_{h\to 0} \frac{q_0(t+h)-q_0(t)}{h} = -\lambda_0 q_0(t) + \mu_1 q_1(t)$$

$$\boxed{q_0'(t) = -\lambda_0 q_0(t) + \mu_1 q_1(t)}$$

➔ Soit $[t, t+h]$; $j \in E$ et $j \neq 0$.

$$\begin{aligned}
P(X_{t+h}=j) &= \sum_{k\in E} P(X_{t+h}=j|X_t=k)\,P(X_t=k) \\
&= P(X_{t+h}=j|X_t=j-1)\,P(X_t=j-1) \\
&+ P(X_{t+h}=j|X_t=j)\,P(X_t=j)
\end{aligned}$$

Pr. Chaabane Djamal

November 19, 2016

M&R

$$\lim_{h\to 0}\frac{q_0(t+h)-q_0(t)}{h} = -\lambda_0 q_0(t)+\mu_1 q_1(t)$$

$$\boxed{q_0'(t) = -\lambda_0 q_0(t)+\mu_1 q_1(t)}$$

➔ Soit $[t, t+h]$; $j \in E$ et $j \neq 0$.

$$\begin{aligned}
P(X_{t+h}=j) &= \sum_{k\in E} P(X_{t+h}=j|X_t=k)\,P(X_t=k)\\
&= P(X_{t+h}=j|X_t=j-1)\,P(X_t=j-1)\\
&+ P(X_{t+h}=j|X_t=j)\,P(X_t=j)\\
&+ P(X_{t+h}=j|X_t=j+1)\,P(X_t=j+1)
\end{aligned}$$

Preuve (suite)

$$
\begin{aligned}
q_j(t+h) &= \lambda_{j-1} h q_{j-1}(t) + \left(1 - \lambda_j h - \mu_j h\right) q_j(t) \\
&+ \mu_{j+1} h q_{j+1}(t) + o(h)
\end{aligned}
$$

Preuve (suite)

$$\begin{aligned} q_j(t+h) &= \lambda_{j-1} h q_{j-1}(t) + \left(1 - \lambda_j h - \mu_j h\right) q_j(t) \\ &+ \mu_{j+1} h q_{j+1}(t) + o(h) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q_j(t+h) - q_j(t) &= h\left(\lambda_{j-1} q_{j-1}(t) + \mu_{j+1} q_{j+1}(t)\right) \\ &- h\left(\lambda_j + mu_j\right) q_j(t) + o(h) \end{aligned}$$

Preuve (suite)

$$\begin{aligned} q_j(t+h) &= \lambda_{j-1} h q_{j-1}(t) + \Big(1 - \lambda_j h - \mu_j h\Big) q_j(t) \\ &+ \mu_{j+1} h q_{j+1}(t) + o(h) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q_j(t+h) - q_j(t) &= h\Big(\lambda_{j-1} q_{j-1}(t) + \mu_{j+1} q_{j+1}(t)\Big) \\ &- h\Big(\lambda_j + mu_j\Big) q_j(t) + o(h) \\ \lim_{h\to 0} \frac{q_j(t+h) - q_j(t)}{h} &= \lambda_{j-1} q_{j-1}(t) + \mu_{j+1} q_{j+1}(t) \\ &- \Big(\lambda_j + \mu_j\Big) q_j(t) \end{aligned}$$

$$\boxed{q_j'(t) = -(\lambda_j + \mu_j) q_j(t) + \lambda_{j-1} q_{j-1}(t) + \mu_{j+1} q_{j+1}(t)}$$

■

Plan

Pr. Chaabane Djamal

November 19, 2016

☛ Les équations différentielles :

Pr. Chaabane Djamal

November 19, 2016

M&R

☛ Les équations différentielles :

Etat Equations

Pr. Chaabane Djamal

☛ Les équations différentielles :

Etat	Equations
0	$\mu_1 q_1(t) = \lambda_0 q_0(t)$

Pr. Chaabane Djamal

November 19, 2016

- Les équations différentielles :

Etat	Equations
0	$\mu_1 q_1(t) = \lambda_0 q_0(t)$
1	$\lambda_0 q_0 + \mu_2 q_2 = (\lambda_1 + \mu_1) q_1(t)$

- Les équations différentielles :

Etat	Equations
0	$\mu_1 q_1(t) = \lambda_0 q_0(t)$
1	$\lambda_0 q_0 + \mu_2 q_2 = (\lambda_1 + \mu_1) q_1(t)$
$\vdots$	$\vdots$

Pr. Chaabane Djamal

November 19, 2016

☛ Les équations différentielles :

Etat	Equations
0	$\mu_1 q_1(t) = \lambda_0 q_0(t)$
1	$\lambda_0 q_0 + \mu_2 q_2 = (\lambda_1 + \mu_1) q_1(t)$
$\vdots$	$\vdots$
n	$\lambda_{n-1} q_{n-1}(t) + \mu_{n+1} q_{jn+1}(t) = (\lambda_n + \mu_n)\, q_n(t)$

- Les équations différentielles :

$$\begin{array}{ll} \text{Etat} & \text{Equations} \\ 0 & \mu_1 q_1(t) = \lambda_0 q_0(t) \\ 1 & \lambda_0 q_0 + \mu_2 q_2 = (\lambda_1 + \mu_1) q_1(t) \\ \vdots & \vdots \\ n & \lambda_{n-1} q_{n-1}(t) + \mu_{n+1} q_{jn+1}(t) = (\lambda_n + \mu_n)\, q_n(t) \end{array} \tag{8}$$

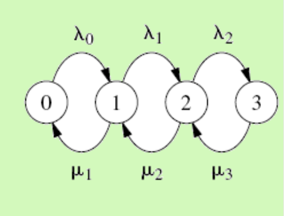
- Processus stationnaire $\Rightarrow \lim_{t\to\infty} P_j(t) = \pi_j \ \forall j \in E$ distribution invariante.

- Les équations différentielles :

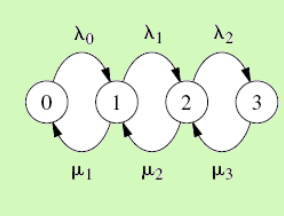
$$\begin{array}{ll} \text{Etat} & \text{Equations} \\ 0 & \mu_1 q_1(t) = \lambda_0 q_0(t) \\ 1 & \lambda_0 q_0 + \mu_2 q_2 = (\lambda_1 + \mu_1) q_1(t) \\ \vdots & \vdots \\ n & \lambda_{n-1} q_{n-1}(t) + \mu_{n+1} q_{jn+1}(t) = (\lambda_n + \mu_n)\, q_n(t) \end{array} \tag{8}$$

- Processus stationnaire $\Rightarrow \lim_{t\to\infty} P_j(t) = \pi_j \; \forall j \in E$ distribution invariante.

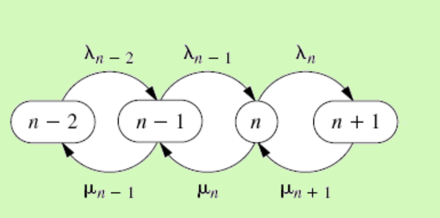
Introduction



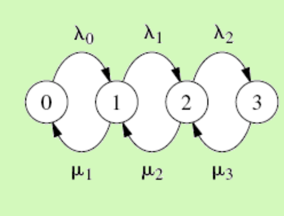
Introduction



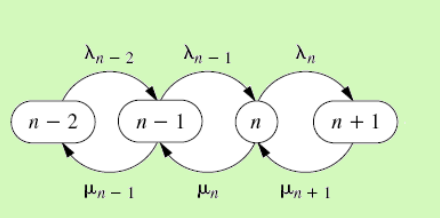
⋮



Introduction



$\vdots$



$\vdots$

- Dans un processus de naissance pur on a :

$$\mu_{\mathbf{i}} = \mathbf{0}; \lambda_{\mathbf{i}} = \lambda; \ \forall \mathbf{i} \in \mathbf{E}$$

Pr. Chaabane Djamal

November 19, 2016

☛ Dans un processus de naissance pur on a :

$$\boldsymbol{\mu_i = 0; \lambda_i = \lambda; \ \forall i \in E}$$

Naissance Pur

$$\begin{cases} q_0'(t) & = & -\lambda q_0(t) \\ q_j'(t) & = & -\lambda q_j(t) + \lambda q_{j-1}(t) \end{cases} \tag{9}$$

Pr. Chaabane Djamal

☛ $j = 1$

$$q_0'(t) = -\lambda q_0(t) \Leftrightarrow$$

Pr. Chaabane Djamal

November 19, 2016

M&R

- $j = 1$

$$q_0'(t) = -\lambda q_0(t) \Leftrightarrow \frac{dq_0(t)}{dt} = -\lambda q_0(t)$$

Pr. Chaabane Djamal

November 19, 2016

- $j = 1$

$$q_0'(t) = -\lambda q_0(t) \Leftrightarrow \frac{dq_0(t)}{dt} = -\lambda q_0(t)$$

$$\frac{dq_0(t)}{q_0(t)} = -\lambda dt$$

Pr. Chaabane Djamal

November 19, 2016

- $j = 1$

$$q_0'(t) = -\lambda q_0(t) \Leftrightarrow \frac{dq_0(t)}{dt} = -\lambda q_0(t)$$

$$\frac{dq_0(t)}{q_0(t)} = -\lambda dt \Leftrightarrow q_0(t) = ke^{-\lambda t}$$

- $j = 1$

  $$q_0'(t) = -\lambda q_0(t) \Leftrightarrow \frac{dq_0(t)}{dt} = -\lambda q_0(t)$$

  $$\frac{dq_0(t)}{q_0(t)} = -\lambda dt \Leftrightarrow q_0(t) = ke^{-\lambda t}$$

  $$q_0(0) = 1 \Rightarrow k = 1 \text{ donc } q_0(t) = e^{-\lambda t}$$

- On a :

$$\begin{aligned} q_1'(t) &= -\lambda q_1(t) + \lambda q_0(t) \\ q_1'(t) &= -\lambda q_1(t) + \lambda e^{-\lambda_0 t} \end{aligned}$$

- On résoud d'abords

$$\begin{aligned} q_1'(t) &= -\lambda q_1(t) \\ \text{Solution :} &\quad q_1(t) = k_1 e^{-\lambda t} \end{aligned}$$

- Variant la constante

$$q_1'(t) = -\lambda k_1 e^{-\lambda t} + k_1' e^{-\lambda t}$$

$$-\lambda k_1 e^{-\lambda t} + k_1' e^{-\lambda t} = -\lambda k_1 e^{-\lambda t} + \lambda e^{-\lambda t}$$

Pr. Chaabane Djamal

November 19, 2016

- On résoud d'abords

$$\begin{array}{lcl} q_1'(t) & = & -\lambda q_1(t) \\ \text{Solution :} & & q_1(t) = k_1 e^{-\lambda t} \end{array}$$

- Variant la constante

$$q_1'(t) = -\lambda k_1 e^{-\lambda t} + k_1' e^{-\lambda t}$$

$$\begin{array}{lcl} -\lambda k_1 e^{-\lambda t} + k_1' e^{-\lambda t} & = & -\lambda k_1 e^{-\lambda t} + \lambda e^{-\lambda t} \\ k_1' e^{-\lambda t} & = & \lambda e^{-\lambda t} \end{array}$$

Pr. Chaabane Djamal

November 19, 2016

- On résoud d'abords

$$\begin{array}{lcl} q_1'(t) & = & -\lambda q_1(t) \\ \text{Solution :} & & q_1(t) = k_1 e^{-\lambda t} \end{array}$$

- Variant la constante

$$q_1'(t) = -\lambda k_1 e^{-\lambda t} + k_1' e^{-\lambda t}$$

$$\begin{array}{lcl} -\lambda k_1 e^{-\lambda t} + k_1' e^{-\lambda t} & = & -\lambda k_1 e^{-\lambda t} + \lambda e^{-\lambda t} \\ k_1' e^{-\lambda t} & = & \lambda e^{-\lambda t} \\ k_1' & = & \lambda e^{(-\lambda+\lambda)t} = \lambda \end{array}$$

Pr. Chaabane Djamal

November 19, 2016

- On résoud d'abords

$$\begin{array}{lcl} q_1'(t) & = & -\lambda q_1(t) \\ \text{Solution :} & & q_1(t) = k_1 e^{-\lambda t} \end{array}$$

- Variant la constante

$$q_1'(t) = -\lambda k_1 e^{-\lambda t} + k_1' e^{-\lambda t}$$

$$\begin{array}{lcl} -\lambda k_1 e^{-\lambda t} + k_1' e^{-\lambda t} & = & -\lambda k_1 e^{-\lambda t} + \lambda e^{-\lambda t} \\ k_1' e^{-\lambda t} & = & \lambda e^{-\lambda t} \\ k_1' & = & \lambda e^{(-\lambda+\lambda)t} = \lambda \\ k_1 & = & \lambda t + k_2 \end{array}$$

Pr. Chaabane Djamal

November 19, 2016

$$q_1(t) \quad = \quad (\lambda t + k_2)\, e^{-\lambda t}$$

Pr. Chaabane Djamal

November 19, 2016

$$\begin{array}{lll} q_1(t) & = & (\lambda t + k_2)\, e^{-\lambda t} \\ q_1(0) = 0 & & \Rightarrow \mathbf{q_1(t) = \lambda t e^{-\lambda t}} \end{array}$$

- On démontre par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad P_n(t) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}$$

Exemple

Supposons que de nouvelles personnes immigrent dans la population selon un processus de Poinsson(λ). Soit X_t la taille de la population à l'instant t.
Montrer que $P(X_{t+h} - X_t = 1 | X_t = i) = \lambda h + o(h)$.

Réponse :

☛ Soit l'intervalle $[t, t+h]$ avec $h \to 0$.

$P(X_{t+h} - X_t = 1 | X_t = i) =$

$P($ une arrivée, pas de mort dans l'intervalle de longueur $h) + o(h)$

- Les arrivées suivent un processus de Poisson avec un taux λ, la probabilité d'exactement une arrivée dans un intervalle de temps de longueur h est

$$e^{-\lambda h} \frac{(\lambda h)^1}{1\,!}$$

Exemple

Supposons que de nouvelles personnes immigrent dans la population selon un processus de Poinsson(λ). Soit X_t la taille de la population à l'instant t.
Montrer que $P(X_{t+h} - X_t = 1|X_t = i) = \lambda h + o(h)$.

Réponse :

☛ Soit l'intervalle $[t, t+h]$ avec $h \to 0$.

$P(X_{t+h} - X_t = 1|X_t = i) =$

$P($ une arrivée, pas de mort dans l'intervalle de longueur $h) + o(h)$

- Les arrivées suivent un processus de Poisson avec un taux λ, la probabilité d'exactement une arrivée dans un intervalle de temps de longueur h est

$$e^{-\lambda h}\frac{(\lambda h)^1}{1!}$$

- Comme il existe i dans la population, chaque h, avec une

$\mathscr{E}$xemple $\mathscr{P}$rototype

La salle d'urgence de l'Hôpital fournit rapidement des soins médicaux d'urgence pour les cas portés à l'hôpital par ambulance ou par automobile. À toute heure, il y a toujours un médecin de service dans la salle d'urgence.

Exemple Prototype

La salle d'urgence de l'Hôpital fournit rapidement des soins médicaux d'urgence pour les cas portés à l'hôpital par ambulance ou par automobile. À toute heure, il y a toujours un médecin de service dans la salle d'urgence. Toutefois, en raison d'une tendance croissante pour les cas d'urgence à utiliser ces installations, plutôt que d'aller à un médecin privé,

Exemple Prototype

La salle d'urgence de l'Hôpital fournit rapidement des soins médicaux d'urgence pour les cas portés à l'hôpital par ambulance ou par automobile. À toute heure, il y a toujours un médecin de service dans la salle d'urgence. Toutefois, en raison d'une tendance croissante pour les cas d'urgence à utiliser ces installations, plutôt que d'aller à un médecin privé, l'hôpital a connu une augmentation continue du **nombre de visites** à l'urgence chaque année.

ℰxemple 𝒫rototype

La salle d'urgence de l'Hôpital fournit rapidement des soins médicaux d'urgence pour les cas portés à l'hôpital par ambulance ou par automobile. À toute heure, il y a toujours un médecin de service dans la salle d'urgence. Toutefois, en raison d'une tendance croissante pour les cas d'urgence à utiliser ces installations, plutôt que d'aller à un médecin privé, l'hôpital a connu une augmentation continue du **nombre de visites** à l'urgence chaque année. En conséquence, il est devenu assez commun pour les patients qui arrivent en heure de pointe (début de la soirée) d'**avoir à attendre leur tour** d'être traité par le médecin.

Pr. Chaabane Djamal

November 19, 2016

Plan

Le processus de base supposé par tous les modèles de file d'attente est le suivant:

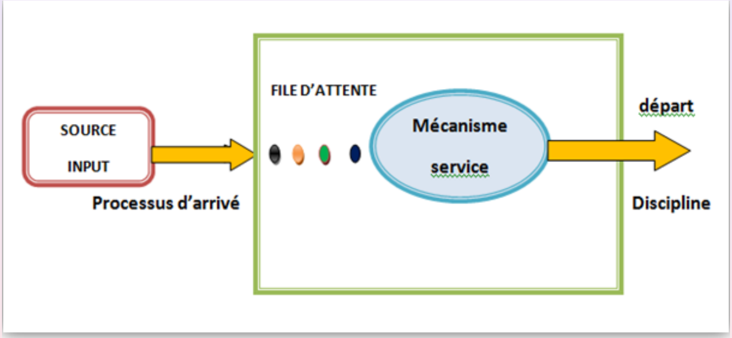
- **Exigence des clients**
  Les clients **entrent** dans le système de files d'attente et de rejoindre une file d'attente.

Le processus de base supposé par tous les modèles de file d'attente est le suivant:

- ☛ **Exigence des clients**
  Les clients **entrent** dans le système de files d'attente et de rejoindre une file d'attente. À certains moments, un membre de la file d'attente est sélectionnée pour le service par une règle connue sous le nom de file d'attente de la **discipline**.

Le processus de base supposé par tous les modèles de file d'attente est le suivant:

- **Exigence des clients**
  Les clients **entrent** dans le système de files d'attente et de rejoindre une file d'attente. À certains moments, un membre de la file d'attente est sélectionnée pour le service par une règle connue sous le nom de file d'attente de la **discipline**. Le **service** requis est ensuite réalisée pour le client par le mécanisme de service,après quoi le client **quitte** la file d'attente du système. voir la figure ci-dessous.


SOURCE
INPUT
Processus d'arrivé
FILE D'ATTENTE
Mécanisme
service
départ
Discipline

Pr. Chaabane Djamal

November 19, 2016

☛ **La file d'attente**