Langage de programmation C

Un peu d'histoire

Le C a été conçu en 1972 par Dennis Richie et Ken Thompson, chercheurs aux Bell Labs, afin de développer un système d'exploitation UNIX sur un DEC PDP-11. En 1978, Brian Kernighan et Dennis Richie publient la définition classique du C dans le livre The C Programming language [6]. Le C devenant de plus en plus populaire dans les années 80, plusieurs groupes mirent sur le marché des compilateurs comportant des extensions particulières. En 1983, l'ANSI (American National Standards Institute) décida de normaliser le langage ; ce travail s'acheva en 1989 par la définition de la norme ANSI C. Celle-ci fut reprise telle quelle par l'ISO (International Standards Organization) en 1990.

Les dangers de C

C'est un langage près de la machine, donc dangereux et bien que C soit un langage de programmation structuré, il ne nous force pas à adopter un certain style de programmation (comme p.ex. Pascal). Dans un certain sens, tout est permis même la commande « goto », si redoutée par les puristes ne manque pas en C. Le programmeur a donc beaucoup de libertés, mais aussi des responsabilités: il doit veiller lui-même à adopter un style de programmation propre, solide et compréhensible.

Qualité du programme

Les caractéristiques qu'un bon programmeur doit rechercher dans l'établissement de ses programmes sont :

- Clarté : le programme doit être lisible dans sa globalité par n'importe quel autre programmeur. Sa logique doit être facilement appréhendée. L'un des principaux objectifs du C était précisément de permettre le développement de programmes ordonnés, clairs et lisibles.
- Simplicité : toujours donner la préférence aux solutions simples qui renforcent la précision et la clarté du programme. Compromis entre niveau de précision et clarté du programme.
- Efficacité : vitesse d'exécution et rationalisation de l'utilisation de la mémoire.
- Modularité : de nombreux programmes se prêtent bien à un découpage en sous-tâches clairement identifiées. Programmer ces sous-tâches dans des modules distincts. En C, ces modules sont matérialisés par des fonctions. La modularité rend un programme plus précis et plus clair ; sa maintenance est facilitée (le fait de modifier ou de faire évoluer un programme).
- Extensibilité : permet une meilleure réutilisation des fonctions.

1. Les notions de base du langage C

Les programmes en C sont composés essentiellement de fonctions et de variables.

1.1 La fonction *main*

La fonction **main** est la fonction principale des programmes en C. Elle se trouve obligatoirement dans tous les programmes. L'exécution d'un programme entraîne automatiquement l'appel de la fonction **main**.

```
main()
{
  <déclarations>
  <instructions>
}
```

1.2 Structure générale d'un programme C

```
inclure des bibliothèques (#include)
définir des constantes (#define)
définir des types
définir des fonctions
main()
{ <déclaration des variables locales du programme principal>
  <instructions>
}
```


Un programme C est un ensemble de fonctions. Tout programme comporte au moins une fonction principale désignée par main.

Exemple :

```
#include<stdio.h>
main()
{  /*  ce programme affiche le message « Bonjour » */
    printf("Bonjour") ;
}
```

- main : indique qu'il s'agit d'un programme principal
- les ( ) indiquent que la fonction main n'a pas de paramètres
- /* */ permettent d'encadrer un commentaire
- printf est une fonction qui est définie dans un fichier particulier appelé bibliothèque (ou librairie) d'E/S du langage C
- #include<stdio.h> pour que printf soit reconnue l'ors de la compilation

a) Les identificateurs

Les identificateurs sont les noms propres du programme.

Les noms des fonctions et des variables en C sont composés d'une suite de lettres et de chiffres.

- Le premier caractère doit être une lettre. Le symbole '_' est aussi considéré comme une lettre.
- L'ensemble des symboles utilisables est donc: {0,1,2,...,9,A,B,...,Z,_,a,b,...,z}
- Le premier caractère doit être une lettre (ou le symbole '_')
- **C distingue les majuscules et les minuscules, ainsi: *NOM* est différent de *nom***
- La longueur des identificateurs n'est pas limitée, mais C distingue seulement les 31 premiers caractères.
- **Les mots clés du C doivent être écrits en minuscules**

b) Les commentaires

Un commentaire commence toujours par les deux symboles '**/***' et se termine par les symboles '***/**'. Il est interdit d'utiliser des commentaires imbriqués.

Exemples : **/* Ceci est un commentaire correct */**

/* Ceci est /* évidemment */ défendu */

c) Utilisation des bibliothèques de fonctions

Pour pouvoir les utiliser, il faut inclure des fichiers en-tête (*header files* - extension **.H**) dans nos programmes.

L'instruction ***#include*** insère les fichiers en-tête indiqués comme arguments dans le texte du programme au moment de la compilation.

Exemple :

Nous avons écrit un programme qui fait appel à des fonctions mathématiques prédéfinies. Nous devons donc inclure le fichier en-tête correspondant dans le code source de notre programme à l'aide de l'instruction: **#include <math.h>**

1.3 Variables, types de base, déclarations

a) Les entiers

définition	*description*	*domaine min*	*domaine max*	*nombre d'octets*
short	entier court	-32768	32767	2
int	entier standard	-2147483648	2147483647	4
long	entier long	-2147483648	2147483647	4

unsigned short	entier court	0	65535	2
unsigned int	entier standard	0	65535	2
unsigned long	entier long	0	4294967295	4

sizeof(short)<=sizeof(int)<=sizeof(long)

Dans certaines machines on a short →2 int →2 long→4

dans d'autres on a short →2 int →4 long→4

b) Les réels

En C, nous avons le choix entre deux types de réels: **float**, **double**

définition	*précision*	*mantisse*	*domaine min*	*domaine max*	*nombre d'octets*
float	simple	6	$3.4 * 10^{-38}$	$3.4 * 10^{38}$	4
double	double	15	$1.7 * 10^{-308}$	$1.7 * 10^{308}$	8

La ***mantisse*** : Les chiffres significatifs du réel sans la virgule

Exemple : 123.4 ou 1234e -1 mantisse→1234

c) Les caractères

Le type **char** *(provenant de l'anglais character)* permet de stocker la valeur ASCII d'un caractère, c'est-à-dire un nombre entier !

Par défaut les nombres sont signés, cela signifie qu'ils comportent un signe. Pour stocker l'information concernant le signe (en binaire), les ordinateurs utilisent le « complément à deux ». Une donnée de type char est donc signée, cela signifie bien sûr pas que la lettre possède un signe mais tout simplement que dans la mémoire la valeur codant le caractère peut être négative.

définition	description	domaine min	domaine max	nombre d'octets
char	Caractère	-128	127	1
unsigned char	Caractère	0	255	1

d) La définition des constantes :

Une constante est un objet auquel on attribue une valeur à la déclaration et que l'on ne peut pas changer tout au long du programme. On défini des constantes en utilisant la directive **define** ou le mot clé **const**.

Syntaxe : #define <idf> valeur ou bien const <idf> = valeur

Exemple : #define max 100 ou bien const max=100

Remarque :

Une constante de type caractère est placée entre deux apostrophes : 'd' ou 'D' ... comme suit #define C 'F' et chaine de caractères ainsi #define end "Fin"

e) La déclaration des variables :

<Type> <NomVar1>, <NomVar2>,..., <NomVarN>;

Exemples :

int compteur,X,Y; float hauteur,largeur; double M; char C;

f) Initialisation des variables

En C, il est possible d'initialiser les variables lors de leur déclaration:

int MAX = 1023; float X = 1.05;

Remarque : En C il n'existe pas de type spécial pour les variables **booléennes**. Si l'utilisation d'une variable booléenne est indispensable, on utilisera une variable du type **int**. Les opérations logiques en C retournent toujours des résultats du type **int** : **0** pour faux et **1** pour vrai

g) Convertions de type automatique

En général on converti des types plus « petits » en des types plus « larges » de cette façon on ne perd pas en précision.

Lors de l'affectation, la donnée à droite du signe d'égalité est convertie dans le type à gauche du signe d'égalité. Dans ce cas il peut y avoir une perte de précision si le type de la destination est plus faible que celui de la source.

Exemple : int i=8 ; float x=12.5 ; double y ;

y = i * x ; - i → est converti en float

- i*x → est converti en double
- affecter le résultat à y

1.4 Les opérateurs standard

Affectation **:** **< *Nom Variable* > = < *Expression* > ;**

Opérateurs arithmétiques

+	addition
-	soustraction
*****	multiplication
/	division (entière et rationnelle!)
%	modulo (reste d'une div. entière)

Opérateurs logiques

&&	et logique (**and**)
||	ou logique (**or**)
!	négation logique (**not**)

Opérateurs de comparaison

==	égal à
!=	différent de
<, <=, >, >=	plus petit que, ...

Remarque : L'opérateur **/** effectue une division entière quand les deux opérandes sont des entiers, en effet 5/2 donne comme résultat 2. Si l'on désire obtenir un résultat réel, on va forcer le type en faisant se que l'on appelle un ***« cast »*** comme suit : (float)5/2 donnera comme résultat 2.5. Et bien sur si l'un des deux opérandes est un réel (ou les deux) le résultat sera un réel (5.0/2 → 2.5).

Opérateurs d'affectation

+=	ajouter à
-=	diminuer de
***=**	multiplier par
/=	diviser par
%=	modulo

X = i++	passe d'abord la valeur de i à X et ***incrémente après***
X = i--	passe d'abord la valeur de i à X et ***décrémente après***
X = ++i	***incrémente d'abord*** et passe la valeur incrémentée à X
X = --i	***décrémente d'abord*** et passe la valeur décrémentée à X

Pour la plupart des expressions de la forme: **expr1 = (expr1) op (expr2)**
Il existe une formulation équivalente: **expr1 op= expr2**
L'affectation **i = i + 2** peut s'écrire **i + = 2**

Les priorités des opérateurs

Priorité 1 (la plus forte):	**()**
Priorité 2:	**! ++ --**
Priorité 3:	*** / %**
Priorité 4:	**+ -**
Priorité 5:	**< <= > >=**
Priorité 6:	**== !=**
Priorité 7:	**&&**
Priorité 8:	**||**
Priorité 9 (la plus faible):	**= += -= *= /= %=**

Exemple récapitulatif :

```
main()
{ int i, j=2 ;  float x=2.5 ;
  i=j+x ;
  x=x+i ;    /*  ici x=6.5 (et non 7) car dans i=j+x  j+x a été convertie en int */
   …
}
main()
{ float x=3/2 ;  /* ici x=1  division entière */
  x=3/2.    /* ici x=1.5   resultat réel */
  …
int a=3, b, c ;
b=++a ;  /*  a=4 , b=4 car on a a=a+1 ; b=a  */
c=b++; /*  c=4, b=5  car on a c=b; b=b+1;  */
…
int a=3, b=4;  float c;
c=a/b;   /* c=0  division entière  */
c=(float)a/b ;  /* c=0.75  */
…
float a=3, b=4, c ;    c=a/b;  /*  c=0.75  */
c=(int)a/b;  /*  c=0  */   …   }
```

1.5 Tableaux et chaînes de caractères

1.5.1 Les tableaux à une dimension

a. Déclaration:

<TypeSimple> <NomTableau> [<Dimension>] ;

Exemples ; int A[25] ; long B[25] ; float F[100] ; double D[100] ; char ch[30] ;

b. Initialisation :

Exemples : int A[5] = {10, 20, 30, 40, 50};
float B[4] = {-1.05, 3.33, 87e-5, -12.3E4};
int C[10] = {1, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 1, 0, 1};

Remarque :

- Il faut évidemment veiller à ce que le nombre de valeurs dans la liste corresponde à la dimension du tableau. Si la liste ne contient pas assez de valeurs pour toutes les composantes, les composantes restantes sont initialisées par zéro.
- Si la dimension n'est pas indiquée explicitement lors de l'initialisation, alors l'ordinateur ***réserve automatiquement*** le nombre d'octets nécessaires.

  Exemple :

  int A[ ] = {10, 20, 30, 40, 50}; ==> Réservation de 5*taille d'un entier

  (Si un entier occupe 2 octets donc pour ce tableau seront réservés10 octets)

Accès aux composantes

En déclarant un tableau par: **int A[5];** Nous avons défini un tableau **A** avec **5** composantes, auxquelles on peut accéder par: **A[0], A[1], ... , A[4]**

1.5.2 Les tableaux à deux dimensions

a. Déclaration :

<TypeSimple> <NomTabl> [<DimLigne>] [<DimCol>] ;

Exemples : int A[10][10] ; long B[10][10] ; float F[10][10] ; double D[10][10] ;
char ch[15][30] ;

b. Mémorisation :

Les composantes d'un tableau à deux dimensions sont stockées ligne par ligne dans la mémoire.

c. Initialisation :

Exemples

int A[3][10] ={ { 0, 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90},
{10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18,19},
{1, 12, 23, 34, 45, 56, 67, 78, 89, 90} };

d. Accès aux composantes :

<NomTableau> [<Ligne>] [<Colonne>] ;

En déclarant un tableau par: **int M[5][3];** Nous avons défini un tableau (matrice) **M** avec **5** lignes et chaque ligne contient **3** composantes, auxquelles on peut accéder par: **M[0][0], M[0][1], ... , M[4][0],...,M[4][2]**

1.5.3 Les Chaînes de caractères :

Il n'existe pas de type spécial *chaîne* ou *string* en C. Une chaîne de caractères est traitée comme un *tableau à une dimension de caractères* (vecteur de caractères).

a. Déclaration :

char <NomVariable> [<Longueur>] ;

Exemples : char NOM [20]; char PRENOM [20]; char PHRASE [300];

Remarque : Lors de la déclaration, nous devons indiquer l'espace à réserver en mémoire pour le stockage de la chaîne. La représentation interne d'une chaîne de caractères est terminée par le symbole **'\0'** (NUL). Ainsi, pour un texte de **n** caractères, nous devons prévoir **n+1** octets.

b. Les chaînes de caractères constantes

Les chaînes de caractères constantes sont indiquées entre guillemets. La chaîne de caractères vide est alors: **""**

"x" est un **tableau de caractères** qui contient deux caractères:
la lettre 'x' et le caractère NUL: '**0**' est codé dans deux octets

'x' est un **caractère** et est codé dans un octet

c. Initialisation de chaînes de caractères :

char CHAINE [ ] = "Salam";

Lors de l'initialisation par **[ ]**, l'ordinateur réserve automatiquement le nombre d'octets nécessaires pour la chaîne, c.-à-d.: le nombre de caractères **+ 1** pour la marque de fin de chaines (ici: 6 octets). Nous pouvons aussi indiquer explicitement le nombre d'octets à réserver, si celui-ci est supérieur ou égal à la longueur de la chaîne d'initialisation.

1.5.4 Tableaux de chaînes de caractères

Un tableau de chaînes de caractères correspond à un tableau à deux dimensions du type **char**, où ***chaque ligne contient une chaîne de caractères***.

a. ***Déclaration*** : La déclaration **char JOUR[7][9];** Réserve l'espace en mémoire pour 7 mots contenant 9 caractères (dont 8 caractères significatifs).

b. **Initialisation :**

```
char JOUR[7][9] = {"dimanche", "lundi", "mardi", "mercredi",  "jeudi",  "vendredi",
                   "samedi"};
```

c. ***Accès aux chaînes*** : Il est possible d'accéder aux différentes ***chaînes de caractères*** d'un tableau, en indiquant simplement la ligne correspondante : JOUR[3] → "mercredi"

Exemple récapitulatif : Initialisation de chaîne de caractère :
Lesquelles des chaînes suivantes sont initialisées correctement ?
Corrigez les déclarations fausses.

a) char a[ ] = "un\ndeux\ntrois\n" ;
b) char b[12] = "un deux trois" ;
c) char c[] = 'abcdefg' ;
d) char d[10] = 'x' ;
e) char e[5] = "cinq" ;
f) char f[] = "Cette " "phrase" "est coupée";
g) char g[2] = { 'a', '\0' };
h) char h[4] = { 'a', 'b', 'c' } ;

Solution

a) char a[] = "un\ndeux\ntrois\n";
Déclaration correcte
b) char b[12] = "un deux trois";
Déclaration incorrecte, la chaîne d'initialisation dépasse le bloc de mémoire réservé.
Correction: char b[14] = "un deux trois"; ou mieux: char b[] = "un deux trois";
c) char c[] = 'abcdefg';
Déclaration incorrecte: Les symboles ' et ‘ encadrent des caractères;

Pour initialiser avec une chaîne de caractères, il faut utiliser les guillemets (ou indiquer une liste de caractères).
Correction: char c[] = "abcdefg";

d) char d[10] = 'x';
Déclaration incorrecte: Il faut utiliser une liste de caractères ou une chaîne pour l'initialisation. Correction: char d[10] = {'x', '\0'} ou mieux: char d[10] = "x";

e) char e[5] = "cinq"; Déclaration correcte ;

f) char f[] = "Cette ", "phrase", "est coupée";
Déclaration incorrecte ; On ne peut affecter plusieurs chaînes séparées ainsi.

g) char g[2] = {'a', '\0'}; Déclaration correcte ;

h) char h[4] = {'a', 'b', 'c'};
Déclaration incorrecte: Dans une liste de caractères, il faut aussi indiquer le symbole de fin de chaîne. Correction: char h[4] = {'a', 'b', 'c', '\0'};

1.6 Actions élémentaires et structures de contrôle

1.6.1 Lire et écrire des données

La bibliothèque standard *<stdio>* contient un ensemble de fonctions qui assurent la communication de la machine avec le monde extérieur telles que : printf (écrire) et scanf (lire). Donc tout programme qui utilise ces fonctions doit être précédé de la directive : ***#include<stdio.h>***

a) printf( ) : ***printf ("<format>",<Expr1>,<Expr2>, ...) ;***

La partie "***<format>"*** est une chaîne de caractères qui peut contenir du texte, des séquences d'échappement, des spécificateurs de format.

Les ***spécificateurs de format*** indiquent la manière dont les valeurs des expressions sont affichées et commencent toujours par % et se terminent par un ou deux caractères. La partie "<format>" contient ***exactement un*** spécificateur de format pour chaque expression.

- Spécificateurs de format pour printf

%d ou %i	int	entier relatif
%u	int	entier naturel (unsigned)
%c	int	caractère
%l	long	entier long
%f	double	rationnel en notation décimale
%e	double	rationnel en notation scientifique
%s	char*	chaîne de caractères

Exemples :

(1) La suite d'instructions: int A = 12; int B = 5;
printf("%i fois %iest %i\n", A, B, A*B);
Va afficher sur l'écran: 12 fois 5 est 60

(2) char JOUR[7][9]= {"dimanche","lundi", "mardi", "mercredi", "jeudi", "vendredi", "samedi"};
int i = 4; printf("Aujourd'hui, c'est %s !\n", JOUR[i]);
Affichera la phrase : Aujourd'hui, c'est jeudi !

- Les séquences d'échappement

\a	sonnerie	****	trait oblique
\b	curseur arrière	**\?**	point d'interrogation
\t	tabulation	**\'**	apostrophe
\n	nouvelle ligne	**\"**	guillemets
\r	retour au début de ligne	**\f**	saut de page (imprimante)
\0	NUL	**\v**	tabulateur vertical

b) scanf() : ***scanf("<format>",<AdrVar1>,<AdrVar2>, ...) ;***

La chaîne de format détermine comment les données lues doivent être interprétées.
Les données lues correctement sont mémorisées successivement aux ***adresses*** **<AdrVar1>,...**

L'adresse d'une variable est indiquée par le nom de la variable précédé du signe **&**.

Exemples **:**

(1) int Jour, Mois, Annee;

scanf("%i %i %i", &Jour, &Mois, &Annee); →Lit trois entiers relatifs et les valeurs sont attribuées respectivement aux trois variables **Jour**, **Mois** et **Annee**.

(2) #inlude<stdio.h>

main()

{ int a, b, res ; printf(" Donner 2 valeurs entières\n ") ;
scanf("%d %d",&a,&b); res=a*b ;
printf("%d fois %d = %d",a,b,res); }

1.6.2 Les fonctions puts et gets

Comme nous l'avons déjà vu, la bibliothèque *<stdio>* nous offre des fonctions qui effectuent l'entrée et la sortie des données. A côté des fonctions printf et scanf que nous connaissons déjà, nous y trouvons les deux fonctions puts et gets, spécialement conçues pour l'écriture et la lecture.

- **puts :**

puts est idéale pour écrire une chaîne constante ou le contenu d'une variable.

Syntaxe: **puts(<Chaîne>)**

puts écrit la chaîne de caractères désignée par <Chaîne> sur *l'écran* et provoque un retour à la ligne.

puts(TXT); est équivalent à **printf("%s\n",TXT);**

Exemples

```
char TEXTE[ ] = "Voici une première ligne.";
puts(TEXTE);
puts("Voici une deuxième ligne.");
```

- **gets**

gets est idéal pour lire une ou plusieurs lignes de texte (p.ex. des phrases) terminées par un retour à la ligne.

Syntaxe: **gets(<Chaîne>)**

gets lit une ***ligne*** de caractères et la copie à l'adresse indiquée par <Chaîne>. Le retour à la ligne final est remplacé par le symbole de fin de chaîne **'\0'**.

Exemple :

```
int MAXI = 1000;
char LIGNE[MAXI];
gets(LIGNE);
```


Important : scanf avec le spécificateur **%s** permet de lire ***un seul mot***.

Exemples :

```
char LIEU[25];
int JOUR, MOIS, ANNEE;
printf("Entrez lieu et date de naissance : \n");
scanf("%s %d %d %d", LIEU, &JOUR, &MOIS, &ANNEE);
```

Remarque :

La fonction **scanf** a besoin des ***adresses de ses arguments:*** Les noms des variables numériques (**int**, **char**, **long**, **float**, ...) doivent être marqués par le symbole **'&',** Comme le nom d'une chaîne de caractères est le représentant de l'adresse du premier caractère de la chaîne, ***il ne doit pas être précédé de l'opérateur adresse '&' !***

1.6.3 Les structures de contrôle :

1.6.3.1 L'instruction conditionnelle IF

a) if - else

```
if ( <expression> )
        <bloc d'instructions 1> ;
    else
        <bloc d'instructions 2> ;
```

Exemple

```
if (a > b)
  max = a;
else
  max = b;
```

b) if sans else

```
if ( <expression> )
                <bloc d'instructions> ;
```

Exemple :

```
i) if (N>0)
     if (A>B) MAX=A;
     else   MAX=B;
```

(ou bien)

```
ii) if (N>0)
      if (A>B)  MAX=A;
      else   MAX=B;
```


Pour N=0, A=1 et B=2,

* dans la première interprétation (i), MAX reste inchangé,

* dans la deuxième interprétation (ii), MAX obtiendrait la valeur de B.

En C le « else » est toujours lié au dernier if. Pour éviter des confusions, il est recommandé d'utiliser des accolades **{ }**.

Exemple

Pour forcer la deuxième interprétation de l'expression ci-dessus, nous pouvons écrire:

```
if (N>0)
  {  if (A>B)      MAX=A;   }
else   MAX=B;
```

c) if - else if - ... - else

```
if ( <expr1> )     <bloc1>;
   else if (<expr2>)   <bloc2>;
        else if (<expr3>)    <bloc3>;
             else if (<exprN>)    <blocN>;
                  else <blocN+1> ;
```

Les opérateurs conditionnels : **<expr1> ? <expr2> : <expr3> ;**

* Si <expr1> fournit une valeur différente de zéro, alors la valeur de <expr2> est le résultat

* Si <expr1> fournit la valeur zéro, alors la valeur de <expr3> est le résultat

Exemple : if (A>B) MAX=A; else MAX=B;

Peut être remplacée par: MAX = (A > B) ? A : B;

1.6.3.2 L'instruction switch

```
switch (expression)
   { case constante-1 : <instruction-1>;break;
     case constante-2 : <instruction-2>;break;
        ...
     case constante-n : <instruction-n>;break;
     default: <instruction n+1>;
   }
```


Remarque : **break** permet de sortir du switch

Exemple : switch (operateur)

```
{ case '+'   :  s=a+b ; break ;
  case '-'   :  s=a-b;  break;
  case '*'   :  s=a*b;  break;
  case '/'   :  if (b!=0) s=a/b;
                else printf("division par zero");
                break;
  default    : printf("erreur");
}
```

1.6.3.3 Les instructions iterative : while, do-while, for

- while:

```
while ( <expression> )
    {  <bloc d'instructions> ;  }
```

Exemple

```
/* Afficher les nombres de 0 à 9 */
int i = 0;
while (i<10)
    {   printf("%d \n", i);   i++;  }
```

- do – while

La structure **do - while** est semblable à la structure **while**, avec la différence suivante :

- **while** évalue la condition ***avant*** d'exécuter le bloc d'instructions,
- **do - while** évalue la condition ***après*** avoir exécuté le bloc d'instructions. Ainsi le bloc d'instructions est exécuté au moins une fois.

```
do
    {  <bloc d'instructions>;  }
while ( <expression> );
```


Exemple: lire un ensemble de caractères jusqu'à la rencontre d'un point et compter le nombre de 'e' et 'E'.

```
#include<stdio.h>
main()
{ char car; int  cpt=0;
do
  {  scanf("%c", &car);
     if (car=='e' || car=='E') cpt++ ;
  }
while (car !='.');
printf("Le nombre de 'e' et 'E' = %d ",cpt);
}
```

- for :

```
for ( <expr1> ; <expr2> ; <expr3> )
    {   <bloc d'instructions>;  }
```

<expr1> est évaluée une fois avant le passage de la boucle. Elle est utilisée pour initialiser les données de la boucle.

<expr2> est évaluée avant chaque passage de la boucle. Elle est utilisée pour décider si la boucle est répétée ou non.

<expr3> est évaluée à la fin de chaque passage de la boucle. Elle est utilisée pour réinitialiser les données de la boucle.

***Exemples* :**

(1)int i; / Calcul et affichage du carré des 20 premiers nombres * /*
for (i=1 ; i<=20 ; i++)
*printf("Le carré de %d est %d \n", i, i*i);*

(2)/* Affichage et Lecture des éléments d'un tableau à une dimension */

```
main()
{ int A[5];
  int i;  /* Compteur */
  for (i=0; i<5; i++)
      scanf("%d", &A[i]);
  for (i=0; i<5; i++)
      printf("%d ", A[i]); ou bien  printf("%d\t", A[i]); /* tabulateur */
}
```


(3)/* Affichage des éléments d'un tableau à deux dimensions (Matrice) ***/**

```
main()
{ long  A[10][20];  int i,j;
 /* Pour chaque ligne ... */
 for (i=0; i<10; i++)
   { for (j=0; j<20; j++)     /* considérer chaque composante*/
            printf("%d", A[i][j]);
     printf("\n");  /* Retour à la ligne */
   }
}
```

1.6.4 Quelques bibliothèques de fonctions :

a. Les fonctions de <math.h>

exp(X)	fonction exponentielle
log(X)	logarithme naturel
log_{10}(X)	logarithme à base 10
pow(X,Y)	X exposant Y
sqrt(X)	racine carrée de X

fabs(X)	valeur absolue de X
floor(X)	arrondir en moins
ceil(X)	arrondir en plus
fmod(X,Y)	reste rationnel de X/Y (même signe que X)

sin(X) cos(X) tan(X)	sinus, cosinus, tangente de X
asin(X) acos(X) atan(X)	arcsin(X), arccos(X), arctan(X)
sinh(X) cosh(X) tanh(X)	sinus, cosinus, tangente hyperboliques de X

b. Les fonctions de <string.h>

Dans le tableau suivant, <n> représente un nombre du type **int**. Les symboles <s> et <t> peuvent être remplacés par :

- une chaîne de caractères constante
- le nom d'une variable déclarée comme tableau de **char**
- un pointeur sur **char**

strlen(<s>)	fournit la longueur de la chaîne ***sans*** compter le '\0' final
strcpy(<s>, <t>)	copie <t> vers <s>
strcat(<s>, <t>)	ajoute <t> à la fin de <s>
strcmp(<s>, <t>)	compare <s> et <t> lexicographiquement et fournit un résultat: - négatif si <s> précède <t> - zéro si <s> = à <t> - positif si <s> suit <t>
strncpy(<s>, <t>, <n>)	copie au plus <n> caractères de <t> vers <s>
strncat(<s>, <t>, <n>)	ajoute au plus <n> caractères de <t> à la fin de <s>
Strchr(<s>,<c>)	la recherche d'un caractère c dans une chaine s et retourne son adresse dans s
Strstr(<s1>,<s2>)	la recherche d'une sous-chaine s2 dans la chaine S1 et retourne l'adresse de s2 dans s1

c. Les fonctions de <stdlib.h>

La bibliothèque <*stdlib*> contient des déclarations de fonctions pour la conversion de nombres en chaînes de caractères et vice-versa.

Conversion de chaînes de caractères en nombres

atoi(<s>) retourne la valeur numérique représentée par <s> comme **int**

atol(<s>) retourne la valeur numérique représentée par <s> comme **long**

atof(<s>) retourne la valeur numérique représentée par <s> comme **double** (!)

Règles générales pour la conversion:

- Les espaces au début d'une chaîne sont ignorés
- Il n'y a pas de contrôle du domaine de la cible
- La conversion s'arrête au premier caractère non convertible
- Pour une chaîne non convertible, les fonctions retournent zéro

Conversion de nombres en chaînes de caractères

itoa (<n_int>, <s>, <b>)

ltoa (<n_long>, <s>, <b>)

ultoa (<n_uns_long>, <s>, <b>)

d. Les fonctions de <ctype>

Les fonctions de ***classification*** suivantes fournissent un résultat du type **int** différent de zéro, si la condition respective est remplie, sinon zéro.

La fonction:	retourne une valeur différente de zéro,
isupper(<c>)	si <c> est une majuscule **('A'...'Z')**
islower(<c>)	si <c> est une minuscule **('a'...'z')**
isdigit(<c>)	si <c> est un chiffre décimal **('0'...'9')**
isalpha(<c>)	si **islower(<c>)** ou **isupper(<c>)**
isalnum(<c>)	si **isalpha(<c>)** ou **isdigit(<c>)**
isxdigit(<c>)	si <c> est un chiffre hexadécimal (**'0'...'9'** ou **'A'...'F'** ou **'a'...'f'**)
isspace(<c>)	si <c> est un signe d'espacement (**' '**, **'\t'**, **'\n'**, **'\r'**, **'\f'**)

Les fonctions de ***conversion*** suivantes fournissent une valeur du type **int** qui peut être représentée comme caractère; la valeur originale de <c> reste inchangée:

tolower(<c>) retourne <c> converti en minuscule si <c> est une majuscule

toupper(<c>) retourne <c> converti en majuscule si <c> est une minuscule

2. Définition de types et de structures

2.1 Définition de types

La définition de types doit se faire à l'extérieure de toutes les fonctions.

Pour alléger l'écriture des programmes on peut affecter un nouvel identificateur à un type composé à l'aide de l'instruction **typedef :**

```
typedef   <type>  <définition> ;
```

Exemple:

```
# define max 100
typedef  int tab[max];
typedef  char chaine[20];
…
main()
{  tab T1, T2;
   chaine  s1, s2 ;
…
}
```


L'instruction ***typedef*** est utilisée tout particulièrement avec les structures présentées dans la section suivante.

2.2 Les structures

Une structure (ou enregistrement) permet de regrouper plusieurs variables de types différents (appelées champs) et de leur donner un nom.

a. Déclaration de structures

Syntaxe :

```
typedef struct  {  type-1 champ-1 ;
                   type-2 champ-2 ;
                        …
                   type-n champ-n
                } <nom de la structure>;
```

***Exemple* :**

```
typedef struct
{ char  Nom[20], Prenom[20];
  int  Age;
  float Taille;
} personne ;
```

Remarques *:*

- Une telle déclaration définit un modèle d'objet. Elle n'engendre pas de réservation mémoire.
- Dans une structure, tous les noms de champs doivent être distincts. Par contre rien n'empêche d'avoir 2 structures avec des noms de champs en commun, l'ambiguïté sera levée par la présence du nom de la structure concernée.

b. Accès à un champ

Syntaxe : **<ident_objet_struct> . <ident_champ>**

L'opérateur d'accès est le symbole **"."** (Point) placé entre l'identificateur de la structure et l'identificateur du champ désigné.

Exemple :

```
main( )
{ personne P ;
... P.Age = 45;...
}
```

c. Utilisation des structures

exemple :

```
typedef struct
{       char nom[20], prenom[20];
        int age;
        float note;
} fiche;
```

On déclare des variables par exemple :

```
fiche f1,f2;
strcpy(f1.nom,"Badi");
strcpy(f1.prenom,"Ali");
f1.age = 20;   f1.note = 11.5;
```

Remarque :

- L'affectation globale est possible avec les structures, on peut écrire: **f2 = f1;**
- Par contre on ne peut pas comparer deux structures (il faut comparer champ par champ)

d. Structurer les données

Exemple :

```
typedef struct   { int Jour,Mois,Annee; } Date;
typedef struct  {  char Nom[20], Adresse[30];
                   Date Naissance;
                }; personne ;
personne P ;
```

On peut alors écrire : if (P.Naissance.Jour = = 20) ...

e. Tableaux de structures

Exemple :

```
typedef struct   { int Jour,Mois,Annee; } Date;

typedef struct  {  char Nom[20], Adresse[30];
                   Date Naissance;
                }; personne ;
personne T[20] ;
```

3. Les fonctions

3.1 Définition et déclaration de fonctions

a) Définition d'une fonction en C

```
<TypeRés> <NomFonct> (<TypePar1><NomPar1>, <TypePar2> <NomPar2>, ... )
  {
   <déclarations locales>
   <instructions>
  }
```

Attention ! *Si nous choisissons un nom de fonction qui existe déjà dans une bibliothèque, notre fonction* ***cache*** *la fonction prédéfinie.*

b) Important

- Une fonction peut fournir comme résultat:
  - un type arithmétique,
  - une structure (définie par **struct**),
  - un pointeur, (sera défini au chapitre suivant)
  - **void** (la fonction correspond alors à une "***procédure***"). Si une fonction ne fournit pas de résultat, il faut indiquer **void** comme type du résultat. En C, il n'existe pas de structure spéciale pour la définition de *procédures* comme en Pascal et en langage algorithmique.
- Si une fonction n'a pas de paramètres, on peut déclarer la liste des paramètres comme **(void)** ou simplement comme **()**.
- Une fonction **ne peut pas** fournir comme résultat des tableaux, des chaînes de caractères ou des fonctions. (***Attention:*** Il est cependant possible de renvoyer un pointeur sur le premier élément d'un tableau ou d'une chaîne de caractères.)
- Il est interdit de définir des fonctions à l'intérieur d'une autre fonction (comme en Pascal).

3.2 Renvoyer un résultat

Par définition, toutes les fonctions fournissent un résultat d'un type que nous devons déclarer. Une fonction peut renvoyer une valeur d'un type simple ou l'adresse d'une variable ou d'un tableau en utilisant la commande **return.**

L'instruction **return <expression>;** a les effets suivants:

- évaluation de l'<expression>
- conversion automatique du résultat de l'expression dans le type de la fonction
- renvoi du résultat
- terminaison de la fonction

Exemple :

```
int   somme ( )                    /* ou bien  */  int somme( )
{  int a=1276, b=498, s ;                          { int a=1276, b=498;
   s=a+b ;                                           return( a+b);  }
   return(s) ;  }
```

Remarque :

Si nous quittons une fonction (d'un type différent de **void**) sans renvoyer de résultat à l'aide de **return**, la valeur transmise à la fonction appelante est indéfinie. Le résultat d'une telle action est imprévisible.

3.3 L'appel d'une fonction :

- La fonction ne retourne pas de résultat par son nom (procédure)

Syntaxe : ***nom_fonction (var1, var2,…) ;***

(var1, var2, …) : représente la liste des paramètres ***effectifs*** (paramètres d'appels) qui doivent correspondre en type, en nombre et dans l'ordre à la liste des paramètres ***formels***.

Exemple :

```
#include<stdio.h>
somme()
{ int a=1276, b=498,s ;
   s=a+b;  printf("La somme=%d",s) ;
}
main()
{  …  somme();  …  }
```

- La fonction retourne un résultat dans son nom, elle peut être affectée à une variable de même type :

Syntaxe: ***x = nom_fonction (var1, var2, …);***

Exemple :

```
int   somme ()
{  int a=1276, b=498, s ;
   s=a+b;
   return(s);
}
main()
{
   printf("somme= %d", somme());
}
```

```
int   somme ( )  /* ou bien  */
{  int a=1276, b=498 ;
   return(a+b) ;
}

main()
{ int res ;
  res=somme() ;
  printf("somme= %d", res);
}
```

3.4 Variables locales

Les variables déclarées dans un bloc d'instructions sont *uniquement visibles à l'intérieur de ce bloc*. On dit que ce sont des ***variables locales*** à ce bloc.

Exemple

La déclaration de la variable i se trouve à l'intérieur d'un bloc d'instructions conditionnel. Elle n'est pas visible à l'extérieur de ce bloc, ni même dans la fonction qui l'entoure.

```
...
if   (N>0)  {   int i;   for (i=0; i<N; i++)     ...  }
```


3.5 Variables globales

Les variables déclarées au début du fichier, à l'extérieur de toutes les fonctions *sont disponibles à toutes les fonctions du programme*. Ce sont alors des ***variables globales***. En général, les variables globales sont déclarées immédiatement derrière les instructions **#include** au début du programme.

Exemple

La variable S est déclarée globalement pour pouvoir être utilisée dans les procédures A et B.

```
#include <stdio.h>
int S;
void A(...)
{  ... if (S>0)   S--;
      else     ...
}
void B(...)
{ ... S++;  ...  }
```

3.6 Paramètres d'une fonction

Les paramètres ou arguments sont les 'boîtes aux lettres' d'une fonction. Elles acceptent les données de l'extérieur et déterminent les actions et le résultat de la fonction. Techniquement, nous pouvons résumer le rôle des paramètres en C de la façon suivante:

Les paramètres d'une fonction sont simplement des variables locales qui sont initialisées par les valeurs obtenues lors de l'appel.

Lors d'un appel, le nombre et l'ordre des paramètres doivent nécessairement correspondre aux indications de la déclaration de la fonction. Les paramètres sont **automatiquement convertis** dans les types de la déclaration avant d'être passés à la fonction.

Exemple
Le prototype (voir §3.7) de la fonction **pow** (bibliothèque <*math*>) est déclaré comme suit: **double pow (double, double);**
Au cours des instructions, **int A, B; ... A = pow (B, 2);**
Nous assistons à trois conversions automatiques: avant d'être transmis à la fonction, la valeur de B est convertie en **double**; la valeur 2 est convertie en 2.0.
Comme **pow** est du type **double**, le résultat de la fonction doit être converti en **int** avant d'être affecté à A.

Evidemment, il existe aussi des fonctions qui fournissent leurs résultats ou exécutent une action sans avoir besoin de données. La liste des paramètres contient alors la déclaration **void** ou elle reste vide (exp.: **double PI(void)** ou **double PI( )**).

3.6.1 Passage des paramètres par valeur

En C, le passage des paramètres se fait toujours par la valeur, c.-à-d. les fonctions n'obtiennent que les ***valeurs*** de leurs paramètres et n'ont pas d'accès aux variables elles-mêmes.
Les paramètres d'une fonction sont à considérer comme des ***variables locales*** qui sont initialisées automatiquement par les valeurs indiquées lors d'un appel.
A l'intérieur de la fonction, nous pouvons donc changer les valeurs des paramètres sans influencer les valeurs originales dans les fonctions appelantes.

Exemple

La fonction ETOILES dessine une ligne de N étoiles. Le paramètre N est modifié à l'intérieur de la fonction:

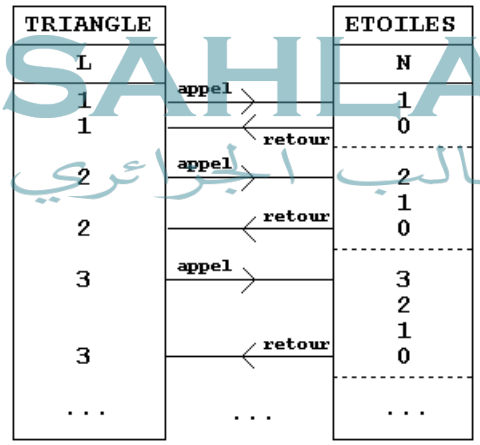
```
void ETOILES(int N)
{ while (N>0) { printf("*"); N--; }
  printf("\n");
}
```

La fonction TRIANGLE, appelle la fonction ETOILES en utilisant la variable L comme paramètre:

```
void TRIANGLE(void)
{ int L; for (L=1; L<10; L++)  ETOILES(L); }
```

Au moment de l'appel, la *valeur* de L est copiée dans N. La variable N peut donc être décrémentée à l'intérieur de ETOILES, sans influencer la valeur originale de L.

Schématiquement, le passage des paramètres peut être représenté comme suit:



3.6.2 Passage de l'adresse d'une variable

Pour changer la valeur d'une variable de la fonction appelante, nous allons procéder comme suit:

- la fonction appelante doit ***fournir l'adresse de la variable*** *(paramètre effectif)* en utilisant le symbole **&** et,
- la fonction appelée doit ***déclarer le paramètre formel*** comme *Pointeur*[1] en utilisant le symbole ***** qui signifie le contenu de l'adresse.

On peut alors atteindre la variable à l'aide de l'adresse.

[1] Défini dans le chapitre suivant

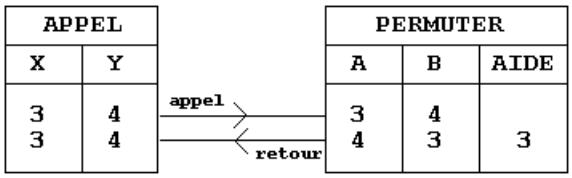
Exemple :

Nous voulons écrire une fonction PERMUTER qui échange le contenu de deux variables du type **int**. En première approche, nous écrivons la fonction suivante:

void PERMUTER (int A, int B)
{ int AIDE; AIDE = A; A = B; B = AIDE; }

Nous appelons la fonction pour deux variables X et Y par: **PERMUTER(X, Y);**
Résultat: X et Y restent inchangés !

Explication: Lors de l'appel, les *valeurs* de X et Y sont copiées dans les paramètres A et B. PERMUTER échange bien le contenu des variables *locales* A et B, mais les valeurs de X et Y restent les mêmes.



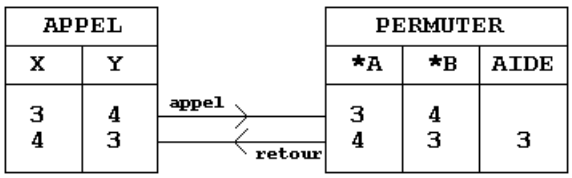
Pour pouvoir modifier le contenu de X et de Y, la fonction PERMUTER a besoin des adresses de X et Y. Nous réécrivons alors la fonction comme suit:

void *PERMUTER* (int *A, int *B)
{ int AIDE; AIDE = *A; *A = *B; *B = AIDE; }

Nous appelons la fonction par: ***PERMUTER*(&X, &Y);**

Résultat: Le contenu des variables X et Y est échangé !

Explication: Lors de l'appel, les *adresses* de X et de Y sont copiées dans A et B. PERMUTER échange ensuite le contenu des adresses indiquées par A et B. C'est-à-dire échange *A et *B (contenu de A et contenu de B)



3.7 Déclaration globale des fonctions

Il faut déclarer chaque fonction avant de pouvoir l'utiliser. Si dans le texte du programme la fonction **est définie** avant son premier appel, elle n'a pas besoin d'être déclarée.
En déclarant toutes les fonctions globalement au début du texte du programme, nous ne sommes pas forcés de nous occuper de la dépendance entre les fonctions. Cette solution est la plus simple et la plus sûre pour des programmes complexes contenant une grande quantité de dépendances. Il est quand même recommandé de définir les fonctions selon l'ordre de leur hiérarchie.

Prototype d'une fonction
Pour déclarer globalement une fonction il faut donner le ***prototype*** de la fonction qui indique uniquement le type des données transmises et reçues par la fonction.

<TypeRés> <NomFonct> (<TypePar1>, <TypePar2>, ...); ou bien
<TypeRés> <NomFonct> (<TypePar1><NomPar1>,<TypePar2> <NomPar2>, ...);

Exemple :

```
#include<stdio.h>
void  affichesom (int  , int  );  /* prototype */
void affichediff (int  ,  int  ) ; /* prototype */
void main()
{ int x,y ;
  scanf("%d %d",&x,&y) ;
  …
}
void affichesom(int x, int y)
{    printf("La somme = %d",x+y) ;  }
void affichediff(int x, int y)
{    printf("La difference=%d",x-y) ;  }
```

3.8 Passage de structures comme argument de fonctions

- On peut transférer une structure entière comme argument d'une fonction.
- Une fonction peut retourner une structure.

Exemple :

```
/* Une fonction qui permute deux dates */
typedef  struct  { int Jour, Mois, Annee; } Date;

void permuter(Date *D1, Date *D2)
{ Date   D=*D1 ;
       *D1=*D2 ;
       *D2=D ;
}
/*   Une fonction qui retourne la date du lendemain  */
Date dateLendemain(Date D)
{  Date DLend;
   ...
  return DLend;
}
```

4. LES POINTEURS

4.1 Définition: *Un **pointeur** est une variable spéciale qui peut contenir l'**adresse** d'une autre variable.*

En C, chaque pointeur est limité à un type de données. Il peut contenir l'adresse d'une variable simple de ce type ou l'adresse d'une composante d'un tableau de ce type.

Si un pointeur P contient l'adresse d'une variable A, on dit que ***'P pointe sur A'***.

4.2 Déclaration d'un pointeur

<Type> *<NomPointeur>

4.3 Les opérateurs de base

Lors du travail avec des pointeurs, nous avons besoin

- d'un opérateur *'adresse de'*: **&** pour obtenir l'adresse d'une variable.
- d'un opérateur *'contenu de'*: ***** pour accéder au contenu d'une adresse.
- d'une syntaxe de déclaration pour pouvoir déclarer un pointeur.

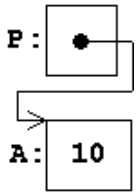
L'opérateur 'adresse de' : &

&<NomVariable> fournit l'adresse de la variable <NomVariable>

Représentation schématique

Soit **P** un pointeur non initialisé, et **A** une variable (du même type) contenant la valeur 10 :

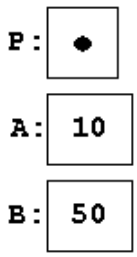
Alors l'instruction **P = &A;** affecte l'adresse de la variable A à la variable P. Dans notre représentation schématique, nous pouvons illustrer le fait que « P pointe sur A » par une flèche :



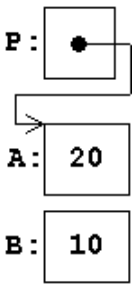
L'opérateur 'contenu de' : *

***<NomPointeur>** désigne le contenu de l'adresse référencée par le pointeur <NomPointeur>

Exemple : Soit A une variable contenant la valeur 10, B une variable contenant la valeur 50 et P un pointeur non initialisé:



Après les instructions :
P = &A; P pointe sur A
B = *P; le contenu de A (Référencé par *P) est affecté à B
***P = 20;** le contenu de A (Référencé par *P) est mis à 20.



4.4 Les opérations élémentaires sur pointeurs

En travaillant avec des pointeurs, nous devons observer les règles suivantes:

Priorité de * et &

- Les opérateurs ***** et **&** ont la même priorité que les autres opérateurs unaires (la négation **!**, l'incrémentation **++**, la décrémentation **--**). Dans une même expression, les opérateurs unaires *, &, !, ++, -- sont évalués de droite à gauche.

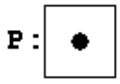
Exemple Après l'instruction **P = &X;** les expressions suivantes, sont équivalentes:

Y = *P+1	**Y = X+1**
***P = *P+10**	**X = X+10**
***P += 2**	**X += 2**
Y=++*P	**Y=++X** (incrémente puis affecte)
Y=(*P)++	**Y=X++** (affecte puis incrémente)

Dans le dernier cas, les parenthèses sont nécessaires. Comme les opérateurs unaires * et ++ sont évalués *de droite à gauche*, sans les parenthèses le *pointeur* P serait incrémenté, *non pas l'objet* sur lequel P pointe. On peut uniquement affecter des adresses à un pointeur.

Le pointeur NULL

La valeur NULL est utilisée pour indiquer qu'un pointeur ne pointe 'nulle part'.



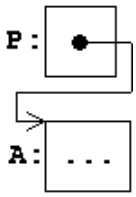

```
int *P;
P = NULL;
```

Remarque : Les pointeurs sont aussi des variables et peuvent être utilisés comme telles. Soient P1 et P2 deux pointeurs sur **int**, alors l'affectation **P1 = P2;** copie le contenu de P2 vers P1 alors P1 pointe sur le même objet que P2.

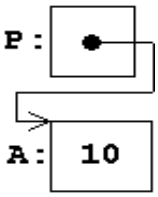
Résumé :

Après les instructions:

int A; int *P; P = &A;



***P=10 ;**



A désigne le contenu de A

&A désigne l'adresse de A

En outre

P désigne l'adresse de A

***P** désigne le contenu de A

&P désigne l'adresse du pointeur P

***A** est illégal (puisque A n'est pas un pointeur)

4.5 Pointeurs et fonctions

- Passage par adresse

Exemple : *scanf ("%d %d", &x,&y) ;*

*void permuter(int *a, int *b) Appel permuter(&x, &y) ;*

4.6 Pointeurs et tableaux

Comme nous l'avons déjà constaté, le nom d'un tableau représente l'adresse de son premier élément. En d'autre termes: **&tableau[0]** et **tableau** sont une seule et même adresse.

Il faut retenir donc que :

- ***le nom d'un tableau est un pointeur constant sur le premier élément du tableau.***

  Soit A le nom d'un tableau alors :

A+0 désigne &A[0]
A+1 désigne &A[1]
…
A+i désigne &A[i]

- ***Si P est un pointeur sur un tableau A, l'instruction P=A*** est équivalente à **&A[0]** alors :

P désigne &A[0]
P+1 désigne &A[1]
P+2 désigne &A[2]
…
P+i désigne &A[i]

et **P* désigne le contenu de l'élément pointé par *P*.

*P	désigne A[0]
*(P+1)	désigne A[1]
*(P+2)	désigne A[2]
…	
*(P+i)	désigne A[i]

- ***Si P pointe sur une composante quelconque d'un tableau, alors P+1 pointe sur la composante suivante***

  Plus généralement,

  P+i pointe sur la **i**ème composante derrière **P** et

  P- i pointe sur la **i**ème composante devant **P**.

Exemple : En déclarant un tableau **A** de type **int** et un pointeur **P** sur **int :**
int A[10]; int *P;
Ainsi, après les instructions :
P = A; le pointeur **P** pointe sur **A[0]** est équivalent à P=&A[0] **et** P=A+0
***P = 3;** le contenu de **P** reçoit **3** est équivalent à A[0]=3

Autre Exemple
Soit **A** un tableau contenant des éléments du type **float** et ***P*** un pointeur sur **float**:
float A[20], X;
float *P;
Après les instructions,
P = A;
X = *(P+9); X contient la valeur du 10ème élément de **A**, (c.-à-d. celle de A[9]).

Important :
Il existe toujours une différence essentielle entre un pointeur et le nom d'un tableau:
- ***Un pointeur est une variable***, donc des opérations comme **P = A** ou **P++** sont permises.
- ***Le nom d'un tableau est une constante***, donc des opérations comme **A = P** ou **A++** sont impossibles, au même titre que 3++.

Exemple
Les deux programmes suivants copient les éléments positifs d'un tableau T dans un deuxième tableau POS.

Formalisme tableau
```
#include<stdio.h>
#include<conio.h>
main()
{ int T[10] ,n, Pos[10], i, j ;
  scanf("%d",&n);
for(i=0;i<n;i++) scanf("%d", &T[i]);

for (j=0,i=0 ; i<n ; i++)
    if (T[i]>0)  {  Pos[j] = T[i];  j++;  }
for(i=0; i<j; i++) printf("%d", Pos[i]);
}
```

Formalisme pointeur
```
#include<stdio.h>
#include<conio.h>
main()
{ int T[10] ,n, Pos[10], i, j ;
  scanf("%d",&n);
for(i=0;i<n;i++) scanf("%d", T+i);

for (j=0,i=0 ; i<n ; i++)
    if (*(T+i)>0)
      { *(Pos+j) = *(T+i);  j++;  }
for(i=0;  i<j;  i++)  printf("%d",
*(Pos+i));
}
```

4.7 Arithmétique des pointeurs

- Affectation par un pointeur sur le même type

Soient P1 et P2 deux pointeurs sur le même type de données, alors l'instruction **P1=P2;** fait pointer P1 sur le même objet que P2.

- Addition et soustraction d'un nombre entier

Si P pointe sur l'élément A[i] d'un tableau, alors

P+n pointe sur A[i+n]

P-n pointe sur A[i-n]

Exemple : p=A ; ou bien p=&A[0]
p=p+9 → p pointe sur A[9]
p=p-1 → p pointe sur A[8]

- Incrémentation et décrémentation d'un pointeur

Si P pointe sur l'élément A[i] d'un tableau, alors après l'instruction

P++; P pointe sur A[i+1]

P+=n; P pointe sur A[i+n]

P--; P pointe sur A[i-1]

P-=n; P pointe sur A[i-n]

Exemple : Initialiser un tableau avec des 1

```
int  t[10], i ;                    int t[10], *p;
for(i=0 ;i<10 ;i++)                for(p=t ;p<t+10 ;p++)
      t[i]=1 ; // oubien  *(t+i)=1        *p=1;
```


Domaine des opérations

L'addition, la soustraction, l'incrémentation et la décrémentation sur les pointeurs sont seulement définies ***à l'intérieur d'un tableau***. Si l'adresse formée par le pointeur et l'indice sort du domaine du tableau, alors le résultat n'est pas défini.

- Soustraction de deux pointeurs

Soient P1 et P2 deux pointeurs qui pointent *dans le même tableau*:

P1-P2 fournit le nombre de composantes comprises entre P1 et P2.

Le résultat de la soustraction **P1-P2** est

- négatif, si P1 précède P2
- zéro, si P1 = P2
- positif, si P2 précède P1
- indéfini, si P1 et P2 ne pointent pas dans le même tableau

Plus généralement, la soustraction de deux pointeurs qui pointent dans le même tableau est équivalente à la soustraction des indices correspondants.

- Comparaison de deux pointeurs

On peut comparer deux pointeurs par **<**, **>**, **<=**, **>=**, **==**, **!=**.

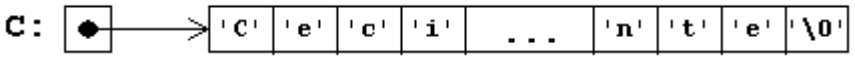
La comparaison de deux pointeurs qui pointent *dans le même tableau* est équivalente à la comparaison des indices correspondants. (Si les pointeurs ne pointent pas dans le même tableau, alors le résultat est donné par leurs positions relatives dans la mémoire).

4.8 Pointeurs et chaînes de caractères

a) Affectation

On peut attribuer *l'adresse d'une chaîne de caractères constante* à un pointeur sur **char**:

Exemple : **char *C; //** C est un pointeur sur **1** ou plusieurs caractères (chaine)
C = "Ceci est une chaîne de caractères constante";



Nous pouvons lire cette chaîne constante (p.ex: pour l'afficher), mais il n'est pas recommandé de la modifier, parce que le résultat d'un programme qui essaie de modifier une chaîne de caractères constante n'est pas prévisible.

b) Initialisation

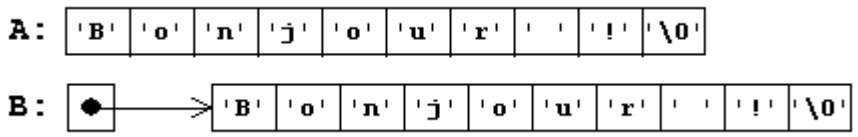
Un pointeur sur **char** peut être initialisé lors de la déclaration si on lui affecte l'adresse d'une chaîne de caractères constante: **char *B = "Bonjour !";**

Attention ! Il existe une différence importante entre les deux déclarations:

```
char A[ ] = "Bonjour !";   /* un tableau  */
char *B  = "Bonjour !";   /* un pointeur */
```

A est un tableau qui a exactement la grandeur pour contenir la chaîne de caractères et la terminaison '\0'. Les caractères de la chaîne peuvent être changés, mais le nom **A** va toujours pointer sur la même adresse en mémoire.

B est un pointeur qui est initialisé de façon à ce qu'il pointe sur une chaîne de caractères constante stockée quelque part en mémoire. Le pointeur peut être modifié et pointer sur autre chose. ***La chaîne constante peut être lue, copiée ou affichée, mais pas modifiée.***

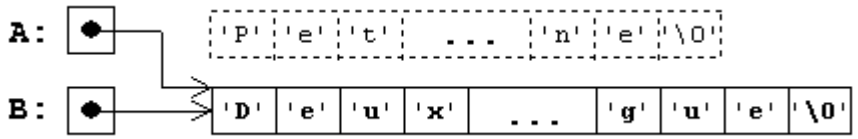


c) Modification

Si nous affectons une nouvelle valeur à un pointeur sur une chaîne de caractères constante, nous risquons de perdre la chaîne constante. D'autre part, un pointeur sur **char** a l'avantage de pouvoir pointer sur des chaînes de n'importe quelle longueur (allocation dynamique sera vue au chapitre 5):

Exemple : **char *A = "Petite chaîne";**
char *B = "Deuxième chaîne un peu plus longue";
A = B;

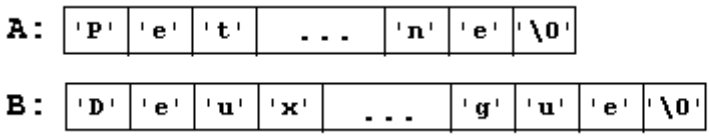
Maintenant A et B pointent sur la même chaîne; la "Petite chaîne" est perdue:



Important : Les affectations discutées ***ci-dessus*** ne peuvent pas être effectuées avec des tableaux de caractères:

Exemple :

char A[45] = "Petite chaîne";
char B[45] = "Deuxième chaîne un peu plus longue";
char C[30];
A = B; /* IMPOSSIBLE -> ERREUR !!! */ (A est une adresse constante)
C = "Bonjour !"; /* IMPOSSIBLE -> ERREUR !!! */ (C aussi est une constante)



Dans cet exemple, nous essayons de copier l'adresse de B dans A, respectivement l'adresse de la chaîne constante dans C. Ces opérations sont impossibles et illégales parce que ***l'adresse représentée par le nom d'un tableau reste toujours constante***.

Pour changer le contenu d'un tableau, nous devons changer les composantes du tableau l'une après l'autre ou déléguer cette charge à une fonction de ***<string> (strcpy(s1,s2)*** **).**

4.9 Pointeurs et tableaux à deux dimensions

Exemple : Le tableau M à deux dimensions est défini comme suit:

```
int M[4][10] = {{ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9},
                {10,11,12,13,14,15,16,17,18,19},
                {20,21,22,23,24,25,26,27,28,29},
                {30,31,32,33,34,35,36,37,38,39}};
```

Le nom du tableau M représente l'adresse du premier élément du tableau et pointe sur le ***tableau*** M[0] qui a la valeur: **{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9}. (M représente &M[0])**

L'expression (M+1) est l'adresse du deuxième élément du tableau et pointe sur M[1] qui a la valeur: **{10,11,12,13,14,15,16,17,18,19}. (M+1 représente &M[1])**

Explication

Au sens strict du terme, un tableau à deux dimensions est un tableau unidimensionnel dont chaque composante est un tableau unidimensionnel. Ainsi, le premier élément de la matrice M est le ***vecteur*** **{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9}**, le deuxième élément est **{10,11,12,13,14,15,16,17,18,19}** et ainsi de suite.

L'arithmétique des pointeurs qui respecte automatiquement les dimensions des éléments conclut logiquement que: **M+I** désigne l'adresse du tableau **M [I]**

&M[0][0] équivalent à M[0]+0 équivalent à *(M+0)+0
&M[0][1] équivalent à M[0]+1 équivalent à *(M+0)+1
&M[1][0] équivalent à M[1]+0 équivalent à *(M+1)+0
…
&M[i][j] équivalent à M[i]+j équivalent à *(M+i)+j
M[0][0] équivalent à *(M[0]+0) équivalent à *(*(M+0)+0)
M[0][1] équivalent à *(M[0]+1) équivalent à *(*(M+0)+1)
M[1][0] équivalent à *(M[1]+0) équivalent à *(*(M+1)+0)
…
M[i][j] équivalent à *(M[i]+j) équivalent à *(*(M+i)+j)

Important : M n'est pas de type **int *,** mais c'est un pointeur sur des blocs (lignes) donc si on désire pointer un pointeur P sur une matrice il faut faire une **conversion forcée** comme suit :

Int *p ; ~~p=M ;~~ ← faux

P=(int*) M ; convertir M qui est un pointeur sur un tableau en un pointeur sur un int

4.10 Tableaux de pointeurs

Déclaration : **<Type> *<NomTableau>[<N>]**

Exemple : **double *A[10];**

Déclare un tableau de 10 pointeurs sur des réels du type **double** dont les adresses et les valeurs ne sont pas encore définies.

Remarque

Le plus souvent, les tableaux de pointeurs sont utilisés pour mémoriser de façon économique des *chaînes de caractères de différentes longueurs*.

4.11 Pointeurs et structures

Exemple :

```
typedef  struct  { int Jour, Mois, Annee; } Date;
Date *Ptr_Date;    /* Ptr_Date pointe sur des objets de type Date */
```

Il est alors possible d'utiliser ce pointeur de la façon suivante :

```
(*Ptr_Date).jour=12 ou bien Ptr_Date->Jour = 12;
```

4.12 Passage d'un tableau comme argument d'une fonction

Exemple :

Retourner l'élément le plus petit parmi les composantes d'un tableau de ***n*** entiers données. On peut écrire les prototypes suivants (tous sont équivalents)

- /* la fonction retourne le résultat à travers son nom et le corps de la fonction peut être identique pour les trois prototypes suivants* /

```
int minimum1 (int t[50], int n) ;
int minimum1 (int t[ ], int n) ;
int minimum1 (int *t, int n) ;
```

- /* la fonction retourne le résultat à travers l'argument min */

```
void minimum2 (int *t, int n, int *min) ;
```

int minimum1 (int t[ ], int n) ;

```
{ int min=t[0] ; int i ;
for(i=1 ;i<n ;i++)
      if (t[i]<min) min=t[i] ;
return min;
}
```

```
// Appel  min=minimum1(t, n) ;
```

Ou bien

```
int minimum1 (int *t, int n)
{ int min=*t, i ;
for(i=1 ;i<n ;i++)
      if (*(t+i)<min) min=*(t+i) ;
return min;
}
// Appel  min=minimum1(t, n) ;
```

Ou bien

```
void minimum2 (int t[ ], int n, int *min) ;
{ int *min=t[0] ; int i ;
for(i=1 ;i<n ;i++)
      if (t[i]<*min) *min=t[i] ;
}
// Appel  minimum2(t, n, &min) ;
```

Exercice1 : char *mois[12]={"Janvier", "Février", "Mars", "Avril", "Mai", "Juin", "Juillet", "Aout", "Septembre", "Octobre", "Novembre", "Décembre"} ;

a) Afficher chaque mois.
b) Afficher le 1er caractère de chaque mois.

Exercice 2:

Ecrire une fonction qui rempli une matrice carrée T[20][20] avec des 1, puis une fonction qui rempli la diagonale avec des zéros en utilisant uniquement un pointeur.

Exercice 3: Soit la déclaration suivante :

```
char  *Jour[ ] = {"dimanche","lundi","mardi","mercredi","jeudi",
                  "vendredi","samedi"};
```

Ecrire une fonction qui étant donné un entier **A,** qui peut prendre les valeurs de 1 à 7, affiche le jour de la semaine correspondant.

Exercice 4:

a- double (*a)[12] ; ……
b- double *a[12] ; ……
c- char *a[12] ; ……
d- char *d[4]={"Nord", "Sud", "Est", "Ouest"} ; ……
i- que représente d ? ……
ii- que désigne d+2 ? ……
iii- quelle est la valeur de *d ? ……
iv- quelle est la valeur de *(d+2) ? ……
v- quelle est la différence entre d[3] et *(d+3) ? ……
vi- que vaut *(*(d+2)+1) ? ……

Exercice 5 : char *mois[12]={"Janvier", "Février", "Mars", "Avril", "Mai", "Juin", "Juillet", "Aout", "Septembre", "Octobre", "Novembre", "Decembre"} ;

c) Afficher chaque mois.
d) Afficher le 1er caractère de chaque mois.

Solution :

a) int i ;
for(i=0; i<12; i++) printf("%s\n", mois[i]); /* Affiche le mois */
b) for(i=0; i<12; i++) printf("%c\n", *mois[i]) ; /* Affiche le 1er caractère du mois */
printf("%c\n", *mois[i]+1) ; /* affiche le 2ème caractère du mois */

Exercice 6:

Ecrire une fonction qui rempli une matrice carrée T[20][20] avec des 1, puis une fonction qui rempli la diagonale avec des zéros.

Solution :

```
void remplir(int T[20][20], int n)
{ int i,j ;
  for(i=0; i<n; i++)                    /*  Appel  remplir(T, n)  */
      for(j=0; j<n; j++)    T[i][j]=1;
}
void diag(int *p, int   n)
{  int i;
   for(i=0; i<n; i++)  { *p=0; p=p+(n+1);  }   /*  Appel  diag(T,n)   */
}
```

Exercice 7: Soit la déclaration suivante :

```
char  *Jour[ ] = {"dimanche","lundi","mardi","mercredi","jeudi",
                  "vendredi","samedi"};
```

Ecrire une fonction qui étant donné un entier **A,** qui peut prendre les valeurs de 1 à 7, affiche le jour de la semaine correspondant.

Solution : … printf("%s",Jour[A-1]) ;

Exercice 8:

a- double (*a)[12] ; → a → *a : [0] [11]

b- double *a[12] ; → tableau de 12 pointeurs sur des réels

c- char *a[12] ; → tableau de 12 pointeurs sur des caractères ou des chaines

d- char *d[4]={"Nord", "Sud", "Est", "Ouest"} ; tableau de 4 chaines

vii- que représente d ? → &d[0]

viii- que désigne d+2 ? → &d[2]

ix- quelle est la valeur de *d ? → d[0]=&d[0][0]=&'N' → "Nord"

x- quelle est la valeur de *(d+2) ? → d[2]=&d[2][0]=&'E' → "Est"

xi- quelle est la différence entre d[3] et *(d+3) ? aucune = &'O' → "Ouest"

xii- que vaut *(*(d+2) +1) ? → *(d[2]+1) = 's' du mot "Est"

Exercices sur les chaines :

1. La fonction copietab() copie les éléments d'une chaine de caractères T[] dans une autre chaine S[].

1ère Solution :

```
Void copietab(char S[ ], char t[ ])
{
  int i =0 ;
  while (T[i] !='\0')
  {  S[i] = T[i]; i++;  }
}
```

2ème Solution: Un programmeur expérimenté préfère la solution suivante :

```
Void copietab(char *s, char *T)
{
    while (*S++ = *T++) ;
}
```


2. En utilisant les fonctions de String.h, écrire une fonction qui supprime toutes les occurrences d'un caractère donné C dans une chaine S donnée.
Exemple : S= "element" C='e' → S=lmnt

Solution:

```
Void supprimcar(char *S, char C)
{ char *p=S
  while (p=strchr(p,C)!=NULL)  // ou bien while (p=strchr(S,C))
      strcpy(p,p+1);
}
```

3. Compter le nombre d'occurrences d'un caractère C dans une chaine S

Solution :

```
int compter(char *S, char C)
{ int cp=0 ; char *p=S ;
  while (p=strchr(S,C)) {nb++; p++; }
return nb;
}
```

5. Allocation dynamique de mémoire

5.1 Introduction

Si nous générons des données pendant l'exécution d'un programme, il nous faut des moyens pour réserver et libérer de la mémoire au fur et à mesure que nous en avons besoin. Nous parlons alors de ***l'allocation dynamique*** de la mémoire.

Déclaration statique de données

Chaque variable dans un programme a besoin d'un certain nombre d'octets en mémoire. Jusqu'ici, la réservation de la mémoire s'est déroulée automatiquement par l'emploi des déclarations des données. Dans tous ces cas, le nombre d'octets à réserver était déjà connu pendant la compilation. Nous parlons alors de la ***déclaration statique*** des variables.
Exemple : int T[10] ; char Mot[30] ; …

Allocation dynamique

Problème
Souvent, nous devons travailler avec des données dont nous ne pouvons pas prévoir le nombre et la grandeur lors de la programmation. Ce serait alors un gaspillage de réserver toujours l'espace maximal prévisible. Il nous faut donc un moyen de gérer la mémoire lors de l'exécution du programme.

Exemple1 : int *T ; char * Mot ; …

Exemple2 : Nous voulons lire 10 phrases (de différentes tailles) au clavier et les mémoriser en utilisant un tableau de pointeurs sur **char**. Nous déclarons ce tableau de pointeurs par: **char *TEXTE[10];**

Pour les 10 pointeurs, nous avons besoin de *10*p octets*. Ce nombre est connu dès le départ et les octets sont réservés automatiquement. Il nous est cependant impossible de prévoir à l'avance le nombre d'octets à réserver pour les phrases elles-mêmes qui seront introduites lors de l'exécution du programme ...
La réservation de la mémoire pour les 10 phrases peut donc seulement se faire *pendant l'exécution du programme*. Nous parlons dans ce cas de l'***allocation dynamique*** de la mémoire.

5.2 La fonction malloc

La fonction **malloc** de la bibliothèque ***<stdlib>*** nous aide à localiser et à réserver de la mémoire au cours d'un programme.

La fonction **malloc(<N>)** fournit l'adresse d'un bloc en mémoire de <N> octets libres ou la valeur zéro s'il n'y a pas assez de mémoire.

Exemple :
Supposons que nous ayons besoin d'un bloc en mémoire pour un texte de 4000 caractères. Nous disposons d'un pointeur T sur **char** (**char *T**).
Alors l'instruction: **T = malloc(4000);** fournit l'adresse d'un bloc de 4000 octets libres et l'affecte à T. S'il n'y a plus assez de mémoire, T obtient la valeur zéro.

5.3 L'opérateur sizeof

Si nous voulons réserver de la mémoire pour des données d'un type dont la grandeur varie d'une machine à l'autre, nous avons besoin de la grandeur effective d'une donnée de ce type. ***sizeof()*** revoie donc le nombre d'octets utilisés pour stocker un objet.
L'opérateur **sizeof** nous aide alors à préserver la portabilité du programme.

L'opérateur unaire sizeof
sizeof <var> fournit la grandeur de la variable <var>
sizeof <cons> fournit la grandeur de la constante <const>
sizeof (<type>) fournit la grandeur pour un objet du type <type>

Exemple
Nous voulons réserver de la mémoire pour X valeurs du type **int**; la valeur de X est lue au clavier:


```
int X;
int *PNum;
printf("Introduire le nombre de valeurs :");
scanf("%d", &X);
PNum = (int *)malloc(X*sizeof(int));
```

Remarque: Si l'espace mémoire doit contenir un autre type que char il faut forcer le type de la fonction malloc, comme présenté dans l'exemple précédent.

5.4 La commande exit

S'il n'y a pas assez de mémoire pour effectuer une action avec succès, il est conseillé d'interrompre l'exécution du programme à l'aide de la commande **exit** (de ***<stdlib>***) et de renvoyer une valeur différente de zéro comme code d'erreur du programme.

Exemple

Le programme à la page suivante lit 10 phrases au clavier, recherche des blocs de mémoire libres assez grands pour la mémorisation et passe les adresses aux composantes du tableau **TEXTE[]**. S'il n'y a pas assez de mémoire pour une chaîne, le programme affiche un message d'erreur et interrompt le programme avec le ***code d'erreur -1.***

Nous devons utiliser une variable d'aide **INTRO** comme zone intermédiaire (non dynamique). Pour cette raison, la longueur maximale d'une phrase est fixée à 500 caractères.

```
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
#include <string.h>
main()
{   char INTRO[500];
    char *TEXTE[10];
    int i;

   for (i=0; i<10; i++)
    { gets(INTRO);

      TEXTE[i] = malloc(strlen(INTRO)+1);  /* Réservation de la mémoire */

      if (TEXTE[i])   /* S'il y a assez de mémoire  */
       strcpy(TEXTE[i], INTRO); /* copier la phrase à l'adresse fournie par
malloc  */
      else
       {  /* sinon quitter le programme après un message d'erreur. */
        printf("ERREUR: Pas assez de mémoire \n");
        exit(-1);
       }
   }
}
```


5.5 La fonction free

Si nous n'avons plus besoin d'un bloc de mémoire que nous avons réservé à l'aide de **malloc**, alors nous pouvons le libérer à l'aide de la fonction **free** de la bibliothèque <*stdlib*>.

free(<Pointeur>)

Libère le bloc de mémoire désigné par le **<Pointeur>**; n'a pas d'effet si le pointeur a la valeur zéro.

Exemple : Soit le programme suivant :

```
#include<stdio.h>
#include<stdlib.h>
main()
{  int i=3;   int *p;
   printf("valeur de p avant allocation=%d\n", p) ;
   p=(int *) malloc (sizeof(int)) ;
   printf("valeur de p après allocation=%d\n", p) ;
   *p=i ;
   printf("valeur de *p=%d\n", *p) ;
}
```

objet	*adresse*	*valeur*	
i	1245060	3	
p	1245064	0	Avant allocation
i	1245060	3	
p	1245064	8004260	
*p	8004260	?(int)	Après allocation
i	1245060	3	
p	1245064	8004260	
*p	8004260	3	


```
main()
{  int i=3 ;  int *p ;   p=&i ;  }
```

objet	*adresse*	*valeur*	
i	1245060	3	
p	1245064	1245060	i et *p sont identiques (même adresse)
*p	1245060	3	

5.6 Les Listes chaînées

5.6.1/ Définitions

a) Structures récursives : Les structures récursives font référence à elles mêmes. On cite : les listes chainées et les arbres.

b) Listes chainées : C'est une structure dynamique qui s'agrandit au fur et à mesure de la lecture des données. Une liste est constituée de ***cellules chainées***. Une cellule est composée de deux champs :

i) ***élément***, contenant un élément de la liste
ii) ***suivant***, contenant un pointeur sur une autre cellule.
iii) les cellules ne sont pas rangées séquentiellement en mémoire. D'une exécution à l'autre leur localisation peut changer.
iv) une position (adresse) est un pointeur sur une cellule.
v) rajouter ou supprimer un élément ne nécessite pas de décalage.
vi) une liste est un pointeur sur la cellule qui contient le premier élément de la liste que l'on appelle ***tête de liste***.
vii) la liste vide est le pointeur ***NULL***.

5.6.2/ Listes simplement chaînées

a) Déclaration

– **typedef struct** <ident1> { <type_elements> <nom var_elem>;
struct <ident1> * <nom var_suivant>; // pointeur
} <ident2> ;

exemple : typedef **struct ListEtud** {char nom[20], prenom[20] ;
float moyenne ;
struct ListEtud * svt ;} noeudE ;
struct ListEtud * teteEt ;
type des cellules

/* ou bien */

– typedef struct <ident1> * <ident3> ; // nouveau type ident3
typedef struct <ident1> { <type_elements> <nom var_elem> ;
<ident3> <nom var_suivant> ; // pointeur
} <ident2> ;

exemple : typedef struct ListEtud * **ListEt** ; ⟵ type des cellules
typedef struct ListEtud {char nom[20], prenom[20] ;
float moyenne ;
ListEt svt ;} noeudE ;
ListEt teteEt ;

Remarque : Pour la suite du cours on utilisera la déclaration ci-dessous :

```
typedef  <type>   typelem ;   // <type> peut être un int, float, char …
typedef struct  id1 * Liste ;
typedef struct id1 { typelem  element ;
                     Liste suivant; } noeud;
Liste L;
```

b) Accès à une valeur d'une liste

Liste L ;
typelem a=**(*L).**element ;

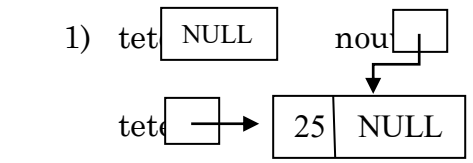
mais généralement on utilise la notation pointée →
typelem a=L→element ;

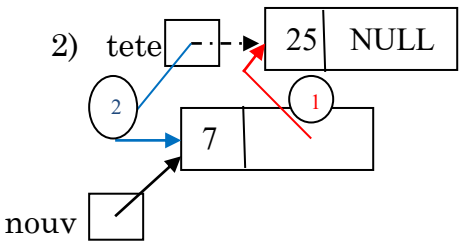
c) Création d'un nœud

```
Liste  creer_noeud( )
{  Liste  L= (Liste)malloc(sizeof(nœud)) ;
   if ( ! L) {   printf("erreur d'allocation\n") ;
                 exit(-1) ;
                 }
   return(L) ;
}
```


d) Ajout d'un élément en tête de liste

```
void ajout_tete(Liste *tete, typelem E)  // tete est transmise par adresse
 { Liste nouv=creer_noeud ( ) ;
  Nouv→element=E ;
  nouv→suivant=*tete ;(1)
  *tete=nouv ;(2)
}
```





e) Ajout d'un élément après une adresse donnée

```
void ajout(Liste  *prd, typelem E)
 { Liste nouv=creer_noeud ( ) ;
  nouv→element=E ;
  nouv→suivant=*prd->suivant ;
  *prd→suivant=nouv ;
  *prd=nouv ; // Le nouvel élément devient le précédent pour un autre éventuel ajout
 }
```

f) Suppression d'un élément en tête de liste

```
void supprim_tete(Liste *tete)
{    Liste temp=*tete ;
     * tete=*tete→suivant ;
     free(temp) ;
 }
```

g) Suppression de l'élément après une adresse donnée

```
void supprim(Liste prd, Liste p)
{   prd→suivant=p→suivant ;
    free(p) ;
}
```


h) Création d'une liste

- **Création FIFO :**

```
typedef   int  typelem ; /* Créer une liste de n valeurs entières */
Liste creer_listeFifo ( )
{  Liste tete=NULL, prd ; int n, i;  typelem E ;
   scanf("%d",&n) ;
   scanf("%d",&E) ;
   ajout_tete(&tete, E) ;
 prd=tete;
for(i=2 ; i<=n; i++)
   {  scanf("%d", &E);
      ajout(&prd, E);
   }
return(tete);
}
```

- **Création LIFO :**

```
/* créer une liste de n valeurs entières */
Liste créer_listeLifo ( )
{  Liste tete=NULL ; int n, i ; typelem E;
   scanf("%d",&n) ;
   for(i=1 ; i<=n; i++)
      {  scanf("%d",&E);
         ajout_tete(&tete, E);
      }
   return(tete);
}
```

i) Parcours d'une liste

Exemple : Afficher les éléments d'une liste d'entiers, dont le point d'entrée est **tete**.

```
void  Affiche_liste(Liste tete)
{      while(tete !=NULL)
            {  printf("%d\t",tete→element);  tete=tete→suivant;    }
}
```

Ou bien :

```
void  Affiche_liste(Liste tete)
{ for ( ; tete!=NULL;
tete=tete→suivant)
        printf("%d\t", tete→element);
}
```

```
void  Affiche_liste(Liste tete)
{ Liste p ;
   for (p=tete; p!=NULL; p=p→suivant)
        printf("%d\t", p→element);
```


j) Recherche d'une valeur donnée

- Recherche d'une valeur donnée, dans une liste **L** d'entiers ***triés*** par ordre croissant et retourne son adresse, si elle existe, sinon elle retourne l'adresse où elle doit être insérée ainsi que l'adresse de l'élément précédent.

```
Liste rechercheT(Liste L, typelem val, Liste *prd)
{ while(L !=NULL && L→element<Val)
      {  *prd=L;
         L=L→suivant;    }
  if (L!=NULL && L→element==val) return L;
  else return NULL;
}
```

- Recherche d'une valeur donnée, dans une liste **L** d'entiers ***quelconques*** et retourne son adresse, si elle existe sinon retourne NULL

```
Liste recherche(Liste L, typelem val)
{
   while(L !=NULL && L→element!=Val)
      {
         L=L→suivant;
      }
  return L;
}
```

- Recherche d'une valeur donnée, dans une liste **L** d'entiers ***quelconques*** et retourne son adresse, si elle existe, ainsi que l'adresse de l'élément précédent car cette fonction sera utilisée pour supprimer une valeur.

```
Liste rechercheS(Liste L, typelem val, Liste *prd)
{
   while(L !=NULL && L→element!=Val)
      {  *prd=L;
         L=L→suivant;
      }
  return L;
}
```


k) Mise à jour d'une liste

- **Modification :**

Exemple : Remplacer dans une liste **L** d'entiers, une valeur donnée **X** par une valeur donnée **Y**.

```
void  Modifier(Liste L, int X, int Y))
{  while (L !=NULL && L→element!=X)  L=L→suivant;
   if (L!=NULL) L→element=Y;
   else  printf("%d n'existe pas",X);
}
```

Ou bien :

```
void  Modifier(Liste L, int X, int Y))
{  Liste prd,
   p=recherche(L, X, &prd);
   if (p!=NULL)  p→element=Y ;
   else  printf("%d n'existe pas",X);
}
```

- **Insertion :**

Exemple : Insérer une valeur **Val** donnée dans une liste d'entiers triés dans l'ordre croissant, de point d'entrée **tete**.

```
void  Inserer(Liste *tete, int Val)
{
  Liste p=*tete, prd=NULL;
  p=rechercheT(*tete, val, &prd);
  if (p= =*tete)     ajout_tete(tete, val) ;
  else  ajout_Apres(&prd, val) ;
 }
```


- **Suppression :**

Exemple : Supprimer une valeur **Val** donnée dans une liste d'entiers quelconques, de point d'entrée **tete**.

```
void  Supprimer(Liste *tete, int Val))
{
  Liste p, prd;
   if (p=rechercheS(*tete, val, &prd) )
         if (p= =*tete)  supprim_tete(tete) ;
         else  supprim(prd, p) ;
  else printf("Suppression impossible, la valeur n'existe pas\n") ;
}
```

5.6.3/ Listes bidirectionnelles

a) Déclaration

```
typedef  struct ne *ListeB ;
typedef  struct ne  { <type_elements> element ;
                      ListeB suivant, precedent ;
                    } nœudB ;
 ListeB L ;
```

b) Création d'un nœud

```
ListeB créer_noeudB( )
{  ListeB L= (ListeB)malloc(sizeof(nœudB)) ;
   if ( ! L) { printf("erreur d'allocation\n") ; exit(-1) ;}
   return(L) ;
}
```

c) Ajouter un élément en tete de liste


```
void ajout_teteB (ListeB *tete, typelem E)
{ ListeB nouv=créer_noeudB ( ) ;
  nouv→element=E;
  nouv→precedent=NULL;
  nouv->suivant=*tete;
  if (*tete !=NULL) *tete→precedent=nouv ;
  *tete=nouv;
 }
```

d) Ajouter un élément après une adresse donnée

```
void ajoutB (ListeB *prd, typelem E)
{ ListeB  nouv=creer_noeudB ( ) ;
  ListeB  p=*prd→suivant ;
  nouv→element=E ;
  *prd→suivant=nouv;
  nouv→precedent=*prd ;
  nouv->suivant=p ;
  if (p !=NULL) p→prd=nouv ;
  *prd=nouv ;
}
```

e) Création d'une liste

- **Création FIFO :**

```
typedef int  typelem ;

ListeB créer_listeBFifo( )
{   /* créer une liste de n valeurs entières */
   ListeB tete=NULL, prd; int n, i ;  typelem E;
   scanf("%d",&n) ;
   scanf("%d",&E) ;
   ajout_teteB( &tete, E) ;
  prd=tete;
   for(i=2 ; i<=n; i++)
     {  scanf("%d",&E);
        ajoutB(&prd, E);
     }
  return(tete);
}
```

- **Création LIFO :**

```
ListeB créer_listeBLifo ( )
{  /* créer une liste de n valeurs entières */
   ListeB tete; int n, i ; typelem E;
   scanf("%d",&n) ;
   tete=NULL ;
   for(i=1 ; i<=n; i++)
      {  scanf("%d",&E);
         ajout_teteB( &tete, E) ;
       }
   return(tete);
}
```


f) Mise à jour d'une liste

- **Insertion :**

Exemple : Insérer une valeur **Val** donnée dans une liste bidirectionnelle **L** d'entiers triée dans l'ordre croissant.

```
ListeB rechercheBT(ListeB tete, typelem val)
{   ListeB p=tete ;
    while (p !=NULL && p→element<val) p=p→suivant ;
    return p;
}
```

```
void  Inserer(ListeB *L, int val))
{
  ListeB p, prd=NULL, temp ;
  p=rechercheBT(*L, val);
  if (p= =*L)  ajout_teteB(L, val);   /* insertion en tête*/
  else    ajoutB(p→precedent, val) ;
}
```

- **Suppression :**

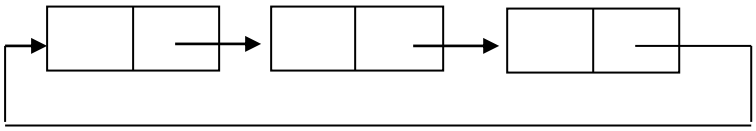
Exemple : Supprimer une valeur **Val** donnée dans une liste bidirectionnelle **L** d'entiers quelconques.

```
ListeB rechercheB(ListeB tete, typelem val)
{  ListeB p ;
   while(p !=NULL && p→element !=val) p=p→suivant;
  return p;
}
void supprim_teteB (ListeB *tete)
{  ListeB p=*tete;
    *tete=*tete→suivant;
   if (*tete!=NULL) *tete→precedent=NULL;
   free(p);
}
void supprimB (ListeB p)
{  ListeB prd=p→precedent, R=p→suivant;
   prd→suivant=R;
  if (R !=NULL) R→precedent=prd ;
  free(p);
}

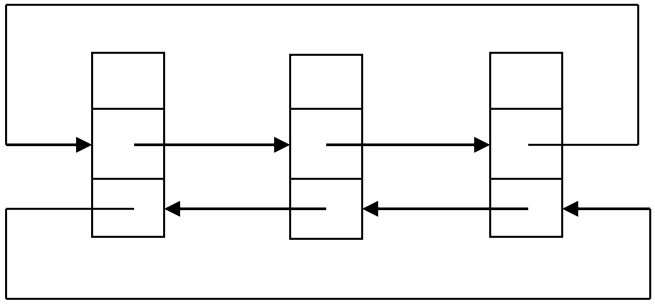
void  Supprimer(ListeB *L, typelem Val))
{  ListeB p=*L, prd;
   p=rechercheB(*L, val) ;
   if (p ! =NULL)
     {
       if (p= =*L)  supprim_TeteB(L) ;   /* suppression en tête*/
       else  supprimB(p) ;
      }
  else printf("Suppression impossible, la valeur n'existe pas\n") ;
}
```

5.5.3/ Listes circulaires

a) Listes circulaires simplement chaînées



b) Listes circulaires bidirectionnelle



Exemple : Vérifier si un mot donné représenté dans une liste chainée bidirectionnelle circulaire de caractères est un palindrome.

Solution :

```
ListeB dernier(ListeB tete)      // si la liste n'est pas circulaire
{  while (tete→suivant != NULL) tete=tete→suivant ;
   return tete ;
}
```

Ou bien :

```
 ListeB dernier(ListeB tete)      // si la liste n'est pas circulaire
{  for (  ;tete→suivant != NULL ; tete=tete→suivant) {} ;
   return tete ;
}
int Palindrome(ListeB tete)
{  listeB queue=dernier(tete) ;   /* cette instruction est exécutée si la liste n'est pas
                                     Circulaire */
queue=tete->precedent ; // si la liste est circulaire
  while (tete !=queue && tete→suivant !=queue &&
tete→element==queue→element)
       {    tete=tete→suivant ; queue=queue→precedent ;   }
  if (tete→element==queue→element) return 1 ;
  else return 0;   }
```

7. La Récursivité

7.1 Définitions :

7.1.1 Objet récursif : Un objet est dit récursif s'il est utilisé directement ou indirectement dans sa définition.

Exemple :

En définissant une expression arithmétique <expr> ou un identificateur <idf> ou une constante <cste> nous donnons une définition récursive comme suit :
Si θ est un opérateur on aura : <expr> → <expr> θ <expr> / <idf> / <cste>.

7.1.2 Programmation récursive : La programmation récursive est une technique de programmation qui remplace les instructions de boucle (while, for, etc.) par des appels de fonctions.

7.1.3 Action paramétrée récursive : Une action paramétrée P est dite récursive si son exécution provoque ou entraîne un ou plusieurs appels à P. Ces appels sont dits récursifs.

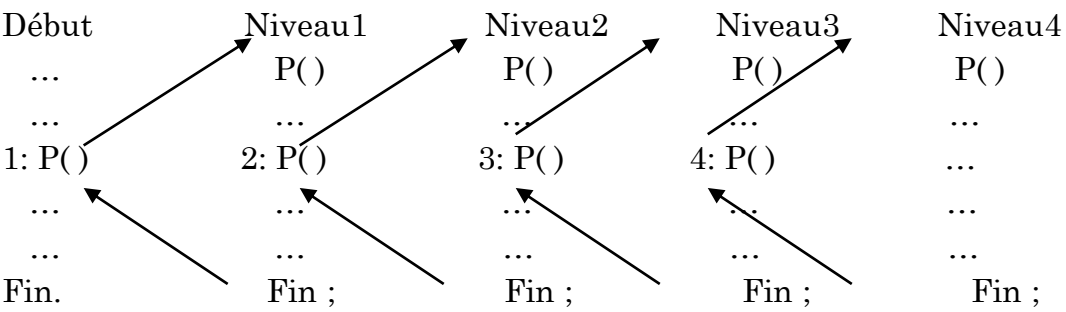
7.1.4 Algorithme récursif : Un algorithme récursif est un algorithme qui contient une ou plusieurs actions paramétrées récursives.

7.1.5 Auto-imbrication : L'auto-imbrication est le fait qu'une action paramétrée P peut s'appeler elle-même avant que sa première exécution ne soit terminée; la seconde exécution peut de nouveau faire appel à P et ainsi de suite.

Exemple :

Soit l'action paramétrée suivante :

```
Action P( )
Début
  P( );
Fin ;
```



Chaque appel à P se fait à un niveau donné. L'exécution de P au niveau i se termine avant l'exécution de P au niveau i-1.

Remarque : Le nombre de niveaux doit être fini, quelque soit les valeurs des paramètres d'appel, autrement l'algorithme va boucler indéfiniment.

7.2 Principes de construction d'algorithmes récursifs :

Exemple :

Le calcul de la valeur factorielle d'un nombre donné n (n>=0) peut se faire de deux manières différentes :

1ère méthode :

n ! = 1*2*3*…*n-1*n sachant que 0 !=1

On obtient alors l'algorithme itératif (classique) donné par la fonction suivante :

```
int fact (int n)
{ int i,p=1 ;
  for(i=1; i<=n; i++) p=p*i;
 return p;
}
```


2ème méthode :

0!=1 ; 1!=1 ; 2!=1*2 ; 3!=1*2*3 ; 4!=1*2*3*4 ; 5!=1*2*3*4*5 …
=2 =6 =24 =120 …

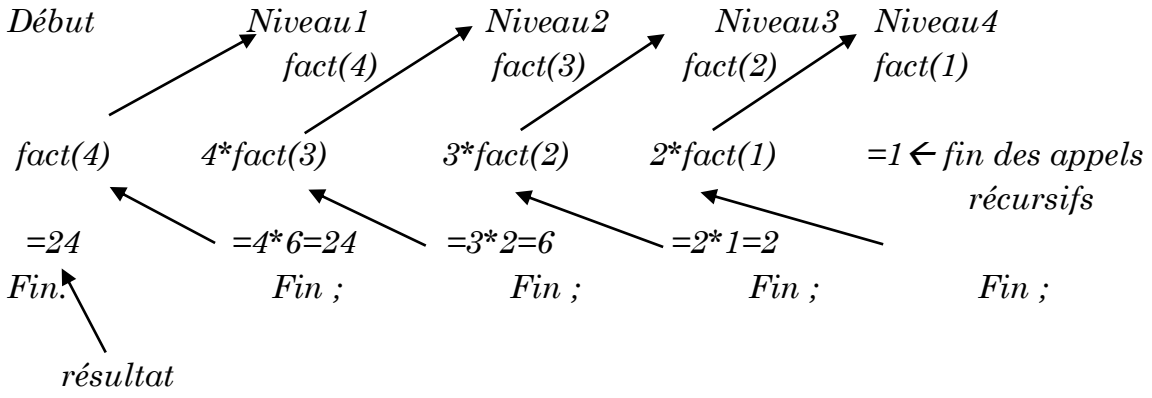
Nous remarquons que:
0!=1 ; 1!= 0!*1 ; 2!=1!*2 ; 3!= 2!*3 ; 4!=3!*4 ; 5!=4!*5

De façon générale pour un n donné n>0 on a : n! = (n-1) !*n
On constate donc la définition de n! est récursive, puisqu'elle se réfère à elle-même quand elle applique (n-1)!
Le calcul de la valeur factorielle d'un nombre est défini par :

a) Si n=0 ou n=1 alors n !=1
b) Si n>0 alors n != (n-1) !*n

```
int fact(int n)
{ if (n==0 | | n==1) return(1) ;
  else return(n*fact(n-1));
}
```

Déroulement de fact (4)



Remarques :

a) Quand n=0, la valeur de n ! est donnée directement. 0 est appelé ***valeur de base***.

b) Pour un n≠0 donné, la valeur de n ! est définie en fonction d'une valeur plus petite que n et plus voisine de la valeur de base 0.

c) La variable n, est testée à chaque fois pour savoir s'il faut exécuter
Si n=0 alors n !=1
ou Si n>0 alors n != (n-1) !*n
n est appelé ***variable de commande***

Les principes de construction d'actions paramétrées récursives sont donc :

- Le nombre d'appels récursifs (niveaux) doit être fini. Il faut donc que les paramètres contiennent une ou plusieurs variables de commande qui sont testées à chaque niveau pour savoir si on doit continuer ou non les appels récursifs.
- Déterminer le ou les cas particuliers qui sont exécutées directement sans appels récursifs. Dans ces cas, les variables de commandes sont égales aux valeurs de base (n=0).
- Décomposer le problème initial en sous problèmes de même nature, telle que des décompositions successives aboutissent toujours à l'un des cas particuliers.
- Le principe de la récursivité est que les appels récursifs doivent être uniquement sur des données plus petites n != n* (n-1) !

Plus petit que n !

7.3 Schémas généraux d'actions récursives :

1er schéma :

```
Action P( )
  Début
    Si < condition> alors  P( )
                    sinon Q ;
  Fin ;
```

2ème schéma :

```
Action P( )
  Début
    Tant que  < condition> faire  P( )
    Q ;
  Fin ;
```

Où Q permet la résolution directe du problème (ne contient pas d'appel récursif).

7.4 Récursivité directe et récursivité indirecte :

Une action qui fait appel à elle-même explicitement dans sa définition est dite récursive directement ou récursivité simple.

Si une action A fait référence (ou appel) à une action B qui elle fait appel directement ou indirectement à A, on parle alors de récursivité indirecte ou récursivité croisée.

```
Action A( )
 Début
   Si < condition> alors  B( )
                  sinon QA ;
 Fin ;
```

```
Action B( )
  Début
    Si < condition> alors  A( )
                   sinon
QB ;
  Fin ;
```

Exemple :

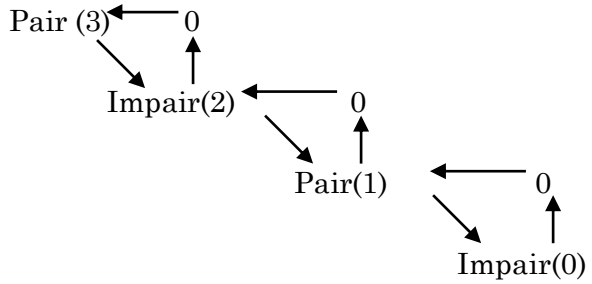
- Récursivité directe : <expr> → <expr> θ <expr>
- Récursivité indirecte :

<expr> → <terme> θ <terme>
<terme> → <expr>

- Pour construire une définition récursive de la parité, remarquons tout d'abord que 0 est un entier pair, et qu'il n'est pas impair. Ensuite remarquons que un entier n est pair (resp. impair) ssi l'entier n-1 est impair (resp. pair).

```
int  Pair (int n)
{  if (n= =0) return 1 ;
   else return Impair(n-1);
}
```

```
int Impair (int n)
{ if (n= =0) return 0 ;
  else return Pair(n-1);
}
```



Résumé :

```
Action récursive (paramètres)
  <Déclaration des variables locales> ;
Début
  Si (Test d'arrêt) alors < instructions du point d'arrêt >
  Sinon
     instructions ;
     récursive(paramètres changés) /* appels récursifs */
     instructions ;
   Fsi ;
Fin ;
```


7.5 Différents types de récursivité :

a) **Récursivité simple :** une fonction simplement récursive, c'est une fonction qui s'appelle elle-même une seule fois, comme c'était le cas pour la fonction factorielle.

b) **Récursivité multiples :** une fonction peut exécuter plusieurs appels récursifs – typiquement deux parfois plus.

Exemple :
```
void afficheMotRec (chaine TabMot[ ], int n, int  i)
        { if (i<n)  { afficheMotRec(TabMot, n, i+1) ;
                      printf("%s", TabMot[i]);
                      afficheMotRec(TabMot, n, i+1);
                    }
        }
```

c) Récursivité à droite :

Si l'exécution d'un appel récursif n'est jamais suivie par l'exécution d'une autre instruction, cet appel est dit récursif à droite ou encore appelée ***récursivité terminale***. L'exécution d'un tel appel termine l'exécution de l'action et ***ne nécessite pas une pile***.
Une fonction récursive ***non terminale nécessite une pile***.

Exemple :
```
void afficheMotRec1 (chaine TabMot[ ], int n, int  i)
{ if (i<n)  { printf("%s", TabMot[i]);
              afficheMotRec(TabMot, n, i+1);
            }
} /* afficheMotRec1 est une fonction récursive terminale */

void afficheMotRec2 (chaine TabMot[ ], int n, int  i)
{ if (i<n)  { afficheMotRec(TabMot, n, i+1) ;
              printf("%s", TabMot[i]);
            }
} /* afficheMotRec2 est fonction récursive non terminale */
```


7.6 Fonctionnement de la récursivité

Un programme ne peut s'exécuter que s'il est chargé en mémoire centrale, chaque instruction du programme se trouve à une adresse donnée de la mémoire.
Lorsqu'un programme fait appel à une fonction, le système sauvegarde l'adresse de retour (adresse de l'instruction qui suit l'appel), ainsi que les valeurs des variables locales.
Quand une fonction ***f*** appelle une fonction ***g,*** on doit sauvegarder l'adresse de retour de ***f*** (paramètres et variables locales) avant l'appel de ***g***, ce contexte doit être récupéré après le retour de ***g***.
S'il y a plusieurs appels imbriqués, le système gère ***une pile*** pour sauvegarder (empiler) les différents contextes des différents appels récursifs.

Les paramètres de l'appel récursif changent. A chaque appel les variables locales sont stockées dans une pile. Ensuite les paramètres ainsi que les variables locales sont désempilées au fur et à mesure qu'on remonte les niveaux.

Lors de l'i^{ème} appel sont empilés :

- Les valeurs des paramètres au niveau i
- Les valeurs des variables locales du niveau i
- L'adresse de retour au niveau i

A la fin des appels récursifs retour du niveau i+1 au niveau i :

- Retour au programme principal si la pile est vide
- Dépiler l'adresse de retour
- Dépiler le contexte du niveau i (les valeurs des variables du niveau i
- Exécuter l'instruction suivant le dernier appel

7.6 Elimination de la récursivité :

La récursivité ***simplifie la structure d'un programme*** mais la plupart du temps, le gain en simplicité vaut une baisse relative des performances d'exécution.
La récursivité est souvent couteuse en temps et en espace mémoire car elle nécessite l'emploi de techniques spéciales de compilation, à savoir ***le concept de pile***.

Ces techniques sont généralement plus ***coûteuses en temps d'exécution*** que celles fondées sur l'itération. Aussi certains langages de programmation n'admettent pas la récursivité (exemple : Fortran). Ainsi il arrive que l'on souhaite éliminer la récursivité.

A cet effet il est intéressant de noter que l'on peut montrer que, si le langage de programmation utilisé le permet, il est toujours possible de transformer une action itérative en une action récursive ; cependant, la réciproque n'est pas vraie.

Les problèmes qu'il faut résoudre en utilisant la récursivité sont les problèmes ***typiquement récursifs*** et non itératifs, c'est-à-dire, soit des problèmes qui ne peuvent pas être résolus de façon itérative, soit des problèmes pour lesquels une ***formulation*** récursive est particulièrement ***simple et naturelle.***

D'une manière générale, on évitera donc d'utiliser la récursivité lorsqu'on peut la remplacer par une définition itérative, à moins de bénéficier d'un gain considérable en simplicité.

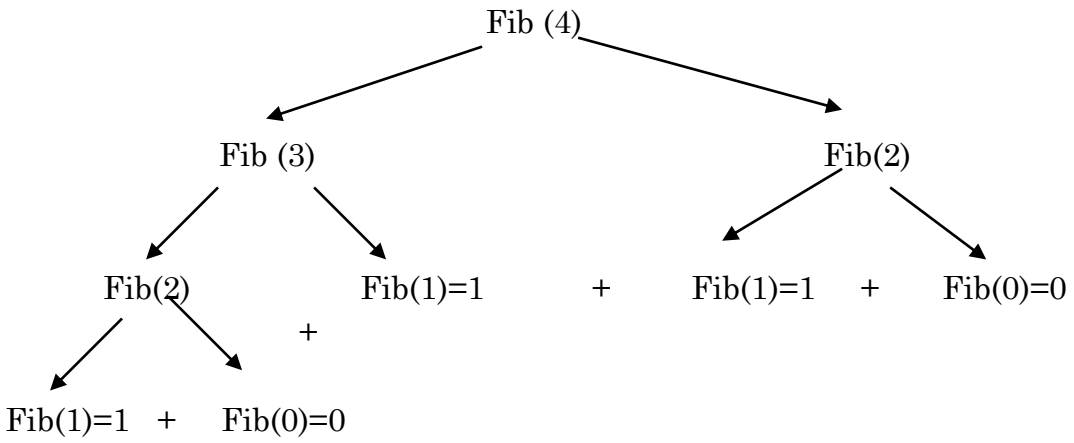
Exemple :
Les nombres de Fibonnaci : $F_0=0$, $F_1=1$

$$F_n=F_{n-1} + F_{n-2} \quad n>=2.$$

La fonction récursive permettant d'obtenir ces nombres est :

```
int  Fib(int n)
{ if (n= = 0) return 0;
  else if  (n= =1)  return 1;
        else  return Fib(n-1)+Fib(n-2);
}
```

L'exécution de cette fonction récursive pour n=4 nous donne l'arbre suivant :



Fib(4)=3 (9 appels pour arriver au résultat)

Les valeurs successive de cette suite : 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 12, 21, 34, 55,…
Voici maintenant la fonction itérative équivalente à la fonction récursive Fib.

```
int  Fib( int n)
{  int x, y, z, i ;
   x=1 ;  y=1 ; z=1 ; /* x=Fib(0)  et y= Fib(1) */
   for( i=2 ; i<=n ; i++)
     {  z=x+y ;
        x=y;
        y=z;
     }
   return z ;
}
```


Pour n=4 : x=1
y=1
i=2 : z=2 x=1 y=2
i=3 : z=3 x=2 y=3
i=4 : z=5 x=3 y=5
Résultat z=5

Le problème se situe au nombre d'appels à la fonction, nous constatons que pour la solution récursive le nombre d'appels est un nombre ***exponentiel*** (c'est une mauvaise solution très coûteuse) alors que la solution itérative ne coute que ***n appels***.
Cette version itérative peut à son tour se convertir en une nouvelle version récursive :

```
int  Fib(int x, int y, int n)
{ if (n= = 0 | |  n= =1)  return y;   else  return Fib(y, x+y, n-1);
}
```

n=4 : x=1, y=1

Fib(1,1,4) → Fib(1,2,3) → Fib(2,3,2) → Fib(3,5,1) = 5 donc Fib(4)=5

On a que 4 appels, le temps d'exécution est devenu ***linéaire***.

Comme on peut le constater, l'élimination de la récursivité est parfois très simple, elle revient à écrire une boucle, à condition d'avoir bien fait attention à l'exécution. Mais parfois elle est extrêmement difficile à mettre en œuvre.

Exemple : les tours de Hanoï

Le problème des tours de Hanoï consiste à déplacer N disques de diamètres différents d'une tour de départ à une tour d'arrivée en passant par une tour intermédiaire et ceci en un minimum de coups, tout en respectant les règles suivantes :

- on ne peut déplacer plus d'un disque à la fois,
- on ne peut placer un disque que sur un autre disque plus grand que lui ou sur un emplacement vide.

Tour A Tour B (intermédiaire) Tour C (résultat)

7.5.1 Elimination de la récursivité terminale

Un algorithme est dit récursif terminal (ou récursif à droite) s'il ne contient aucun traitement après un appel récursif.
- Dans ce cas le contexte de la fonction n'est pas empilé.
- L'appel récursif sera remplacé par une boucle while.

Cas1 :

```
f(x) /* récursive*/
{ if (condition(x))  {A ; f(g(x));}
}
```

```
f(x) /* itrérative*/
{ while(condition(x)) { A ; x=g(x) ;}
}
```

Cas2 :

```
f(x) /* récursive*/
{ if (condition(x))  {A ; f(g(x));}
  else  B ;
}
```

```
f(x) /* itrérative*/
{ while(condition(x)) { A ; x=g(x) ;}
  B ;
}
```

7.5.2 Elimination de la récursivité non terminale

a) cas d'un seul appel récursif:

Ici pour pouvoir dérécursiver, il va falloir sauvegarder le contexte de l'appel récursif.

Cas1 :

```
f(x) /* récursive*/
{ if (condition(x))  {A ; f(g(x));}   → nécessite une pile
  B ;
}
```

```
f(x) /* itrérative*/
{ pile p=initpile();
  while(condition(x)) { A ; empiler(&p,x); x=g(x) ;}
  while(!pilevide(p)) {desempiler(&p,&x) ;B ;}
}
```

Cas2 :

```
f(x) /* récursive*/
{ if (condition(x))
      {A1 ; f(g(x)); A2 ;}
  else B ;
}
```

```
f(x) /* itrérative*/
{ pile p=initpile();
  while(condition(x))
      { A1 ; empiler(&p,x); x=g(x) ;}
  B;
  while(!pilevide(p)) {desempiler(&p,&x) ;A2 ;}
}
```

b) cas de deux appels récursifs:

Le 2ème appel est récursif à droite (terminal)

```
f(x) /* récursive*/
{ if (condition(x))  {A ; f(g(x)); f(h(x)) ;}
 }
```

Si on élimine le 2ème appel :

```
while(condition(x)) {A ; f(g(x)) ; x=h(x) ;}
```

Le schéma itératif équivalent à f est :

```
f(x) /* itérative*/
{ pile p=initpile();
  while(condition(x))
   { while(condition(x) { A(x) ; empiler(&p,x); x=g(x) ;}
     desempiler(&p,&x) ;x=h(x) ;
   }
}
```


Algorithme Q(U)

si *C*(*U*) alors *D*(*U*);Q(a(*U*));*F*(*U*)
sinon *T*(*U*)

Algorithme Q'(U)

empiler(nouvel_appel, U)
tant que pile non vide faire
dépiler(état, V)
si état = nouvel_appel alors $U \leftarrow V$
si C(U) alors D(U)
empiler(fin, U)
empiler(nouvel_appel, a(U))
sinon T(U)
si état = fin alors $U \leftarrow V$
F(U)

Exercices :

1) Déroulez les fonctions calcul1 et calcul2, que constatez-vous ?

```
float calcul1 (int n)
{ if (n==0) return (2) ;
  else return(1/2(calcul1(n-1)+2)) ;
}
```

C'est une fonction qui se termine.

```
float calcul2 (int n)
{ if (n==0) return (2) ;
  else return(1/2(calcul2(n-2)+2)) ;
}
```

calcul2 ne se termine pas si ***n est impair***
calcul2 se termine si ***n est pair***
∀ n le résultat de calcul1 est égal à 2
∀ n pair le résultat de calcul2 est égal à 2

2) Ecrire une fonction itérative puis récursive qui calcul la somme des n premiers nombres.


- ```
  int sommeIter (int n)
  { int i, s=0 ;
    for(i=1 ;i<=n ; i++)
     s=s+i ;
    return s ;
  }
  ```

- ```
  int sommeIter (int n)
  { int i, s=0 ;
    for(i=n ;i>0 ; i--)
     s=s+i ;
    return s ;
  }
  ```

- ```
  int sommeRec(int n)
  { if (n==0) return 0 ;
    else return(n+somme(n-1)) ;
  }
  ```

Remarque: Le concept de récursivité est spécialement mis en valeur dans les définitions mathématiques. Les mathématiques utilisent plutôt le mot récurrence.
  ```

3) Le plus grand commun diviseur (pgcd):
Le pgcd de deux entiers A et B est le plus grand entier qui divise à la fois A et B.

```
int pgcdRec(int A, int B)
{
  if (B==0) return A ;
  else  return( pgcd(B, A%B);
}
int pgcdIter(int A, int B)
{ int reste;
  while (B !=0)
    { reste=A%B ;
      A=B ;  B=reste;
    }
 return(A);
}
```

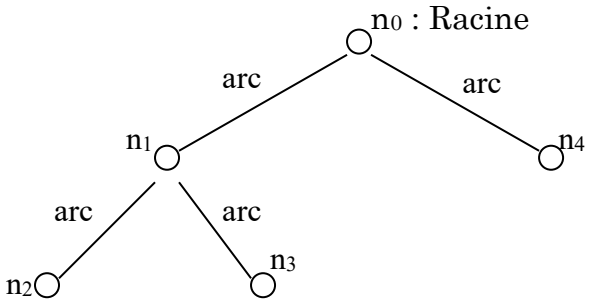
8. Les Arbres

8.1 Définitions :

a) Arbre :

L'arbre est une structure de donnée récursive constituée :

- d'un ensemble de points appelés *nœuds*,
- d'un nœud particulier appelé *racine*,
- d'un ensemble de couples (n_1, n_2) reliant le nœud n_1 au nœud n_2 appelés *arcs* (ou arêtes). Le nœud n_1 est appelé *père* de n_2. Le nœud n_2 est appelé *fils* de n_1.



b) Feuilles :

Les nœuds qui n'ont aucun fils sont appelés feuilles ou nœuds terminaux (les nœuds n_2, n_3 et n_4 sont des feuilles).

c) Chemin :

On appelle chemin la suite de nœuds n_0 n_1 … n_k telle que (n_{i-1} , n_i) est un arc pour tout i ϵ { 0,…,k}. L'entier k est appelé longueur du chemin n_0 n_1 … n_k .
k c'est aussi le nombre d'arcs.
Le nombre d'arcs d'un arbre = nombre de nœuds - 1.

d) Sous-arbre :

Les autres nœuds (sauf la racine n_0) sont constitués de nœuds fils, qui sont eux même des arbres. Ces arbres sont appelés sous-arbres de la racine.
Exemple : Les nœuds n_1 n_2 et n_3 constituent un sous-arbre.

e) Hauteur :

La hauteur d'un nœud est la longueur du plus long chemin allant de ce nœud jusqu'à une feuille.
La hauteur d'un arbre est la hauteur de la racine (nombre de nœuds).

f) Niveau ou profondeur :

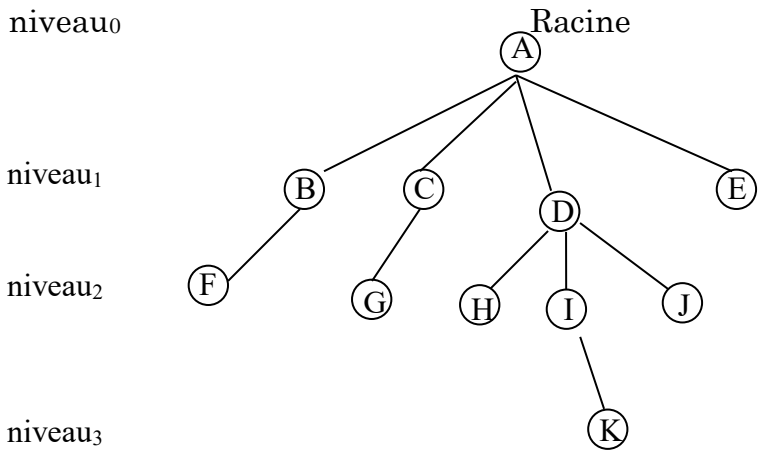
La profondeur d'un nœud est la longueur du chemin allant de la racine jusqu'à ce nœud. Tous les nœuds d'un arbre de même profondeur sont au même niveau.

Exemple : Les nœuds n_1 et n_4 ont la même profondeur et sont donc au même niveau.

g) Ascendance et Descendance :

Soit un nœud ***a*** et un nœud ***b*** s'il existe un chemin du nœud ***a*** au nœud ***b*** on dit que ***a*** est un ascendant de ***b*** ou que ***b*** est un descendant de ***a***.

Exemple récapitulatif:



La racine c'est : A
Les nœuds fils de A sont : B C D E
Le nombre de sous-arbres = 4
Le père de F c'est B
B est un ascendant de F
F est un descendant de B
Les feuilles de l'arbre sont : F G H K J E
La hauteur de l'arbre = 4 (nombre de nœuds)
La longueur du chemin A-F = 2 (nombre d'arcs)
La profondeur de l'arbre = 3
La profondeur du nœud G = 2

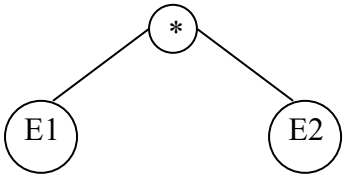
Un arbre peut aussi être représenté sous forme parenthésée :

(A (B(F), C(G), D(H, I(K), J), E))

h) Arbre étiqueté:

Un arbre étiqueté est un arbre dont chaque nœud possède une information ou étiquette. Cette étiquette peut être de nature très variée : entier, réel, caractère, chaine… ou une structure complexe.

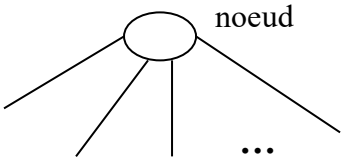
Exemple : on peut représenter une expression par un arbre



E1* E2

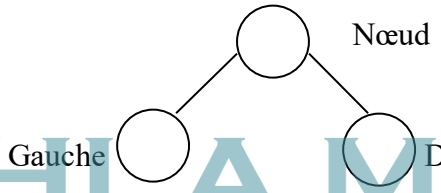
i) Arbre n-aire :

Un arbre n-aire est un arbre dont les nœuds ont au plus n successeurs.



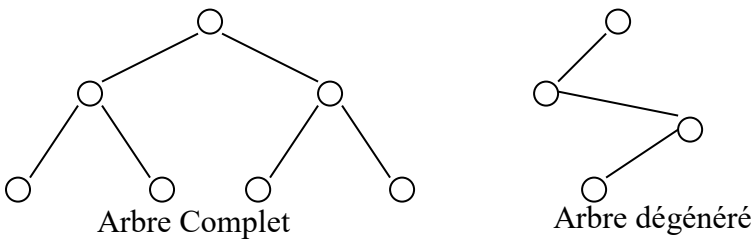
ii) Arbre binaire :

Un arbre binaire est dit binaire si tout nœud de l'arbre a 0, 1, ou 2 successeurs. Ces successeurs sont alors appelés respectivement successeur gauche et successeur droit.



Lorsque tous les nœuds d'un arbre binaire ont deux ou zéro successeurs ont dit que l'arbre est ***homogène*** ou ***complet***

Un arbre binaire est dit ***dégénéré*** si tous ses nœuds n'ont qu'un seul descendant.



Un arbre complet de hauteur ***h*** a un nombre de nœud = 2^h -1 et le nombre de feuilles est $2^{(h-1)}$.

Exemple : h=3 nombre de nœuds = 2^3-1=7 nombre de feuilles = $2^{(3-1)}$ = 4

iii) Arbre binaire équilibré: C'est un arbre binaire tel que les hauteurs des deux sous arbres SAG, SAD (sous arbre gauche, sous arbre droit) de tout nœud de l'arbre diffèrent de 1 au plus. Ou encore le nombre de nœuds de SAG et le nombre de nœuds du SAD diffèrent au maximum de 1.

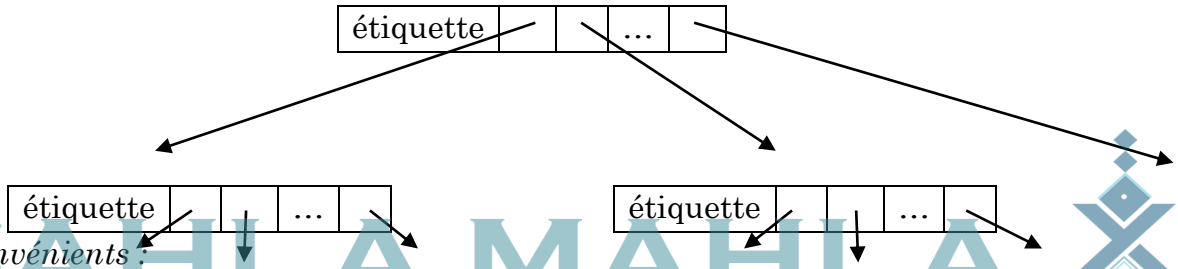
Représentation des arbres

8.2.1 Arbre n-aire :

a) Une manière de représenter un arbre est d'associer à chaque nœud un enregistrement contenant un ou plusieurs champs pour coder l'étiquette et d'un tableau de pointeurs vers les nœuds fils. La taille du tableau est donnée par le nombre maximum de fils des nœuds de l'arbre.

étiquette	P1	P2	…	P3

Déclaration : typedef struct no *arbre ;
typedef struct no { arbre tab[max_fils] ; /* tableau de pointeurs sur des arbres*/
typelem étiquette ; } nœud ;

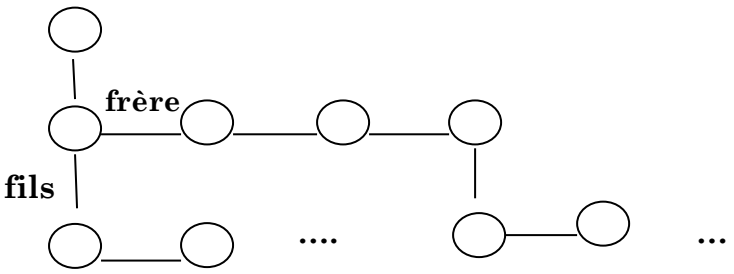


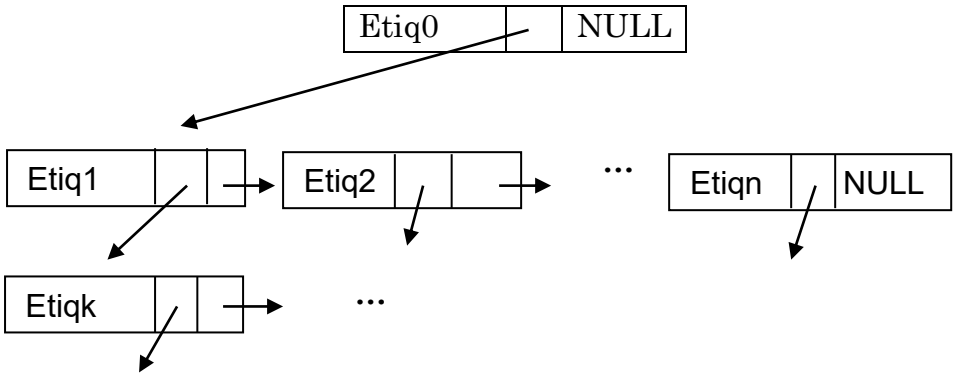
Inconvénients :

- l'arbre contient un petit nombre de nœuds ayant beaucoup de fils. (tableaux de grandes tailles)
- L'arbre contient beaucoup de nœuds ayant peu de fils. (plusieurs tableaux) Ceci conduit à consommer beaucoup d'espace mémoire.

b) Avec deux pointeurs fils et frère.
Afin de contourner l'inconvénient du tableau, on utilise un pointeur vers fils ainée et chaque fils possède un lien vers son frère le plus proche.

Déclaration : typedef struct no *arbre ;
typedef struct no { arbre fils, frère;
typelem étiquette ; } nœud ;



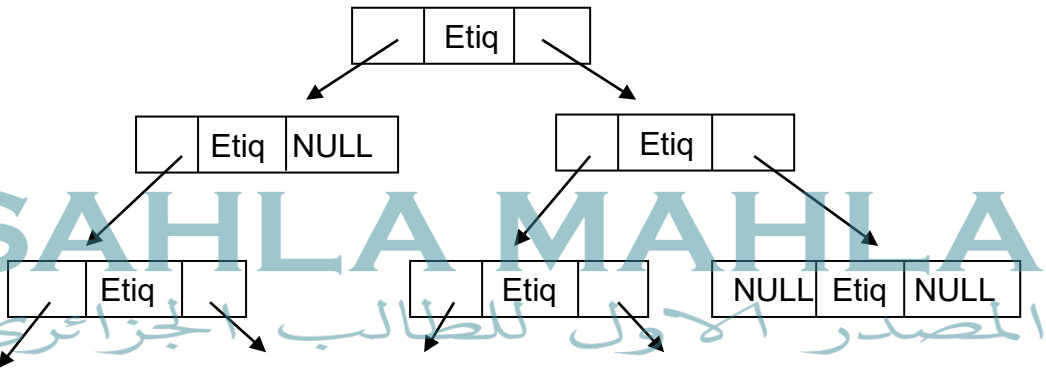


8.2.2 Arbre binaire :

Déclaration : typedef struct no *arbre ;

typedef struct no { arbre gauche, droit ;

typelem étiquette ; } nœud ;



8.3 Parcours d'un arbre

8.3.1 Parcours d'un arbre n-aire

a) En préordre : à partir d'un nœud quelconque on effectue :

- quelque chose sur ce nœud
- l'ensemble des opérations sur le fils ainé
- « « « « « suivant
- …
- l'ensemble des opérations sur le dernier fils.

b) En postordre : à partir d'un nœud quelconque on effectue :

- l'ensemble des opérations sur le fils ainé
- « « « « « suivant
- …
- l'ensemble des opérations sur le dernier fils.
- quelque chose sur ce nœud

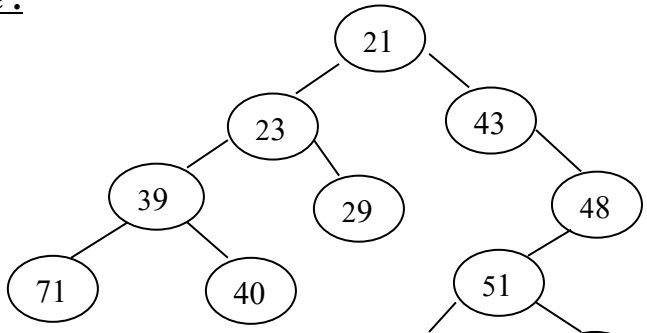
8.3.2 Parcours d'un arbre binaire

a) ***En préordre*** (préfixe) : Racine - Fils gauche - Fils droit (RAC - SAG - SAD[2] ou bien RAC - SAD - SAG).
b) ***En postordre*** (Postfixe) : SAG – SAD - RAC ou bien SAD - SAG - RAC.
c) ***En ordre*** (infixe): SAG - RAC - SAD ou bien SAD - RAC - SAG (*arbre binaire uniquement)*

8.4 Arbre binaire ordonné

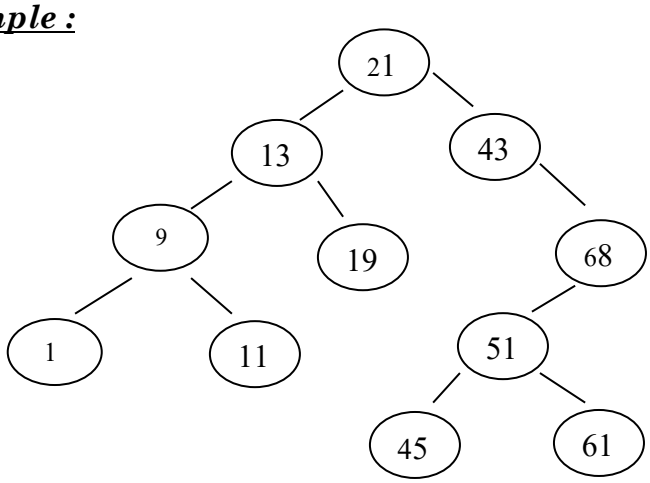
a) **Verticalement :** Un arbre binaire est ordonné verticalement, si la clé de tout nœud non feuille est inférieure (respectivement supérieure) à celle de ses fils (et donc par récurrence à celle de tous ses descendants).

Exemple :



a) **Horizontalement :** Un arbre binaire est ordonné horizontalement (de gauche à droite) si la clé de tout nœud non feuille est supérieure ou égale à toutes celles de son sous arbre gauche et inférieure ou égale à toutes celles de son sous arbre droit. Ce type d'arbre est appelé aussi ***arbre binaire de recherche***.

Exemple :

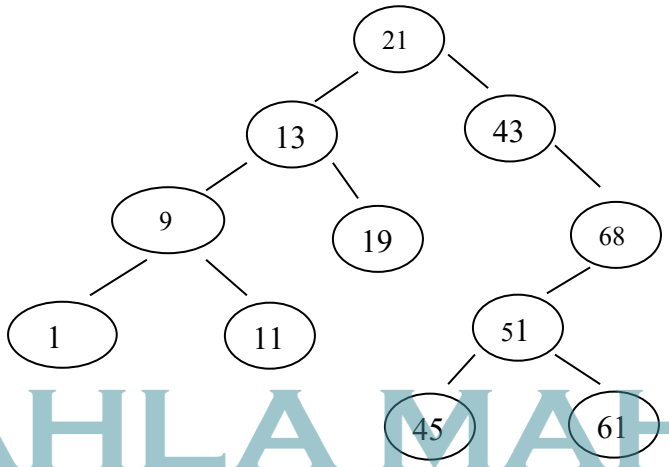


[2] RAC : Racine SAG : Sous Arbre Gauche SAD : Sous Arbre Droit

Inconvénient : Un arbre binaire est ordonné horizontalement on a affaire à une relation d'ordre total (on vérifie facilement que l'arbre est totalement ordonné dans un parcours en ordre, la notion d'ordre vertical est seulement une notion d'ordre partiel (il n'y a pas d'ordre à priori entre deux nœuds frères, (ou plus généralement entre deux nœuds d'un même niveau) c'est pourquoi la recherche dans un arbre binaire ordonné verticalement n'est pas dichotomique et peut conduire à un parcours exhaustif de l'arbre.

8.5Arbre Binaire de Recherche (ABR)

8.5.1 Exemple de parcours d'un ABR:



a) En Préordre :

21 – 13 – 9 – 1 – 11 – 19 – 43 – 68 – 51 – 45 – 61

b) <u>En Postordre :</u>

1 – 11 – 9 – 19 – 13 – 45 – 61 – 51 – 68 – 43 – 21

c) <u>En Ordre :</u>

1 – 9 – 11 – 13 – 19 – 21 – 43 – 45 – 51 – 61 - 68

8.5.1.1 Fonctions récursives de parcours d'un ABR

a) Préordre (Préfixé)

```
void  parcours (arbre A)
{ if (A !=NULL)
   {  afficher(A→etiquette) ;
      parcours(A→gauche) ;
      parcours(A→ droit);
   }
}
```

b) En ordre (Infixé)

```
void  parcours (arbre A)
{ if (A !=NULL)
   {  parcours(A→gauche) ;
      afficher(A→etiquette) ;
      parcours(A→ droit);
   }
}
```

c) En postordre (postfixé)

```
void  parcours (arbre A)
{ if (A !=NULL)
   { parcours(A→gauche) ;
     parcours(A→ droit);
     afficher(A→etiquette) ;
   }
}
```


8.5.1.2 Fonctions itératives de parcours d'un arbre de recherche

a) Préordre (Préfixé)

```
void  parcours (arbre A)
{ pile s=initpile() ;
  empiler(&s,NULL) ;
  while (A !=NULL)
   {  afficher(A→etiquette) ;
      if (A→droit !=NULL) empiler(&s,A→droit);
      if (A→gauche!=NULL) A=A→gauche;
      else desempiler(&s,&A) ;
   }
}
```

b) <u>En ordre (Infixé)</u>

```
void  parcours (arbre A)
{ pile s=initpile() ;
  while (A !=NULL) { empiler(&s,A); A=A→gauche; }
  while (!pilevide(s))
    {  desempiler(&s, &A) ;
       afficher(A→etiquette) ;
       if (A→droit !=NULL)
         { A=A→droit ;
           while( A !=NULL) { empiler(&s,A) ; A=A→gauche);  }
         }
    }
}
```

c) <u>En postordre (postfixé)</u>

```
void  parcours (arbre A)
{ pile pg=initpile(), pd=initpile() ;
  while (A !=NULL)
   {  empiler(&pg,A);
      if (A->droit !=NULL)
          { empiler(&pg,NULL); empiler(&pd, A->droit) ; }
      A=A->gauche;
   }
  while (!pilevide(pg))
   {  desempiler(&pg, &A) ;
      if (A!=NULL) printf("%d  ",A->etiquette) ;
      else { if(!pilevide(pd))
                { desempiler(&pd,&A);
                     if ( A->gauche ==NULL && A->droit ==NULL)
                                printf("%d  ", A->etiquette);
                     else  while( A !=NULL)
                                { empiler(&pg,A) ;
                                  if (A->droit !=NULL)
                                       { empiler(&pg,NULL);empiler(&pd,A->droit) ;}
                                  A=A->gauche;
                                 }
                }
           }
    }
 }
```

8.5.2 Recherche dans un ABR

a) Fonction recherche itérative :

```
int recherche(arbre A, typelem val)
{  int trouv=0 ;
   while(trouv==0 && A !=NULL)
    if (val==A→etiquette) trouv=1;
    else if (val <A→etiquette) A= A→gauche ;
           else A=A→droite ;
  return (trouv) ;
}
```

b) Fonction recherche récursive

```
int recherche(arbre A, typelem val)
{  If (A ==NULL) return 0 ;
   else if (val==A→etiquette) return 1;
        else if (val <A→etiquette) return recherche(A→gauche,val);
             else return recherche(A→droite,val) ;
}
```

8.5.3 Insertion d'un élément dans un ABR

Remarques : - Les étiquettes dans un arbre binaire ordonné horizontalement sont toujours uniques (elles ne sont pas dupliquées), donc l'élément à insérer est toujours une feuille.

- On utilise une autre fonction de recherche qui retourne (en paramètre) l'adresse de l'élément précédent.


```
int Recherche(arbre A, arbre *prd, typelem Val)
{  if (A==NULL) return(0);
   else { if (A->etiquette==Val) return(1);
          else { if (A->etiquette>Val) return(Recherche(A->gauche, &A ,Val));
                 else return (Recherche(A->droit, &A ,Val));
               }
        }
}
```

```
void Insert (arbre *racine,typelem Val)
{ arbre prd=NULL, A;
   If (Recherche(*racine,&prd,Val)==1) printf("Existe deja\n");
   else { A=(arbre)malloc(sizeof(noeud));
          A->etiquette=Val;   A->gauche=NULL;  A->droit=NULL;
          if (prd!=NULL)
               if (Val<prd->etiquette) prd->gauche=A;
               else prd->droit=A;
          else *racine=A; /* Quand l'arbre est vide  */
        }
}
```

8.5.4 Suppression d'un élément dans un ABR

Trois types de suppressions se présentent à nous :

a) Si l'élément est une feuille, alors on le supprime simplement. On a deux cas :

a.1) supprimer une feuille qui se trouve à gauche d'un nœud.
Exemple : prd->gauche=NULL ; free(A) ;

a.2) supprimer une feuille qui se trouve à droite d'un nœud.
Exemple : prd->droit=NULL ; free(A) ;

b) Si l'élément n' a qu'un seul descendant, alors on le remplace par ce descendant. On a quatre cas :

b.1) Exemple : prd->droit=A->droit ; free(A) ;

b.2) Exemple : prd->droit=A->gauche ; free(A) ;

b.3) Exemple : prd->gauche=A->droit ;free(A) ;

b.4) Exemple : prd->gauche=A->gauche ; free(A) ;

c) Si l'élément a deux descendants, on le remplace au choix soit par :

- L'élément le plus à droite du SAG (la valeur max)
- L'élément le plus à gauche du SAD (la valeur min)

On a deux cas :

c.1) Exemple : ***/* R l'élément le plus à gauche */***

```
A->etiquette = R->etiquette ;
A->gauche=R->gauche ;
free(R) ;
```

c.2) Exemple :

```
A->etiquette = R->etiquette ;
prd->droit=R->gauche ;
free(R) ;
```

```
void suppFeuille(arbre prd, arbre A)
{   if (A->etiquette<prd->etiquette) prd->gauche=NULL;
    else prd->droit=NULL;
    free(A);
 }

void supp1Fils(arbre prd, arbre A)
{ if (A->gauche==NULL)
          if (A->etiquette<prd->etiquette) prd->gauche=A->droit;
          else prd->droit=A->droit;
    else  if (A->etiquette<prd->etiquette)  prd->gauche=A->gauche;
         else prd->droit=A->gauche;
    free(A) ; A=NULL;
 }
void remplace(arbre R, arbre A, arbre prd)                    /* 2 descendants */
{ if (R->droit!=NULL)  { prd=R;  remplace(R->droit, A, prd); }
  else { A->etiquette=R->etiquette;
          if (prd!=NULL) prd->droit=R->gauche;
          else A->gauche=R->gauche;
          free(R);
        }
 }
 void Supprim(arbre *racine, typelem Val)
{ arbre A, prd=NULL;
  if (Recherche(*racine, &prd, Val)==0)
                printf(" L'élément à supprimer n'existe pas\n");

  else {  if (val<prd->etiquette)    A=prd->gauche;   else A=prd->droit;
              /* Racine */
           if (prd==NULL && A->gauche==NULL && A->droit==NULL)
                { free(A);  printf("Arbre Vide\n");  *racine=NULL;  }

           else   /*  Feuille  */
                if (A->gauche==NULL && A->droit==NULL)  suppFeuille(prd, A) ;

                        /* 1 seul descendant */
               else if (A->gauche==NULL)  || (A->droit==NULL) supp1Fils(prd, A) ;

                                /* 2 descendants */
                           else remplace(A->gauche, A, NULL);

        }                                                  Sous arbre gauche
}
```

8.5.5 Construction d'un arbre binaire de recherche

```
void constarbre(tab t, int i, int n, arbre *racine)
{
    if (i<n) { Insert(racine, t[i]);
               constarbre(t, i+1, n, racine);
             }
}

/*  Autre fonction supprime */

void Supprim(arbre *racine, typelem Val)          L'adresse de VAL l'élément
{ arbre A, prd=NULL;                                  à supprimer
  if (Recherche(*racine, &prd, Val, &A)==0)
              printf(" L'élément à supprimer n'existe pas\n");
  else { if (prd==NULL && A->gauche==NULL && A->droit==NULL) /* Racine */
              { free(A);  printf("Arbre Vide\n");  *racine=NULL;}
         else {   /*  Feuille  */
                if (A->gauche==NULL && A->droit==NULL)
                 { if (Val<prd->etiquette) prd->gauche=NULL;
                   else prd->droit=NULL;
                 free(A);
                 }
                else if (A->gauche==NULL)  /* 1 seul descendant */
                      { if (Val<prd->etiquette) prd->gauche=A->droit;
                        else prd->droit=A->droit;
                       free(A);
                       }
                     else if (A->droit==NULL)  /* 1 seul descendant  */
                             { if (Val<prd->etiquette)prd->gauche=A->gauche;
                               else prd->droit=A->gauche;
                               free(A);
                              }
                          else remplace(A->gauche, A, NULL);
              }
         }
}
```

Sous arbre gauche

Chapitre 1 : [illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

- [illegible]
- [illegible] :
  - [illegible] ?
  - [illegible] ?

[illegible] :

- [illegible]
- [illegible]
- [illegible]
- [illegible]

Exemple :

[illegible]

b. Les Variables Dynamiques :

[illegible]

c. Les Variables Pointeur :

[illegible]

Les opérations de base

[illegible]

Déclaration :

[illegible]

Exemple : [illegible]

[illegible]

[illegible]

Soit P un polygone qui se colle sur lui-même, et A une variable qui représente la valeur lue :

[illegible]

[illegible]

Instruction [illegible] affecte la valeur de A à la variable P. Dans la représentation algorithmique, cette opération s'écrit $P \leftarrow A$ ou P prend A ou encore $P := A$.

Une longue [illegible] affecte [illegible] à [illegible].

[illegible]

« [illegible] » : affiche le contenu de l'écran entièrement effacé par la [illegible] « [illegible] »

Une longue [illegible] affecte [illegible] à la variable P dans un [illegible] $P \leftarrow 2$

Exemple : soit A une variable contenant la valeur 10. Si une variable nommée la valeur de A et P se présente :

Après les instructions :

$P \leftarrow 20$, P prend [illegible] A

[illegible]

[illegible]

[illegible]

a. [illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

b. [illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]	[illegible]	[illegible]	
[illegible]	[illegible]	[illegible]	
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]	
[illegible]	[illegible]	[illegible]	
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]	
[illegible]	[illegible]	[illegible]	
[illegible]	[illegible]	[illegible]	

[illegible]

[illegible]	[illegible]	[illegible]	
[illegible]	[illegible]	[illegible]	
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]	

[illegible]

[illegible]

1. [illegible]
2. [illegible]
3. [illegible]
4. [illegible]
5. [illegible]
6. [illegible]
7. [illegible]

[illegible]

a) [illegible]

```
[illegible]
        [illegible] ;
        [illegible] ;
    [illegible] ;
[illegible] ;

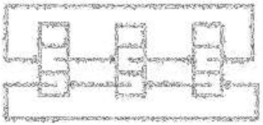
[illegible]
    [illegible]
    [illegible]
            [illegible] ;
            [illegible] ;
        [illegible] ;
    [illegible] ;
```

b) [illegible]

```
[illegible] ;
[illegible]
```

c) [illegible]

```
[illegible]
[illegible] ;
[illegible]
    [illegible] ;
    [illegible]
[illegible] ;
```



1 Introduction: Problèmes et programmes

Le but en analyse d'algorithmes est d'étudier le fonctionnement d'un algorithme. Il s'agit, pour les problèmes solubles, de démontrer que l'algorithme est correct (il résout correctement le problème et il termine toujours) et aussi d'estimer les ressources nécessaires au déroulement de la solution considérée (calculer sa complexité).

Dans ce chapitre, nous introduisons les bases du calcul de la complexité d'un algorithme.

La *complexité* d'un algorithme consiste à évaluer la quantité de ses ressources. Les principales ressources qui nous intéressent sont les fonctions temps d'exécution et espace mémoire nécessaire.

Pour formaliser ces notions on doit distinguer la notion de problème de celle d'instance.

1.1 Notion de problème

Un problème est une question qui a les propriétés suivantes:

1. elle est générique (s'applique à un ensemble d'éléments);
2. toute question posée pour chaque élément admet une réponse;

Exemple 1.1 *1. Déterminer si un entier donné est pair ou impair;*

2. déterminer le maximum d'un ensemble d'entiers donnés

3. trier une suite d'entiers donnés, etc.

1.2 Notion d'instance de problème

L'instance d'un problème c'est la question générique posée ou appliquée à un élément.

Exemple 1.2 *1. L'entier* 15 *est-il pair ou impair?*

2. déterminer le maximum de l'ensemble $\{1, 5, -14, 0, -5\}$

3. trier la suite précédente.

1.3 La solution d'un problème

Cette notion est formellement définie par la notion de *procédure effective*.

Définition 1.3 *Une procédure effective est définie en terme d'un langage accepté par une machine de Turing.*

2 La complexité d'un algorithme

La complexité d'un algorithme a pour but de déterminer la quantité de ressources nécessaires à l'exécution de cet algorithme en fonction de la taille des données.

Ces ressources peuvent être la quantité de mémoire utilisée, la largeur d'une bande passante, le temps de calcul etc. Nous nous intéressons plus souvent au temps et à la mémoire. Le but est de pouvoir identifier, face à plusieurs algorithmes qui résolvent un même problème, celui qui est le plus efficace (le plus rapide et/ou qui consomme le moins d'espace mémoire).

Il s'agit donc de trouver une équation qui relie le temps d'exécution à la taille des données. Nous pourrons ainsi comparer deux algorithmes qui résolvent le même problème en comparant le rapport de leur équation.

Exemple 2.1 *1. Calculer le nombre de comparaisons d'éléments dans un algorithme de tri d'une liste d'entiers donnés en ordre croissant.*

2. Calculer le nombre d'opérations exécutées dans un produit de deux matrices $n \times n$.

Plusieurs algorithmes peuvent résoudre un même problème. L'analyse des algorithmes permet de choisir la meilleure solution qui résout un problème donné.

Exemple 2.2 *Calcul du maximum de quatre valeurs a, b, c, d:*
Solution1:

```
int maximum (int a, int b, int c, int d) {

int max = a;

if (b > max) max = b;
if (c > max) max = c;
if (d > max) max = d;
```

```
return max;
}
```

Solution2:

```
int maximum (int a, int b, int c, int d) {

if (a > b)
    if(a > c)
        if (a > d) return a;
              else return d;
          else
             if (c > d) return c;
               else return d;
        if (b >c )
            if (b > d) return b;
                  else return d;
         else
           if (c > d) return c;
                else return d;
}
```

Les deux solutions exigent exactement 3 comparaisons pour déterminer la réponse bien que la solution 1 soit plus simple à comprendre. Elles sont de même complexité temporelle pour une exécution sur machine. Mais en termes d'espace, la solution 1 exige un espace supplémentaire pour stocker le max. La quantité d'espace supplémentaire étant insignifiante, ces deux solutions sont aussi équivalentes en complexité spatiale. L'évaluation de l'efficacité d'un algorithme en termes d'espace occupé et la comparaison entre algorithmes se fait toujours pour des grandes tailles de données.

Mesurer la complexité d'un algorithme, avant son exécution permet "de donner une idée, à l'avance" sur le temps que cet algorithme va mettre pour terminer et retourner le résultat.

2.1 Comment déterminer le temps d'exécution d'un algorithme?

Il n'est pas nécessaire, à priori, de connaître la valeur *exacte* du temps d'exécution d'un algorithme, mais il suffit d'une *approximation* de cette

valeur. On pourra mesurer le temps exact une fois le programme lancé sur machine.

La complexité temporelle (ou temps d'exécution d'un algorithme) est une approximation du nombre d'opérations que cet algorithme exécute en fonction de la taille des données.

La valeur approchée de ce temps s'obtient à l'aide d'une fonction mathématique que l'on doit déterminer et qui borne la croissance du temps en fonction des données.

Par exemple:

Exemple 2.3 *Calcul du maximum d'une suite.*

```
int maximum (tab t, int n) {

int max = t[0];

for (i=1; i<n; i++)
if (t[i] > max) max = t[i];

return max;
}
```

L'analyse:

1. Si la liste est triée en ordre décroissant on ne fera qu'une seule affectation, celle qui est avant la boucle.

2. Si la liste est triée en ordre décroissant, on fera n affectations, une avant la boucle et $n-1$ dans la boucle.

3. Si $n = 10$, il y a 10! façons d'arranger ces nombres. Si le max est en première position, on fera une affectation, s'il est en 2ème position, on en fera deux, s'il est en 3ème position, on en fera 3 et ainsi de suite. S'il est en dernière position on fera n affectations.

Nous venons de voir que la valeur du temps que met un algorithme à s'exécuter dépend aussi de la répartition des données (structure triée en ordre croissant ou décroissant ou bien non triée). L'exemple suivant montre le nombre de décalages dans un tri-selection où on compare les éléments 2 à 2 et on décale à droite les élément mal placés:

Exemple 2.4 *Soit la suite d'entiers* $\{8, 2, 4, 9, 3, 6\}$

L'élément coloré donne la position du début des décalages à droite à faire dans chaque ligne, à partir de la suite donnée. Le traitement s'arrête (ligne 8) avec une suite triée.

1.)	***8***	2	4	9	3	6
2.)	2	***8***	4	9	3	6
3.)	2	4	8	***9***	3	6
4.)	2	4	***8***	3	9	6
5.)	2	***4***	3	8	9	6
6.)	2	3	4	8	***9***	6
7.)	2	3	4	***8***	6	9
8.)	2	3	4	6	8	9

Pour $n = 6$ nous avons 8 lignes de traitement. Nous pouvons admettre, intuitivement, que:

1. pour $n > 6$ le nombre de lignes de traitement augmente, et que les séquences plus courtes soient plus faciles à traiter.

2. un tableau déjà trié "est rapidement trié" alors qu'un tableau trié dans le sens inverse sera trié en temps plus long. Cependant la distribution des données est une information difficile à obtenir car elle est estimée expérimentalement. Elle permet de calculer "la complexité en moyenne".

3. La complexité ne s'évalue pas sur les instances mais sur l'algorithme.

L'analyse de performances d'un algorithme est indépendante du type de la machine sur laquelle il s'exécute. Elle ne fournit pas le nombre exact d'opérations mais un ordre de grandeur. En analyse d'algorithme, il n'y a pas de différences entre une solution qui fait N opérations et une autre qui fait $N+300$ opérations, car N et $N+300$ tendent vers la même limite quand N tend vers l'infini.

2.2 Types de complexité

Il existe trois types de complexité:

1. **la complexité du meilleur cas**

   C'est, par exemple pour l'algorithme du tri d'un tableau, le cas où le tableau donné est déjà trié. Cette complexité n'est pas très intéressante

car tous les algorithmes réagissent de la même manière pour ce cas, elle ne permet pas de distinguer deux solutions. Cependant elle peut permettre d'éliminer des solutions très coûteuses même pour le meilleur cas!

2. **La complexité en moyenne**

   Elle nécessite la connaissance de la distribution des données, c'est-à-dire les fonctions de probabilités sur les données qui peuvent être obtenues après avoir effectué plusieurs tests expérimentaux.

3. **La complexité du cas pire**

   Elle fournit une borne supérieure de la ressource (par exemple, le temps d'exécution) qui indique que dans toutes les situations l'algorithme ne peut pas dépasser la valeur de cette borne. C'est donc une garantie et c'est ce que nous cherchons toujours à obtenir.

Il s'agit donc de trouver une équation qui relie le temps d'exécution à la taille des données. Nous pourrons ainsi comparer deux algorithmes qui résolvent le même problème en comparant le rapport de leur équation et choisir le plus rapide.

2.3 La complexité asymptotique

En pratique, il est difficile de calculer de manière exacte la complexité d'un algorithme (le nombre d'opérations pour la complexité temporelle);

La complexité *asymptotique* est une approximation du nombre d'opérations que l'algorithme exécute en fonction de la donnée d'entrée.

Elle est "asymptotique" parce qu'elle prend en compte une donnée de grande taille et ne retient que le terme de poids fort dans la formule et ignore le coefficient multiplicateur.

Exemple 2.5 *Soit la donnée n de grande taille et $T(n)$ la complexité exprimée par la formule suivante:*

$$T(n) = 10 * n^3 + 3 * n^2 + 5 * n + 1$$

Le terme de poids fort est $10 * n^3$. En ignorant le coefficient nous dirons que $T(n)$ est bornée par une fonction polynomiale cubique et on note cela par:

$$T(n) = \mathcal{O}(n^3)$$

3 Comparaison de fonctions asymptotiques

Comme nous comparons les nombres, il est aussi possible de comparer les fonctions asymptotiques.

3.1 Les notations de Landau

Les notations de Landau sont des formules mathématiques qui décrivent les comparaisons de fonctions asymptotiques.

1. **La notation $\mathcal{O}$**

   Elle donne une borne sup de la complexité.

   $$f(n) = \mathcal{O}(g(n)) \text{ ssi } \exists \text{ des constantes positives } c \text{ et } n_0 \text{ telles que } f(n) \leq c * g(n) \ \forall n \geq n_0$$

   Par exemple: $f(n) = 3 * n + 2 = \mathcal{O}(n)$ car $3 * n + 2 \leq 4 * n \ \forall n \geq 2$

2. **La notation Ω**

   Elle donne une borne inf de la complexité.

   $$f(n) = \Omega(g(n)) \text{ ssi } \exists \text{ des constantes positives } c \text{ et } n_0 \text{ telles que } f(n) \geq c * g(n) \ \forall n \geq n_0$$

   Par exemple: $f(n) = 3 * n + 2 = \Omega(n)$ car $3 * n + 2 \geq 3 * n \ \forall n \geq 2$

3. **La notation Θ**

   Elle encadre la complexité entre deux bornes.

   $$f(n) = \Theta(g(n)) \text{ ssi } \exists \text{ des constantes positives } c_1, c_2 \text{ et } n_0 \text{ telles que } c_1 * g(n) \leq f(n) \leq c_2 * g(n) \ \forall n \geq n_0$$

   Par exemple: $f(n) = 3 * n + 2 = \Theta(n)$ car on a à la fois:

   $$f(n) = \mathcal{O}(n) \text{ et } f(n) = \Omega(n)$$

3.2 Vocabulaire

Il existe un vocabulaire courant des fonctions de complexité. Supposons que T(n) est une complexité temps, alors nous dirons:

1. si $T(n) = \mathcal{O}(1)$

   On a une complexité **constante**, indépendante de la taille des données. C'est le cas optimal d'une complexité donc les algorithmes les plus rapides.

2. si $T(n) = \mathcal{O}(n^k)$

   Cette complexité est dite **polynomiale**:

   - si $k = 1$ elle est dite *linéaire*; c'est le cas de la recherche séquentielle dans une liste;
   - si $k = 2$ elle est dite *quadratique*. C'est la cas par exemple du tri par permutations;
   - si $k = 3$, elle est dite *cubique* (par exemple: le produit de deux matrices);
   - si $k = 0$, c'est la complexité constante: $\mathcal{O}(n^0) = \mathcal{O}(1)$ vue précédemment.

3. si $T(n) = \mathcal{O}(\log n)$ ou bien $\mathcal{O}(n * \log n), \ldots$: elle est dite *logarithmique*;

4. si $T(n) = \mathcal{O}(2^n)$ ou bien $\mathcal{O}(n!), \ldots$ elle est dite *exponentielle*; c'est le cas des algorithmes les plus lents.

   Par exemple si $T(n) = 2^n$, pour $n = 60$ on a $T(n) = 1,15 * 10^12$ secondes et

$$1,15 * 10^{12}\ s \approx 36558 \text{ ans}$$

4 Exemples

4.1 La recherche séquentielle dans une suite

On peut supposer que la suite est stockée dans un tableau ou bien dans une liste. La recherche doit faire un parcours séquentiel et tester les cases l'une après l'autre, depuis la première case jusqu'à trouver la valeur ou bien arriver à la fin de la suite sans la trouver. Si n est le nombre d'éléments de la suite, nous ferons au plus n tests. Donc on a une complexité linéaire, soit $T(n) = \mathcal{O}(n)$

4.2 La recherche dichotomique dans un tableau trié

L'algorithme calcule le milieu du tableau de taille n et teste si la valeur se trouve en cette position du tableau. Si oui la recherche termine avec une seule comparaison, sinon on recherchera la valeur dans un tableau de taille $n/2$.

Dans le tableau de taille $n/2$ on calcule son milieu et on teste si la valeur se trouve en cette position. Si oui la recherche termine et on aura au total 2 comparaisons, sinon on continue à rechercher la valeur dans un tableau de taille $(n/2)/2$, c'est-à-dire, dans un tableau de taille $n/2^2$.

On procède de la même manière dans ce sous-tableau de taille $n/2^2$: on calcule son milieu et on teste si la valeur se trouve en cette position. Si oui la recherche termine après 3 comparaisons, sinon on continue la recherche dans un tableau de taille $(n/2^2)/2 = n/2^3$ et ainsi de suite;

Pour savoir au bout de combien de fois nous pourrons continuer à diviser la suite, nous supposons (pour simplifier) que la taille initiale du tableau est $n = 2^k$.

Si à chaque étape on doit diviser le tableau en deux, sa taille se réduit de moitié à chaque étape et nous pourrons faire cela au plus k fois.

Le nombre maximum de tests que l'on fait correspond à k et nous déterminons sa valeur ainsi:
$n = 2^k$ Alors $\log n = k * \log 2$, soit $k = \log n / \log 2$ d'où

$$\boxed{k = \log_2 n}$$

Ainsi la recherche dichotomique a une complexité logarithmique.

Puisque la fonction $\log n \leq n \ \forall n \geq 1$ alors la recherche dichotomique est plus rapide que la recherche séquentielle.

5 Quelques règles pratiques

Le nombre d'opérations qu'un algorithme séquentiel effectue peut être estimé en composant les règles suivantes selon la séquence des instructions (instruction conditionnelles, les itérations, les appels de fonction etc.) de cet algorithme. Nous donnons ci-dessous quelques règles pratiques de calcul de la complexité temporelle.

Soit $f(\ldots)$ une fonction qui résout un problème donné:

5.1 Lorsque f est une conditionnelle

Supposons l'algorithme suivant:

```
fontion f(.....): type
...
debut
 si (condition) alors g1(.....)
                sinon g2(.....);
fin;
```

Alors

$$T(f(...)) = Max(T1(g1(...), T2(g2(...)))$$

5.2 Lorsque f est une itération

Supposons l'algorithme suivant:

```
fontion f(.....): type
...
debut
 pour i<-1 à n faire
                g(.....);
               fait
fin;
```

et g est indépendante de i, alors

$$T(f(...)) = n * T1(g(...))$$

Si g est dépendante de i alors

$$T(f(...)) = \Sigma_{i=1}^{i=n} T1(g(i, ...))$$

Par exemple:

Exemple 5.1 *cas de deux itérations séquentielles*

```
Action ExoiComplexite;

constante max=100;
entier S, i;
T: tableau[max]de entier;
//      Traitement1
debut
1: lire (x, taille);
2: S<- 0;

3: pour i<-1 à n faire lire (T(i));
4: pour i<-1 à n faire
                  s<- S+i;
                fait
5: ecrire (S),
fin
```

Alors $T(n) = \mathcal{O}(n)$ car dans les lignes 1 et 2 et 5 nous avons une seule opération dans chaque ligne puis les lignes 3 et 4 respectivement n lectures et n additions. Donc au total $2n + 3$ opérations ce qui est en $\mathcal{O}(n)$ puis que $2n + 3 \leq 3n$ dès que $n > 3$.

Exemple 5.2 *cas de deux itérations imbriquées*

```
Action Exo2Complexite;

constante max=100;
entier S, i;
T: tableau[max]de entier;
//      Traitement2
debut
1: lire (x, taille);
2: S<- 0;

3: pour i<-1 à n-1 faire
    pour j<-i+1 à n faire
                  s<- S+1;
                fait
4: ecrire (S),
fin
```

Alors le nombre de fois que l'instruction $S < -S + 1$ s'exécute est ainsi estimé:

- *pour $i = 1$ on la calcule $n - 1$ fois ($j = 2$ à n)*
- *pour $i = 2$ on la calcule $n - 2$ fois ($j = 3$ à n)*
- *pour $i = 3$ on la calcule $n - 3$ fois ($j = 4$ à n), etc.*
- ...
- *pour $i = k$ on la calcule $n - k$ fois ($j = k + 1$ à n), etc*
- ...
- *pour $i = n - 1$ on la calcule 1 fois ($j = n$ à n)*

Alors La somme de ces calculs (pour $i = 1$ à $n - 1$ vaut:

$$(n-1) + (n-2) + \cdots + 2 + 1 = n * (n-1)/2$$

$$T(n) = \mathcal{O}(n^2)$$

Exemple 5.3 *cas d'une conditionnelle*

Si les traitements des deux exemples précédents se trouvent dans une instruction de type:

```
Si (condition) alors Traitement1
               sinon Traitement2
fsi
```

et Traitement1 est en $\mathcal{O}(n)$ et Traiment2 est en $\mathcal{O}(n^2)$ alors cette conditionnelle est en $\mathcal{O}(Max(n, n^2)$ donc en $\mathcal{O}(n^2)$.

Chapitre 4 : Les Piles

I. DEFINITIONS

I.1 Définition d'une Pile : Une pile est une collection d'éléments de même type dont le seul élément directement accessible est le *dernier introduit* dans la pile.

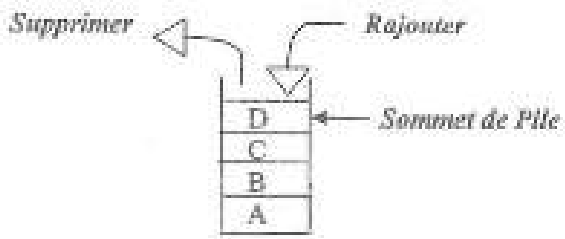
Le dernier élément introduit s'appelle ***sommet de pile*** et joue un rôle particulier, puisque tout accès à la pile se fait par cet élément. En effet, l'accès à un élément quelconque de la pile nécessite le retrait de tous les éléments qui le précèdent. L'accès aux éléments de la pile se fait donc de manière séquentielle. Les éléments sont retirés dans l'ordre inverse de celui de leur introduction.

Une pile est une structure de donnée de type *LIFO*
(« Last In, First Out » = « dernier arrivé premier sorti »).

Remarque : l'état de la pile ne doit pas être changé suite à une opération de consultation : il faut remettre en place tous les éléments retirés.

Exemples : pile d'assiettes, pile de dossiers, …

Schématiquement, une pile est représentée comme suit :



I.2 Les Opérations sur les Piles :

Les opérations sur les piles sont les suivantes :

- ***Ajout*** d'un élément : l'action consistant à ajouter un nouvel élément au sommet de la pile s'appelle ***empiler***, puis mettre à jour ce sommet.
- ***Suppression*** d'un élément : l'action consistant à retirer un élément, celui qui est au sommet, s'appelle ***désempiler***, à condition que la ***pile ne soit pas vide***.
- ***Consultation*** : consulter le sommet de la pile sans affecter ni le contenu ni la position du sommet.

I.3. Utilisation des Piles dans les Applications Informatiques

Les piles sont des structures de données utilisées dans divers domaines de l'informatique. Parmi lesquels, nous citons :

- ***Par un compilateur, lors des appels de fonctions*** : Avant de se brancher vers la fonction appelée, le compilateur sauvegarde l'adresse de retour et les variables du programme appelant, afin de les restituer au retour de la fonction. De plus, les retours se font dans le sens inverse des appels, ce qui coïncide bien avec la structure LIFO de la pile.
- ***Par un compilateur, pour l'évaluation des expressions arithmétiques :*** ce dernier point est détaillé dans ce qui suit.
- ***Par un système d'exploitation, pour la gestion des interruptions :*** pour la sauvegarde et la restitution de contexte de processus.
- ***Dans la théorie des langages :*** pour l'implémentation des automates à piles[1].

II. REPRESENTATION DES PILES EN MEMOIRE :

Il existe deux représentations (implémentations) des Piles en mémoire : contiguë et chaînée. La manipulation des opérations sur les piles dépend du type de la représentation.

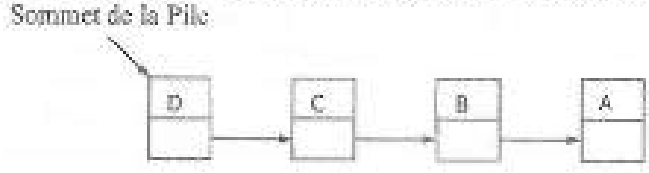
II.1 Représentation d'une Pile par un Tableau

On peut représenter une pile par un tableau (forme contiguë), alloué d'une manière statique ou dynamique. La déclaration de la pile doit alors tenir compte de la taille maximale, c'est-à-dire si le tableau est plein, il n'est pas possible de rajouter des éléments.

Il est donc nécessaire avant de rajouter un élément dans la pile de tester si la ***pile n'est pas pleine***.

II.2 Représentation d'une Pile par une Liste Chainée

Une pile peut être représentée par une liste chainée où l'ajout ou le retrait d'un élément se fait toujours par la tête de la liste, appelée dans ce cas *sommet de pile*.



[1] Les automates à pile sont les reconnaisseurs des langages algébriques.

III. PRIMITIVES DE MANIPULATION DES PILES

Ces primitives correspondent à des fonctions de base de manipulation de la pile. Leur écriture dépend de l'implémentation de la pile (contigüe ou chaînée) et du type des éléments de la pile.

InitPile : permet d'initialiser la pile

PileVide : permet de vérifier si la pile est vide.

PilePleine : permet de vérifier si la pile est pleine (dans le cas d'une représentation contiguë).

SommetPile : retourne l'élément du sommet dans une variable, sans le désempiler.

Empiler : permet d'ajouter un élément à la pile (au dessus de l'élément du sommet).

Désempiler : permet de retirer (supprimer) un élément de la pile (celui du sommet) et retourne sa valeur dans une variable.

III.1 Opérations de Manipulation des Piles dans les deux Représentations

Dans ce cours, on considère une pile d'éléments de type TypeElement. On écrira les primitives dans les deux types d'implémentation (contigüe et chaînée).

A) Représentation Contigüe (Cas d'Allocation Statique)

1) Déclaration

```
constante   max 100
type Pile = Enregistrement
                T : tableau [max] TypeElement ;
                Sommet : entier ;
            FinEnre
variable p : Pile ;
```

2) Initialisation

```
Fonction  InitPile ( ) : Pile
Variable p : Pile
Debut
   p.Sommet ←0;
   retourner (p);
Fin
```

3) Test si la pile est vide

```
Fonction PileVide (E/ p : Pile) : booleen
  Debut  si (p.sommet=0) alors retourner (vrai) ;
                         sinon retourner (faux) ;
         fsi
  Fin
```

4) Test si la pile est pleine

```
Fonction PilePleine (E/ p : Pile) : booleen
Debut
  si (p.sommet=max) alors retourner (vrai) ;
                    sinon retourner (faux) ;
  fsi
Fin
```

5) Consultation du sommet de la pile

```
Fonction SommetPile(E/ p : Pile) : TypeElement
variable x : TypeElement ;
Debut
  x← p.T[p.sommet];
  retourner (x) ;
Fin
```

6) Ajout d'un element

```
Procedure Empiler (E/S p: Pile, E/ x : TypeElement)
Debut
  p.sommet ←p.sommet+1 ;
  p.T[p.sommet]←x ;
Fin
```

7) Suppression d'un élément

```
Procedure Désempiler (E/S p: Pile, E/S x : TypeElement)
Debut
   x← p.T[p.sommet] ;
   p.sommet ←p.sommet-1 ;
Fin
```

B) Représentation Chainée

1) Déclaration

```
type Element = Enregistrement
                  info : TypeElement ;
                  suivant : ^ Element;
               FinEnreg
type Pile : ^Element ;
variable p : Pile;
```

2) Initialisation

```
Fonction InitPile ( ) : Pile
Debut
 retourner (nil)
Fin
```

3) Test si la pile est vide

```
Fonction PileVide (E/ p: Pile) : booleen
Debut
 si p=nil alors retourner (vrai)
         sinon retourner (faux) ;
 fsi
Fin
```

4) Consultation du sommet de la pile

```
Fonction SommetPile (E/ p : Pile) : TypeElement
variable  x : TypeElement
Debut
  x= ^p.info;
  retourner (x) ;
Fin
```

5) Ajout d'un element

```
Procedure Empiler (E/S p : Pile , E/ x : TypeElement)
variable temp : Pile ;
Debut
  temp←Allouer(TailleDe(Pile)) ;
  ^temp.inf←x
  ^temp.suivant←p ;
  p=temp ;
Fin
```

6) Suppression d'un élément

```
Procedure Desempiler (E/S p : Pile , E/S x : TypeElement)
variable temp : Pile ;
Debut
  x← ^p.info ;
  temp←p ;
  p←^p.suivant ;
  liberer (temp)
Fin
```

Exemple 1
Ecrire une fonction qui lit des entiers et les stocke dans une pile. L'arrêt se fera dès la rencontre de la valeur –1.

```
Fonction StockerPile( ) : Pile
Variable p : Pile; x : entier;
Debut
  P←InitPile();
  Lire(x);
  Tantque( x≠-1) faire
                    Empiler(p, x) ;
                    Lire(x) ;
                 fait ;
   Retourner (p) ;
Fin;
```

Exemple 2
Soit une pile d'entiers P et une valeur val donnée. Ecrire une fonction qui recherche la valeur val dans la pile.

```
Fonction Recherche(E/ P : Pile ; E/ val :entier ) : booléen
Variable R : Pile ; trouv : booléen ;
Debut
 R←InitPile() ;
 trouv←faux ;
 Tantque(PileVide(P)=faux)et (SommetPile(P)≠val) faire
                                                  Desempiler(P,x) ;
                                                  Empiler(R, x) ;
                                               fait ;
Si (PileVide(P)=faux) alors trouv←vrai ;
Tantque (PileVide(R)=faux) faire
                              Desempiler(R, x) ;
                              Empiler(p, x) ;
                           fait ;
 Retourner (trouv) ;
Fin;
```

IV. UTILISATION DES PILES DANS L'EVALUATION DES EXPRESSIONS ARITHMÉTIQUES

Une utilisation courante des piles est l'élaboration par le compilateur d'une forme intermédiaire de l'expression à évaluer. Après l'analyse lexicale et syntaxique, l'expression est traduite en une forme intermédiaire plus facilement évaluable.

Soit l'expression : A + B. Son évaluation ne peut être faite immédiatement lors de la rencontre d'un opérateur car le 2ème opérande n'est pas encore connu par la machine. Par contre si l'expression pouvait être écrite sous la forme AB+ alors elle serait directement évaluable car les deux opérandes sont connus avant l'opérateur.

La notation < *Opérande*> < *Opérateur*> < *Opérande*> est dite INFIXE.

L'autre représentation plus facilement évaluable est dite POSTFIXE ou POLONAISE SUFFIXE. Elle a la forme :

< *Opérande Gauche* > < *Opérande Droit* > < *Opérateur*>

Exemples de Transformation:

Forme Infixée	Forme Postfixée
25 -11	25 11-
25 + 11*5	25 11 5 * +
(25 + 11) *5	25 11 + 5 *

L'évaluation des expressions n'est pas directe puisque dès la rencontre d'un opérateur on ne sait pas quelle opération doit-on évaluer d'abord ? Ceci dépend des priorités des opérateurs dans le cas d'une expression non parenthésée ou de la position des parenthèses dans l'expression dans le cas d'une expression parenthésée.

IV.1 Algorithme de Transformation d'une Forme Infixée en une Forme Postfixée
L'algorithme utilise **deux piles** P et R. Il reçoit comme donnée l'expression arithmétique déjà analysée, rangée dans un vecteur T de taille *Taille_Expression*. Il utilise les fonctions suivantes supposées définies.

Operateur(x) : détermine si x est un opérateur : + (addition), - (soustraction), *(multiplication), / (division) et % (reste de la division entière).

Operande(x) : détermine si x est un opérande. Un opérande peut être une suite de symboles représentant un entier ou un réel.

Priorite(x) : retourne la priorité de l'opérateur x.

Priorité(+)=Priorité(-) < Priorité(*)=Priorité(/)=Priorité(%)

Operation (x1, x2, operateur) : effectue l'opération (x1 operateur x2) et retourne le résultat.

Algorithme de Transformation

Debut
P←InitPile(); R←InitPile(); ;

Pour i ←1 à *Taille_Expression*

Faire

```
Si (Operande (T[i]) alors  Empiler (R, T[i]) ; fsi ;
Si (T[i]= '(' ) alors  Empiler (P, T[i]) ; fsi ;
Si (Operateur (T[i]) alors
        Tant que (non PileVide(P) et Operateur(SommetPile(P)) et
                (Priorite (T[i]) <= Priorite (SommetPile(P)))
            Faire  Desempiler (P, x) ; Empiler  (R, x) ; Fait
        Empiler (P, T[i] );  /* à la sortie de la boucle */
Fsi ;
Si  (T[i] = ')' ) alors
        Tant que (non PileVide(P) et (SommetPile (P) ≠ '(' )
            Faire Desempiler (P, x) ; Empiler  (R, x) ; fait
        Desempiler (P, x) ;
fsi
Fait
Tant que (non PileVide(R))
            Faire Desempiler (R, x) ; Empiler  (P, x) ; fait
Fin
```

A la fin de cet algorithme, la pile P contiendra la forme postfixée de l'expression.
Exemple : Soit l'expression A + B – C * D

Action	Etat de la Pile R	Etat de la Pile P
Lire (A)	A	
Lire (+)	A	+
Lire (B)	AB	+
Lire (-)	AB+	-
Lire (C)	AB+C	-
Lire (*)	AB+C	-*
Lire (D)	AB+CD	-*
Fin de l'Expression		-*DC+BA

A présent, la forme postfixée contenue dans la pile P peut être alors évaluée en utilisant l'algorithme ci-dessous.

IV.2 Algorithme d'Evaluation d'une Forme Postfixée

L'algorithme utilise **deux piles P et R**. P contient la forme postfixée de l'expression et R étant initialement vide.

Algorithme d'Evaluation

```
Debut

 R ←InitPile(); ;

 Tant que  (non PileVide(P))

        Faire

           Desempiler (P, x) ;

           si (Operande (x))  alors Empiler (R, x) ;

                                sinon  /* c'est un opérateur */

                                 faire   Desempiler (R, x1) ;

                                         Desempiler (R, x2) ;

                                         Res  = Operation (x2, x1, x) ;

                                         Empiler (R, Res) ;

                                 fait

           fsi

        fait

Fin
```

Le résultat Final se trouvera dans la pile R et la pile P devient vide.

Exemple : Soit l'expression A + B – C * D. Sa forme postfixée contenue dans la pile P est : -*DC+BA. Son évaluation se fait selon les étapes suivantes :

Action	Etat de la Pile P	Etat de la Pile R
Initialement	-*DC+BA	
Depiler (A)	-*DC+B	A
Depiler(B)	-*DC+	AB
Depiler(+)	-*DC	(A+B)
Depiler(C)	-*D	(A+B)C
Depiler(D)	-*	(A+B)CD
Depiler(*)	-	(A+B)(C*D)
Depiler(-)		((A+B)-(C*D))

Remarque : Les parenthèses, contenues dans la pile R ne servent qu'à montrer dans quel ordre sont effectuées les opérations.

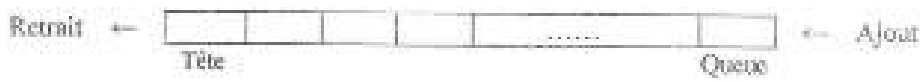
Chapitre 5 : Les Files

Définition : une file est une collection d'éléments de même type où les insertions des nouveaux éléments se font toutes à la fin (queue) et les suppressions toutes au début (tête de file). Tout ajout d'élément se fait par la *queue* (après le dernier) et tout retrait se fait par la *tête* (on retire le premier élément de la file). L'accès à un élément quelconque se fait après le retrait (défilement) de tous les éléments qui le précèdent.

Une file est une structure de donnée de type ***FIFO***
(« First In, First Out » = « premier arrivé, premier sorti »).

Exemples : file d'attente, …

Schématiquement, une file est représentée comme suit :



I.2 Les Opérations sur les Files :

Les opérations sur les files sont les suivantes :

- *Ajout* d'un élément : l'action consistant à ajouter un nouvel élément et le mettre au dernier s'appelle *enfiler*.
- *Suppression* d'un élément : l'action consistant à retirer le premier élément (en tête de la file) s'appelle *défiler*.
- *Consultation* : consulter le premier élément de la file.

I.3. Utilisation des Files dans les Applications Informatiques

Les files sont des structures de données très utilisées aussi bien dans la vie courante que dans les systèmes informatiques. Parmi leurs domaines d'application :

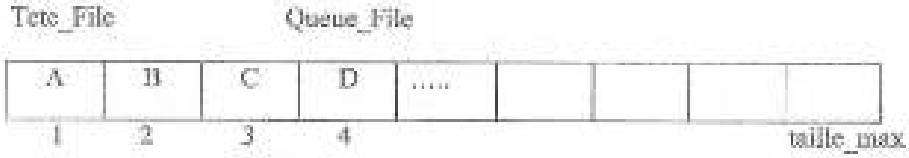
- Les programmes de traitement de transactions telles que les réservations de sièges d'avion ou de billets de théâtre.
- Les systèmes d'exploitation pour gérer l'allocation des ressources (les imprimantes par exemple).
- Dans le domaine des télécommunications pour gérer les appels téléphoniques et la délivrance des messages.

II. REPRESENTATION DES FILES EN MEMOIRE :

De même que pour les piles, il existe deux représentations (implémentations) des files en mémoire : contiguë et chaînée.

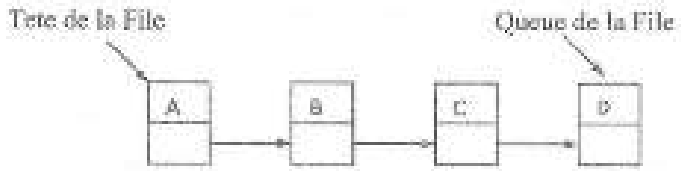
II.1 Représentation d'une File par un Tableau

On peut représenter une file par un tableau (forme contiguë), alloué d'une manière statique ou dynamique.



II.2 Représentation d'une File par une Liste Chainée

Une file peut être représentée par une liste chainée où l'ajout d'un élément se fait toujours par la queue de la liste et le retrait par la tête.



III. PRIMITIVES DE MANIPULATION DES FILES

A l'instar des piles, ces primitives correspondent à des fonctions de base de manipulation des files. Leur écriture dépend de l'implémentation de la file (contiguë ou chainée) et du type des éléments de la file.

InitFile : permet d'initialiser la file

FileVide : permet de vérifier si la file est vide.

FilePleine : permet de vérifier si la file est pleine (cas d'allocation contiguë).

TeteFile : retourne l'élément se trouvant en tête de file dans une variable sans le défiler.

Enfiler : permet d'ajouter un élément en queue de file.

Défiler : permet de retirer (supprimer) l'élément se trouvant en tête de file et retourne sa valeur dans une variable.

III.1 Opérations de Manipulation des Files dans les deux Représentations

On considère une file d'éléments de type TypeElement. On écrira les primitives dans les deux types d'implémentation (contiguë et chainée).

A) Représentation Contigüe (Cas d'Allocation Statique)

1) Déclaration

```
constante  max 100
type File = Enregistrement
              T : tableau [max] TypeElement ;
              Tete, Queue : entier ;
            FinEnre
variable f : File ;
```

2) Initialisation

```
Fonction  InitFile ( ) : File
Variable f : File
Debut
   f.Tete ←1;    f.Queue ←0;
   retourner (f);
Fin
```

3) Test si la file est vide

```
Fonction FileVide (E/ f : File) : booleen
 Debut  si (f.Queue < f.Tete) alors retourner (vrai) ;
                              sinon retourner (faux) ;
        fsi
 Fin
```

4) Test si la file est pleine

```
Fonction FilePleine (E/ f : File) : booleen
Debut
 si (f.Queue=max)  alors retourner (vrai) ;
                   sinon retourner (faux) ;
 fsi
Fin
```

5) Consultation de la tete de file

```
Fonction TeteFile (E/ f : File) : TypeElement
variable x : TypeElement ;
Debut
  x←f.T[f.Tete];
  retourner (x) ;
Fin
```

6) Ajout d'un element

```
Procedure Enfiler (E/S f: File, E/ x : TypeElement)
Debut
  f.Queue ←f.Queue+1 ;
  f.T[f.Queue]←x ;
Fin
```

7) Suppression d'un élément

```
Procedure Défiler (E/S f: File, E/S x : TypeElement)
Debut
   x←f.T[f.Tete] ;
   f.Tete ←f.Tete+1 ;
 Fin
```

Remarque : A tout moment le nombre d'éléments dans la file est F.queue- F.tête + 1

B) Représentation Chainée

1) Déclaration

```
type Element = Enregistrement
                  info : TypeElement ;
                  suivant : ^ Element ;
               FinEnreg
```

```
Type File = Enregistrement
                Tete : ^ Element ;
                Queue : ^ Element ;
            FinEnreg
variable f : File ;
```

2) Initialisation

```
Fonction InitFile ( ) : File
variable   f : File
Debut
  f.Tete←nil ;
  f.Queue←nil ;
  retourner (f) ;
Fin
```

3) Test si la file est vide

```
Fonction FileVide (E/ f: File) : booleen
Debut
  si (f.Tete=nil) alors retourner (vrai)
                  sinon retourner (faux) ;
  fsi
Fin
```

4) Consultation de la tete de file

```
Fonction TeteFile (E/ f : File) : TypeElement
variable   x : TypeElement
Debut
  x= ^(f.Tete).info;
  retourner (x) ;
Fin
```

5) Ajout d'un element

```
Procedure Enfiler (E/S f : File , E/ x : TypeElement)
variable temp : ^ Elemnnt ;
Debut
  temp←Allouer(TailleDe(Element)) ;
  ^temp.inf←x ;
  ^temp.suivant←nil ;
  si (f.Tete=nil) alors  f.Tete←temp ;
                         f.Queue←temp ;
                 sinon  ^(f.Queue).suivant←temp ;
                         f.Queue←temp ;
  fsi
Fin
```

6) Suppression d'un élément

```
Procedure Defiler (E/S f : File , E/S x : TypeElement)
variable temp : ^ Element ;
Debut
  x← ^(f.Tete).info ;
  temp←f.Tete ;
  si (f.Tete=f.Queue)  alors f.Tete ← nil ;
                              f.Queue ← nil ;
                       sinon f.Tete←^(f.Tete).suivant ;
  fsi
liberer (temp) ;
Fin
```

Chapitre 6 : La Récursivité

6.1 Définitions :

6.1.1 Objet récursif :

Un objet est dit récursif s'il est utilisé directement ou indirectement dans sa définition.

Exemple :

En définissant une expression arithmétique <expr> nous donnons une définition récursive comme suit :
Si θ est un opérateur on aura : <expr> → <expr> θ <expr> / <idf> / <cste>.
Où <idf> est un identificateur et <cste> est une constante

6.1.2 Programmation récursive :

La programmation récursive est une technique de programmation qui remplace les instructions de boucle (while, for, etc.) par des appels de fonctions.

6.1.3 Action paramétrée récursive :

Une action paramétrée P est dite récursive si son exécution provoque ou entraîne un ou plusieurs appels à P. Ces appels sont dits récursifs.

6.1.4 Algorithme récursif :

Un algorithme récursif est un algorithme qui contient une ou plusieurs actions paramétrées récursives.

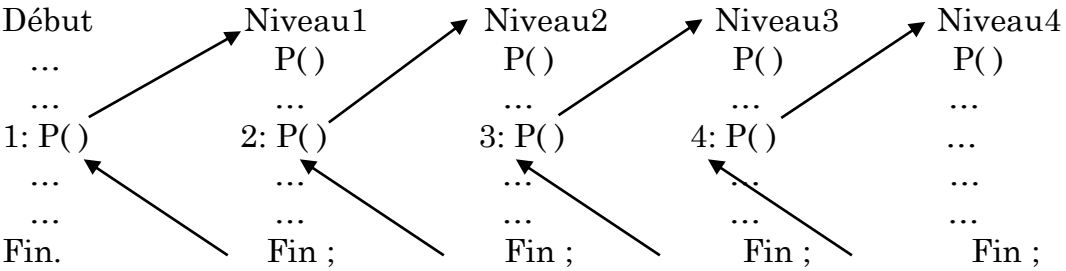
6.1.5 Auto-imbrication :

L'auto-imbrication est le fait qu'une action paramétrée P peut s'appeler elle même avant que sa première exécution ne soit terminée, la seconde exécution peut de nouveau faire appel à P et ainsi de suite.

Exemple :

Soit l'action paramétrée suivante :

```
Action P( )
Début
  P( );
Fin ;
```



Chaque appel à P se fait à un niveau donné. L'exécution de P au niveau i se termine avant l'exécution de P au niveau i-1.
Remarque : Le nombre de niveaux doit être fini quelque soit les valeurs des paramètres d'appel, autrement l'algorithme va boucler indéfiniment.

6.2 Principes de construction d'algorithmes récursifs :

Exemple :

Le calcul de la valeur factorielle d'un nombre donné n (n>=0) peut se faire de deux manières différentes :

1ère méthode :

n ! = 1*2*3*…*n-1*n sachant que 0 !=1

On obtient alors l'algorithme itératif (classique) donné par la fonction suivante :

```
Fonction fact (E/n: entier):entier ;
Var i, p : entier ;
Début
    Si (n=0 ou n=1) alors retourner 1 ; finsi ;
    p←1 ;
    Pour i←2 à n faire p←p*i; fait ;
    retourner p;
Fin ;
```


2ème méthode :

0!=1 ; 1!=1 ; 2!=1*2 ; 3!=1*2*3 ; 4!=1*2*3*4 ; 5!=1*2*3*4*5 …
=2 =6 =24 =120 …

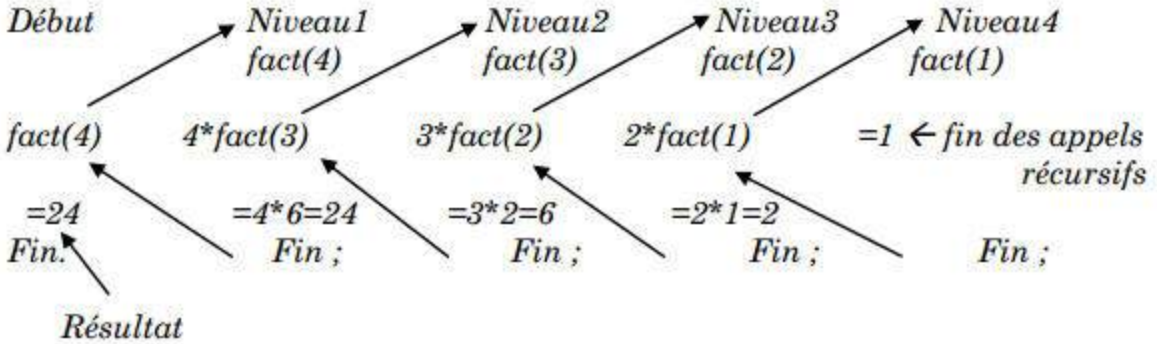
Nous remarquons que:
0!=1 ; 1!= 0!*1 ; 2!=1!*2 ; 3!= 2!*3 ; 4!=3!*4 ; 5!=4!*5

De façon générale pour un n donné n>0 on a : n! = (n-1) !*n
On constate donc la définition de n! est récursive, puisqu'elle se réfère à elle même quand elle applique (n-1)!

Le calcul de la valeur factorielle d'un nombre est défini par :
a) Si n=0 ou n=1 alors n !=1
b) Si n>0 alors n != (n-1) !*n

```
Fonction fact (E/n: entier):entier ;
Début
    Si  (n=0 ou n=1) alors retourner 1 ;
                     sinon retourner (n*fact (n-1));
    finsi ;
Fin ;
```

Déroulement de fact (4)



Remarques :

a) Quand n=0 ou n=1, la valeur de n ! est donnée directement. 0 et 1 sont appelées : ***valeur de base***.

b) Pour un n>1 donné, la valeur de n ! est définie en fonction d'une valeur plus petite que n et plus voisine de la valeur de base.

c) La variable n, est testée à chaque fois pour savoir s'il faut arrêter les appels récursifs ou non. n est appelé ***variable de commande***

Les principes de construction d'actions paramétrées récursives sont donc :

- Le nombre d'appels récursifs (niveaux) doit être fini. Il faut donc que les paramètres contiennent une ou plusieurs variables de commande qui sont testées à chaque niveau pour savoir si on doit continuer ou non les appels récursifs.
- Déterminer le ou les cas particuliers qui sont exécutés directement sans appels récursifs. Dans ces cas, les variables de commandes sont égales aux valeurs de base.
- Décomposer le problème initial en sous problèmes de même nature, telle que des décompositions successives aboutissent toujours à l'un des cas particuliers (appelés aussi cas triviaux).
- Le principe de la récursivité est que les appels récursifs doivent être uniquement sur des données plus petites n != n* (n-1) !
  Plus petit que n !

6.3 Schémas généraux d'actions récursives

Dans une action P récursive on a deux parties :
- Celle qui correspond au cas de base (ou cas trivial)
- Celle qui contient au moins un appel

On peut donc représenter P sous forme :

1er schéma :

```
Action P(x)     // un seul paramètre
Début
   si  < x est la valeur de base > alors  Q
   sinon G (P (h(x)),  x) ;  // h(x) rapproche x de la valeur de base ;
   finsi ;
Fin ;
```

```
Action P (x1,… xn)    // plusieurs paramètres
<Déclaration des variables locales> ;
Début
   Si (Test d'arrêt) alors  Q // instructions du point d'arrêt
  Sinon
      I1 ;  // instructions ;
      P (h (x1,… xn))        /* appel récursif */
      I2 ; // instructions ;
  Fsi ;
Fin ;
```


$h(x_1,\ldots x_n)$ doit faire évoluer le paramètre x_i vers le point d'arrêt, afin que l'action se termine.
I1 et *I2* des blocs d'instructions (éventuellement vide) qui ne comportent aucun appel à *P*

2ème schéma :

```
Action P(…)
Début
      Tant que  < condition> faire  G(P(…), …)
       Q ;
 Fin ;
```

Où le bloc *G(P(…),…)* contient un appel récursif et le bloc Q permet la résolution directe du problème (ne contient pas d'appel récursif).

6.4 Récursivité directe et récursivité indirecte :

Une action qui fait appel à elle-même explicitement dans sa définition est dite récursive directement ou récursivité simple.

Si une action A fait référence (ou appel) à une action B qui elle fait appel directement ou indirectement à A, on parle alors de récursivité indirecte ou récursivité croisée.

```
Action A( )
 Début
   Si < condition> alors  B( )
                  sinon QA ;
  finsi ;
 Fin ;
```

```
Action B( )
Début
   Si < condition> alors  A( )
                  sinon QB ;
   finsi ;
Fin ;
```

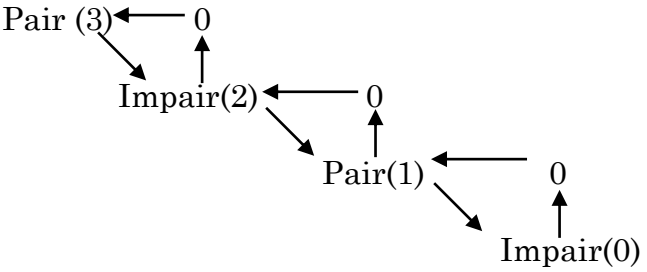
Exemple :

- Récursivité directe : <expr> → <expr> θ <expr>
- Récursivité indirecte :
  <expr> → <terme> θ <terme>
  <terme> → <expr>

- Pour construire une définition récursive de la parité, remarquons tout d'abord que 0 est un entier pair, et qu'il n'est pas impair. Ensuite remarquons que un entier n est pair (resp. impair) ssi l'entier n-1 est impair (resp. pair).

```
Fonction Pair (E/n: entier): booléen;
Début
  si (n=0) alors retourner vrai
  sinon  retourner Impair (n-1);
  finsi ;
Fin;
```

```
Fonction Impair(E/n: entier) :
                              booléen ;
Début
  si (n=0) retourner faux
  sinon retourner Pair (n-1);
  finsi ;
Fin ;
```



6.5 Différents types de récursivité :

a) Récursivité multiples : une action peut exécuter plusieurs appels récursifs – typiquement deux parfois plus.

Exemple :

```
Procédure affiche2Rec (E/ n, i : entier) ; // 1er appel i=1
Début
    si (i<=n)  alors ecrire(i) ;
                     affiche2Rec(n, i+1) ;
                     ecrire(" ;") ;
                     affiche2Rec(n, i+1);
                     ecrire(i) ;
     finsi;
Fin ;
```

Après exécution de, Affiche2Rec(3,1) le résultat sera :

1 2 3 ; 3 ; 3 ; 3 2 ; 2 3 ; 3 ; 3 ; 3 2 1

b) Récursivité terminale :

Si l'exécution d'un appel récursif n'est jamais suivie par l'exécution d'une autre instruction, cet appel est dit récursif à droite ou encore appelée ***récursivité terminale***. En récursivité terminale, les appels récursifs n'ont pas besoin d'êtres empilés dans la pile d'exécution car l'appel suivant remplace simplement l'appel précédent dans le contexte d'exécution.

Exemple :

```
Procédure afficheRecT(E/n, i : entier) ;  // 1er appel i=1
Début
    si (i<=n)  alors
            écrire(i);
            afficheRecT(n, i+1);
    finsi;
Fin ;        /* afficheRecT est une fonction récursive terminale */
```

Après exécution de, afficheRecT(3, 1) le résultat sera **1 2 3**

c) Récursivité non terminale :

Une action récursive est dite non terminale si le résultat de l'appel récursif est utilisé pour réaliser un traitement (en plus du retour d'une valeur). Une action récursive ***non terminale nécessite une pile***.

Exemple :

Procédure afficheRecNT (E/ n, i : entier) ; // 1er appel i=1
Début
si (i<=n) alors
afficheRecNT(n, i+1);
écrire(i);
finsi;
Fin ; /* ***afficheRecNT*** est une fonction récursive ***non terminale*** */
Après exécution de, afficheRecNT(3, 1) le résultat sera **3 2 1**

Autre exemple : La fonction récursive du calcul de la factorielle (donnée ci-dessus) est non terminale car les calculs se font à la remontée.

d) Récursivité imbriquée

Elle consiste à faire un appel récursif à l'intérieur d'un autre appel récursif.
Exemple : la suite d'Ackerman

A(m,n) = n+1 si m = 0,

A(m,n) = A(m-1,1) si n=0 et m > 0

A(m,n) = A(m-1, A(m,n-1)) sinon

6.6 Fonctionnement de la récursivité

Un programme ne peut s'exécuter que s'il est chargé en mémoire centrale, chaque instruction du programme se trouve à une adresse donnée de la mémoire.
Lorsqu'un programme fait appel à une fonction, le système sauvegarde l'adresse de retour (adresse de l'instruction qui suit l'appel), ainsi que les valeurs des variables locales.
Quand une fonction ***f*** appelle une fonction ***g,*** on doit sauvegarder l'adresse de retour de ***f*** (paramètres et variables locales) avant l'appel de ***g***, ce contexte doit être récupéré après le retour de ***g***.
S'il y a plusieurs appels imbriqués, le système gère ***une pile*** pour sauvegarder (empiler) les différents contextes des différents appels récursifs.

Les paramètres de l'appel récursif changent. A chaque appel les variables locales sont stockées dans une pile. Ensuite les paramètres ainsi que les variables locales sont désempilées au fur et à mesure qu'on remonte les niveaux.

Lors de l'ième appel sont empilés :

- Les valeurs des paramètres au niveau i
- Les valeurs des variables locales du niveau i
- L'adresse de retour au niveau i

A la fin des appels récursifs retour du niveau i+1 au niveau i :

- Retour au programme principal si la pile est vide
- Dépiler l'adresse de retour
- Dépiler le contexte du niveau i (les valeurs des variables du niveau i
- Exécuter l'instruction suivant le dernier appel

6.6 Elimination de la récursivité :

La récursivité ***simplifie la structure d'un programme*** mais la plupart du temps, le gain en simplicité vaut une baisse relative des performances d'exécution.
La récursivité est souvent couteuse en temps et en espace mémoire car elle nécessite l'emploi de techniques spéciales de compilation, à savoir ***le concept de pile***.

Ces techniques sont généralement plus ***coûteuses en temps d'exécution*** que celles fondées sur l'itération. Aussi certains langages de programmation n'admettent pas la récursivité (exemple : Fortran). Ainsi il arrive que l'on souhaite éliminer la récursivité.
A cet effet il est intéressant de noter que l'on peut montrer que, si le langage de programmation utilisé le permet, il est toujours possible de transformer une action itérative en une action récursive ; cependant, la réciproque n'est pas vraie.
Les problèmes qu'il faut résoudre en utilisant la récursivité sont les problèmes ***typiquement récursifs*** et non itératifs, c'est-à-dire, soit des problèmes qui ne peuvent pas être résolus de façon itérative, soit des problèmes pour lesquels une ***formulation*** récursive est particulièrement ***simple et naturelle.***
D'une manière générale, on évitera donc d'utiliser la récursivité lorsqu'on peut la remplacer par une définition itérative, à moins de bénéficier d'un gain considérable en simplicité.

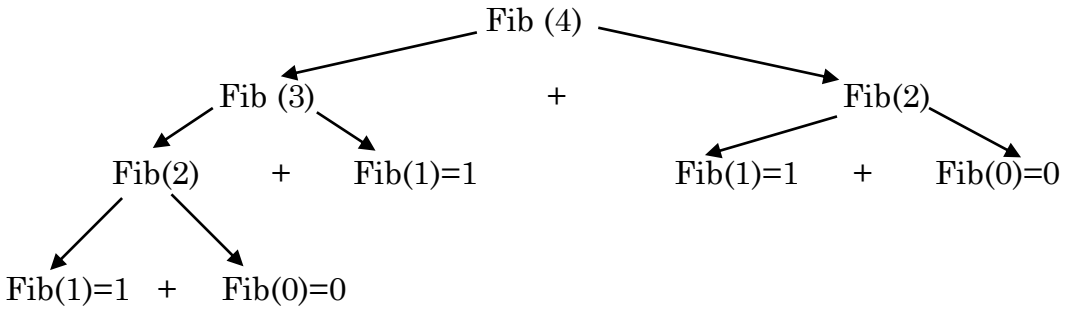
Exemple : Les nombres de Fibonnaci : $F_0=0$, $F_1=1$

$$F_n=F_{n-1} + F_{n-2} \quad n>=2.$$

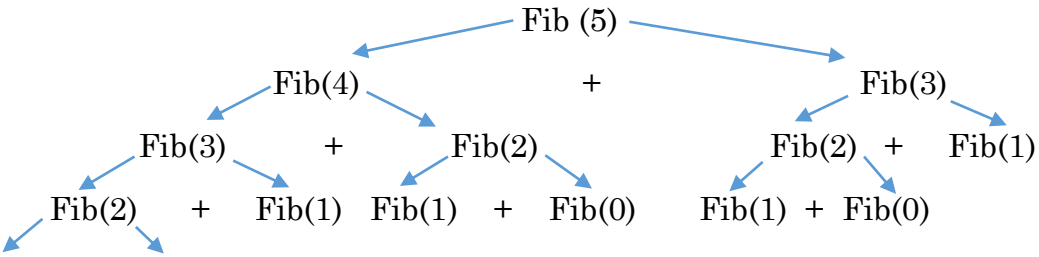
La fonction récursive permettant d'obtenir ces nombres est :

```
Fonction Fib(E/ n :entier) :entier ;
Début
  Si (n=0) alors retourner 0
          Sinon si (n=1) alors retourner 1
                        Sinon retourner Fib(n-1)+Fib(n-2);
Fin ;
```

L'exécution de cette fonction récursive pour n=4 nous donne l'arbre suivant :



Fib(4)=3 (9 appels pour arriver au résultat)



Pour n=5 Fib(5)=5 (15 appels pour arriver au résultat)

Les valeurs successive de cette suite : 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 12, 21, 34, 55,…

Voici maintenant la fonction itérative équivalente à la fonction récursive Fib.


```
Fonction Fib (E/ n : entier) : entier ;
Var x, y, z, i : entier ;
Début
  Si (n=0) alors retourner 0 ; finsi ;
  Si (n=1) alors retourner 1 ; finsi ;
  x←0 ; y←1 ; z←1 ;   /*  x=Fib(0)  et y= Fib(1)  */
  pour i=2 à n faire
     z←x+y ;
     x←y ;
     y←z ;
  fait ;
  retourner z ;
Fin ;
```

Pour n=4 : x=0
y=1
i=2 : z=1 x=1 y=1
i=3 : z=2 x=1 y=2
i=4 : z=3 x=2 y=3

Résultat z=3 avec 3 itérations.

Le problème se situe au nombre d'appels à la fonction, nous constatons que pour la solution récursive le nombre d'appels est un nombre ***exponentiel*** (c'est une mauvaise solution très coûteuse) alors que la solution itérative ne coute que ***n appels***.

Cette version itérative peut à son tour se convertir en une nouvelle version récursive :

```
Fonction Fib(E/ x, y, n : entier) : entier ;
Début
  Si (n=0) alors retourner 0
  Sinon Si (n=1) alors retourner y
        Sinon retourner Fib(y, x+y, n-1);
        Finsi ;
  Finsi ;
Fin ;
```

n=4 : x=0, y=1
Fib(0,1,4) → Fib(1,1,3) → Fib(1,2,2) → Fib(2,3,1) = 3 donc Fib(4)=3

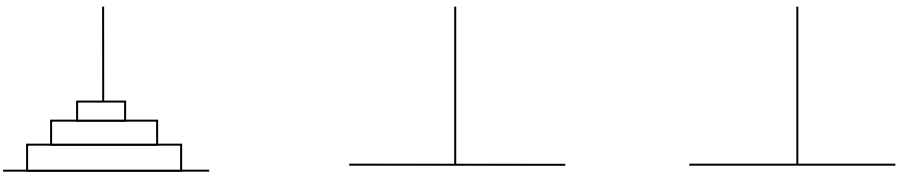
On a que 4 appels, le temps d'exécution est devenu ***linéaire***.

Comme on peut le constater, l'élimination de la récursivité est parfois très simple, elle revient à écrire une boucle, à condition d'avoir bien fait attention à l'exécution. Mais parfois elle est extrêmement difficile à mettre en œuvre.

Exemple : les tours de Hanoï

Le problème des tours de Hanoï consiste à déplacer N disques de diamètres différents d'une tour de départ à une tour d'arrivée en passant par une tour intermédiaire et ceci en un minimum de coups, tout en respectant les règles suivantes :

- on ne peut déplacer plus d'un disque à la fois,
- on ne peut placer un disque que sur un autre disque plus grand que lui ou sur un emplacement vide.



Tour A | Tour B (Intermédiaire) | Tour C (Résultat)

```
procédure Hanoï(n, A, B, C)
   si n = 1 alors  ecrire("Déplacer le disque de A vers C")
   sinon
      Hanoï(n-1, A, C, B) ;
      Ecrire("Déplacer le disque de A vers C") ;
      Hanoï(n-1, B, A, C) ;
   finsi
fin ;
```

Le nombre de déplacement en fonction de n est égal à $2^n - 1$ donc la complexité de la procédure Hanoï est de l'ordre de $O(2^n)$.

6.5.1 Elimination de la récursivité terminale

Un algorithme est dit récursif terminal (ou récursif à droite) s'il ne contient aucun traitement après un appel récursif.
- Dans ce cas le contexte de la fonction n'est pas empilé.
- L'appel récursif sera remplacé par une boucle tantque.

Cas1 :

```
f(x) /* récursive*/
Début
  si (condition(x))  alors
     A ; f(g(x));
  finsi ;
Fin ;
```

```
f(x) /* itrérative*/
Début
  Tantque (condition(x)) faire
       A ; x=g(x) ;
  fait ;
Fin ;
```


Cas2 :

```
f(x) /* récursive*/
Début
  si (condition(x)) alors A ; f(g(x));
  sinon  B ;
  finsi;
Fin;
```

```
f(x) /* itrérative*/
Début
    Tantque (condition(x)) faire
          A ; x=g(x) ;
     Fait;
  B ;
Fin ;
```

6.5.2 Elimination de la récursivité non terminale

a) cas d'un seul appel récursif:

Ici pour pouvoir éliminer la récursivité, il va falloir sauvegarder le contexte de l'appel récursif.

Cas1 :

f(x) /* récursive*/
Début
si (condition(x)) alors A ; f(g(x)); finsi ; ← *nécessite une pile*
B ;
Fin;

f(x) /* itrérative*/
Début
pile p=initpile();
Tantque (condition(x)) faire A ; empiler(p, x); x=g(x) ; fait ;
B ;
Tantque (!pilevide(p)) faire desempiler(p, x) ; B ; fait ;
Fin ;

Cas2 :

f(x) /* récursive*/
Début
si (condition(x))
Alors
A1 ; f(g(x)); A2 ;
Sinon B ;
Finsi;
Fin;

f(x) /* itrérative*/
Début
pile p=initpile();
tantque (condition(x)) faire
A1 ; empiler(p, x); x=g(x) ;
Fait ;
B;
Tantque (!pilevide(p)) faire
desempiler(p, x) ;A2 ;
fait ;
fin ;

b) cas de deux appels récursifs:
Le 2ème appel est récursif à droite (terminal)

f(x) /* récursive*/
Début
Si (condition(x)) alors A ; f(g(x)); f(h(x)) ; finsi;
Fin;
Si on élimine le 2ème appel :
Tantque (condition(x)) faire A ; f(g(x)) ; x=h(x) ; fait ;
Le schéma itératif équivalent à f est :
f(x) /* itérative*/
Début
pile p=initpile();
tantque (condition(x)) faire
tantque (condition(x) faire A ; empiler (p, x); x=g(x) ; fait ;
tantque (!pilevide(p)) faire desempiler(p, x) ;x=h(x) ; fait ;
fait ;
Fin ;

Chapitre 7 : Les Arbres

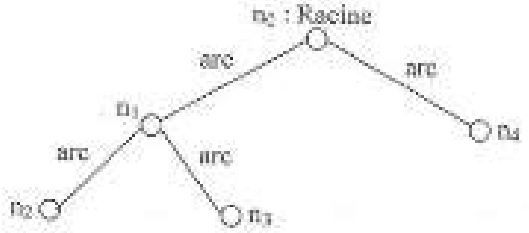
7.1 Définitions :

a) Arbre :

L'arbre est une structure de donnée récursive. C'est un cas particulier de graphe orienté sans cycle et qui n'a qu'une seule source.

Un arbre est constitué :

- d'un ensemble d'éléments appelés ***nœuds***.
- d'un nœud particulier appelé ***racine***.
- d'un ensemble de couples (n_i, n_j) reliant le nœud n_i au nœud n_j appelés ***arcs*** (ou arêtes). Le nœud n_i est appelé ***père*** de n_j. Le nœud n_j est appelé ***fils*** de n_i



b) Feuilles :

Les nœuds qui n'ont aucun fils (pas de successeurs) sont appelés feuilles ou nœuds terminaux (les nœuds n_2, n_3 et n_4 sont des feuilles). Les autres nœuds qui ne sont ni racine ni feuilles, sont appelés nœuds internes de l'arbre.

c) Ascendance et Descendance :

Soit un nœud *a* et un nœud *b* s'il existe un chemin du nœud *a* au nœud *b* on dit que *a* est un ascendant de *b* ou que *b* est un descendant de *a*.

Un nœud peut avoir zéro ou plusieurs successeurs (appelés descendants ou fils) et au maximum un prédécesseur (appelé ascendant ou père).

d) Sous-arbre :

Tous les nœuds (sauf la racine n_2) sont constitués de nœuds fils, qui sont eux même des arbres. Ces arbres sont appelés sous-arbres de la racine.

Exemple : Les nœuds n_1, n_2 et n_3 constituent un sous-arbre.

e) Chemin :

On appelle chemin la suite de nœuds $n_0\ n_1\ \ldots\ n_k$ telle que (n_{i-1}, n_i) est un arc pour tout $i \in \{0,\ldots,k\}$. L'entier k est appelé longueur du chemin $n_0\ n_1\ \ldots\ n_k$.

k c'est aussi le nombre d'arcs.

Le nombre d'arcs d'un arbre = nombre de nœuds - 1.

f) Hauteur ou profondeur :

La hauteur d'un nœud est le nombre de nœuds du plus long chemin allant de ce nœud jusqu'à une feuille.

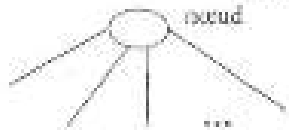
La hauteur d'un arbre est le nombre de nœuds du plus long chemin allant de la racine jusqu'à une feuille. La hauteur de la racine=1. [1]

[1] *Certains auteurs adoptent une autre convention pour calculer la hauteur d'un nœud: la racine a pour hauteur 0 et donc la hauteur d'un arbre correspond à la longueur du chemin le plus long.*

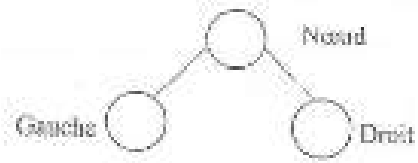
g) Niveau:
La hiérarchie est représentée par des niveaux dans l'arbre, la racine étant le nœud de niveau 0. Le niveau d'un nœud est la longueur du chemin allant de la racine jusqu'à ce nœud. Tous les nœuds d'un arbre de même profondeur sont au même niveau.
Exemple : Les nœuds n_1 et n_4 sont au même niveau. Le nœud n_2 est un successeur de n_1 donc niveau (n_2) = niveau (n_1)+1

h) Degré ou arité :

Le degré d'un nœud représente le nombre de successeurs (fils) de ce nœud.
Le degré d'un arbre est égal au maximum des degrés de ses nœuds. D'une manière générale, un arbre de degré n est appelé arbre n-aire, les nœuds ont au plus n successeurs.

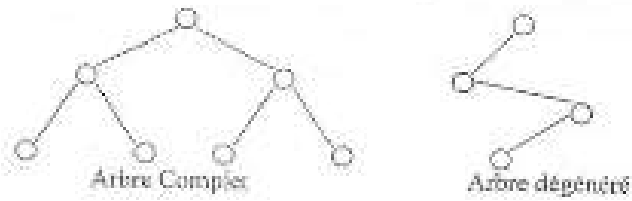


i) Arbre binaire :
Un arbre est dit binaire si tout nœud de l'arbre a 0, 1, ou 2 successeurs. Ces successeurs sont alors appelés respectivement successeur gauche et successeur droit.



Lorsque tous les nœuds d'un arbre binaire ont deux ou zéro successeurs ont dit que l'arbre est *homogène* ou *complet*

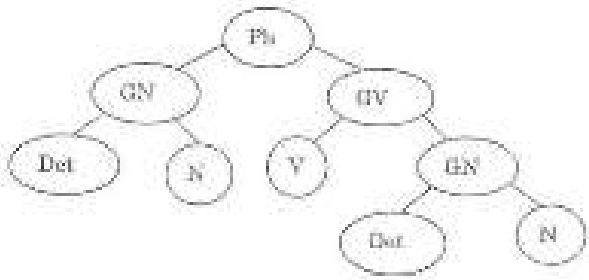
Un arbre binaire est dit *dégénéré* si tous ses nœuds n'ont qu'un seul descendant.



Un arbre complet de hauteur *h* a un nombre de nœud = 2^h -1 et le nombre de feuilles est $2^{(h-1)}$.
Exemple : h=3 nombre de nœuds = 2^3-1=7 nombre de feuilles = $2^{(3-1)}$ = 4

j) Arbre binaire équilibré:
C'est un arbre binaire tel que les hauteurs des deux sous arbres SAG, SAD (sous arbre gauche, sous arbre droit) de tout nœud de l'arbre diffèrent de 1 au plus. Autrement dit si tous les chemins menant de la racine à une feuille ont pour hauteur h ou h-1.

* Arbre syntaxique : analyse d'une phrase, exprime la relation « composée de »



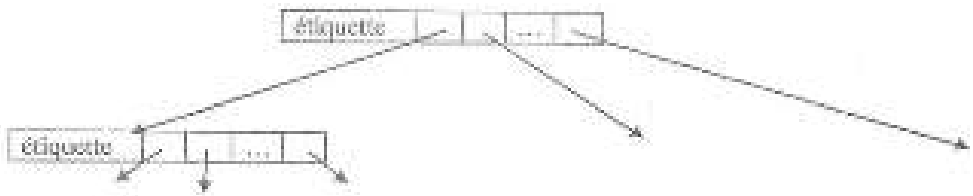
7.2 Représentation chainée d'un arbre en mémoire

7.2.1 Arbre n-aire :

a) Une manière de représenter un arbre est d'associer à chaque nœud un enregistrement contenant un ou plusieurs champs pour coder l'étiquette et d'un tableau de pointeurs vers les nœuds fils. La taille du tableau est donnée par le nombre maximum de fils des nœuds de l'arbre.

Déclaration :

```
Type arbre = ^noeud ;
Type noeud = enregistrement
                t: tableau [max_fils] arbre ; /* tableau de pointeurs sur des arbres*/
                étiquette : <typelem> ;
             finenreg ;
```



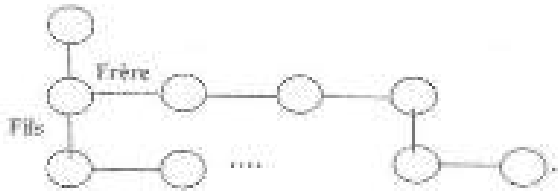
Inconvénients :

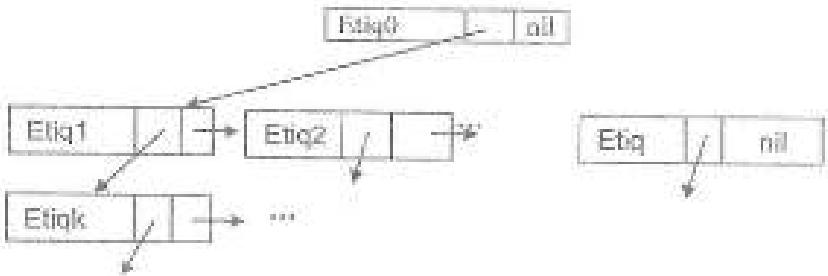
- l'arbre contient un petit nombre de nœuds ayant beaucoup de fils. (tableaux de grandes tailles)
- L'arbre contient beaucoup de nœuds ayant peu de fils. (plusieurs tableaux)
  Ceci conduit à consommer beaucoup d'espace mémoire.

b) Avec deux pointeurs fils et frère.
Afin de contourner l'inconvénient du tableau, on utilise un pointeur vers fils ainée et chaque fils possède un lien vers son frère le plus proche.

Déclaration :

```
Type arbre = ^ nœud ;
Type nœud = enregistrement
                fils, frère : arbre ;
                étiquette : <typeelem> ;
            finenreg ;
```

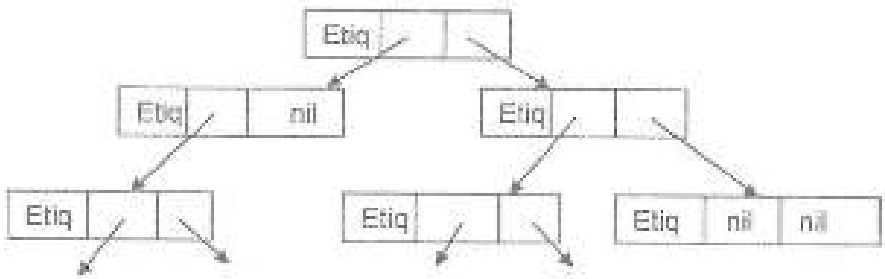




7.2.2 Arbre binaire :

Déclaration :

```
Type arbre = ^nœud ;
Type  nœud = enregistrement
                gauche, droit : arbre ;
                étiquette : <typeelem> ;
             finenreg ;
```



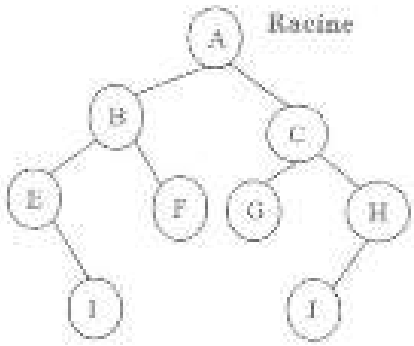
7.3 Représentation contigüe d'un arbre binaire en mémoire

Un arbre binaire peut être représenté sous forme d'un vecteur où chaque élément sera composé de trois champs : *un champ info* représentant l'information contenue dans le nœud,*un champ succ_gauche* donnant la position du fils gauche dans le vecteur et*un champ succ_droit* donnant la position du fils droit dans le vecteur.

```
Type noeud = Enregistrement
                info : <typeelem> ;/* type de l'information contenue dans un noeud*/
                succ_gauche, succ_droit : entier ;
             Finenreg ;

V : tableau [taillemax] noeud ;
```

Exemple d'un arbre de caractères :



Déclaration en langage C

```
Typedef struct{ char info ;
                int succ_gauche, succ_droit ;} noeud ;
noeud V[taillemax] ;
```

Le vecteur correspondant à l'arbre sera comme suit :

A	2	3	B	4	5	C	6	7	E	0	8	F	0	0	G	0	0	H	9	0	I	0	0	J	0	0

La valeur 0 indique que le nœud n'a pas de successeur gauche et/ou droit.
La racine étant l'élément d'indice 1 du tableau.

- *Représentation séquentielle :*

Dans un vecteur ayant le type de l'information contenu dans un nœud de l'arbre. La racine est rangée dans t[0] (langage C).
Si un nœud se trouve à la position k du vecteur, son successeur gauche doit se trouver à la position 2*k+1 et son successeur droit à la position 2*k+2.

b. Parcours infixé d'un arbre binaire

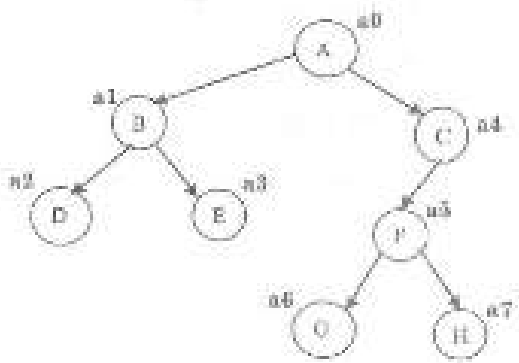
Dans ce type de parcours, on effectue d'abord un parcours infixé de tous les nœuds de A1 (**fils gauche**) jusqu'aux feuilles, on passe par la **racine**, on effectue ensuite un parcours infixé de tous les nœuds de A2 (**fils droit**).

La procédure de parcours **Infixé** est **récursive** et s'écrit comme suit :

```
Procédure Infixe (E/a : Arbre)
Début
 si (non ArbreVide(a))
   alors
         /* 1er appel récursif */
      Infixe (Fils_gauche(a)) ;
       Ecrire (^a.info) ;/* traitement de la racine */
         /* 2ème appel récursif */
      Infixe (Fils_droit(a)) ;
 fsi ;
Fin ;
```

```
void Infixe (Arbre a)
{ if ( !Vide(a))
   { Infixe (filsgauche(a)) ;
     printf(" %c", a->info) ;
     Infixe (filsdroit(a)) ;
   }
}
```

Exemple :
Question : Effectuer un déroulement de la procédure Infixe en montrant les états de la pile à chaque appel/retour de la procédure ainsi que les différents affichages (le résultat devrait donner la liste indiquée ci-dessous)



Appels de Affichage Infixe

Infixe(a0)	
Infixe(a1)	
Infixe(a2)	DB
Infixe(a3)	E
	A
Infixe(a4)	
Infixe(a5)	
Infixe (a6)	GF
Infixe(a7)	HC

c. Parcours postfixé d'un arbre binaire

Dans ce type de parcours, on effectue d'abord un parcours postfixé de tous les nœuds de A1 (fils gauche) jusqu'aux feuilles, on effectue ensuite un parcours postfixé de tous les nœuds de A2 (fils droit). A la fin, on passe par la racine.

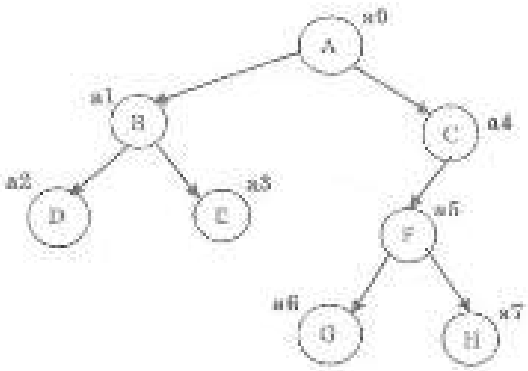
La procédure de parcours **Postfixé** est **récursive** et s'écrit comme suit :

```
Procédure Postfixe (E/a : Arbre)
Début
 si (non ArbreVide(a))
   alors
          /* 1er appel récursif */
      Postfixe (Fils_gauche(a)) ;
          /* 2ème appel récursif */
      Postfixe (Fils_droit(a)) ;
      Ecrire (^a.info) ; /* traitement de la racine */
 fsi ;
Fin ;
```

```
voidPostfixe (Arbre a)
{ if ( !Vide(a))
  { Postfixe (filsgauche(a)) ;
    Postfixe (filsdroit(a)) ;
    printf(" %c", a->info) ;
  }
}
```

Exemple :

Question : Effectuer un déroulement de la procédure Postfixe en montrant les états de la pile à chaque appel/retour de la procédure ainsi que les différents affichages (le résultat devrait donner la liste indiquée ci-dessous)



Appels de Affichage Postfixe	
Postfixe(a0)	
Postfixe(a1)	
Postfixe(a2)	D
Postfixe(a3)	E
	B
Postfixe(a4)	
Postfixe(a5)	
Postfixe (a6)	G
Postfixe(a7)	H
	F
	C
	A

A titre indicatif, on donne les algorithmes itératifs de parcours correspondant aux parcours préfixé, infixé et postfixé, respectivement. Remarquons que ces algorithmes utilisent une structure de Pile.

7.5.3 Algorithmes itératifs de parcours d'un arbre binaire en profondeur

a. Algorithme itératif de parcours préfixé

- On traite la racine
- Si le nœud possède un fils droit, on l'empile
- Si le nœud possède un fils gauche, on le traite sinon on dépile le fils droit et on le traite.

```
Procédure Préfixe_iter (E/s : Arbre);
Var
S : pile;
Début
S←InitPile() ;
Empiler (S, nil) ;
Tant que (non ArbreVide (a))
        Faire
          Ecrire (^a.info) ;
          Si (non ArbreVide(Fils_droit(a))
             alors Empiler (S, Fils_droit(a)) ;
          fsi ;
          Si (non ArbreVide(Fils_gauche(a))
             alors a←Fils_gauche(a) ;
            sinon Dessempiler (S, a) ;
          fsi ;
        Fait ;
Fin :
```

```
void Prefixe_iter (Arbre*a)
{
  Pile S,
  S=Initpile() ; Empiler(&S, NULL) ;
while ( !Vide(a))
{printf("%c", a->info) ;
     if ( !vide(Filsdroit(a))
              Empiler (&S,filsdroit(a)) ;
     if ( !vide(Fils-gauche(a))
            a= Fils-gauche(a) ;
              else Dessempiler (&S,&a) ;
}
}
```

b. Algorithme itératif de parcours infixé

(1) Empiler le chemin (branche) le plus à gauche du nœud n.
(2) Si la pile n'est pas vide
- Dépiler un nœud et le traiter
- Si le nœud possède un fils droit, empiler le chemin le plus à gauche de ce nœud et revenir à l'étape (2).

```
Procédure Infixe_iter (E/s : Arbre);
  Var
    S : pile ;
Début
 S←Initpile() ;
 Tant que (non ArbreVide (a))
        Faire
           Empiler (S, a);
           a←Fils_gauche(a) ; /* Empilement du chemin le plus à gauche*/
        Fait ;

Tant que (non Pilevide(S))
      Faire
```

```
        Desempiler (S, a) ;
        Ecrire (^a.info) ;
        Si (non ArbreVide (Fils_droit(a)))
          alors a←Fils-droit(a) ;
                Tant que (non ArbreVide (a))
                      Faire
                            Empiler (S, a) ;
                            a←Fils_gauche(a) ;
                              /* Empilement du chemin le plus à gauche du fils droit */
                      Fait ;
        Fsi ;
    Fait ;
Fin ;
```

```
Void Infixe_iter (Arbre a)
{Pile S,
  S=Initpile() ;
while ( !Vide(a))
{Empiler(&S, a) ; a =Fils_gauche(a) ;}
while ( ! Pilevide(S))
{ Desempiler (&S,&a) ;
printf("%c", a->info) ;
if ( !Vide(Fils_droit(a))
{ a=Fils_droit(a) ;
while ( !Vide(a))
{ Empiler(&S, a) ;
A=Fils_gauche(a) ;
}
}
}
}
```

c. **Algorithme itératif de parcours postfixé**

- Empiler le chemin le plus à gauche du nœud a
- Empiler le nœud a
- Si a possède un fils droit, empiler une adresse négative correspondant à (-filsdroit(a))
- Tant que la pile n'est pas vide
  - Désempiler un nœud
  - Si adresse >0 alors traiter le nœud
  - Sinon empiler le chemin le plus à gauche du nœud et s'il possède un fils droit empiler (-filsdroit(a)).

```
Procédure Postfixe_iter (E/a : Arbre)
Var
S : pile ;
Début
S←Initpile( ) ;
Tantque (non ArbreVide (a))
        Faire
          Empiler (S, a) ;
          Si (non ArbreVide(Fils_droit(a))
              alors Empiler (S, -fils_droit(a)) ; fsi ;
          a←Fils_gauche(a) /*Empilement du chemin le plus à gauche */
        Fait ;
Tantque (non Pilevide(S))
Faire
    Desempiler (S, a) ;
   Si (a>0)     /* il s'agit d'un fils gauche*/
         alors Ecrire (^a.info) ;
         sinon Si (Feuille(-a))
                  alors Ecrire (^(-a).info) ;
                  sinon/*Empilement du chemin le plus à gauche */
                     Tant que (non ArbreVide (a))
                              Faire
                                 Empiler (S, a) ;
                                 Si (non ArbreVide(Fils_droit(a))
                                     alors Empiler (S, -fils_droit(a)) ; fsi ;
                                 a ← Fils_gauche(a) ;
                              Fait ;
                Fsi ;
   Fsi ;
Fait ;
Fin ;
```

```
Void Postfixe_iter (Arbre a)
{pile *S,
Initpile(&S) ;
while ( !Vide(a))     /* empilement du chemin le plus à gauche */
{Empiler(&S, a) ;
      if ( !Vide(Fils_droit(a))  Empiler(&S, - Fils_droit(a)) ;
a = Fils_gauche(a) ; }
while ( !Pilevide(S))
{Desempiler (&S,&a) ;
if (a>0)   printf("%c", a->info) ;
else
if(Feuille(-a))   printf("%c", -a->info) ;
else          /* empilement du chemin le plus à gauche */
while ( !Vide(a))
{Empiler(&S, a) ;
if ( !Vide(Fils_droit(a))  Empiler(&S, - Fils_droit(a)) ;
a = Fils_gauche(a) ;}
}}
```

7.5.4 Parcours d'un arbre en largeur

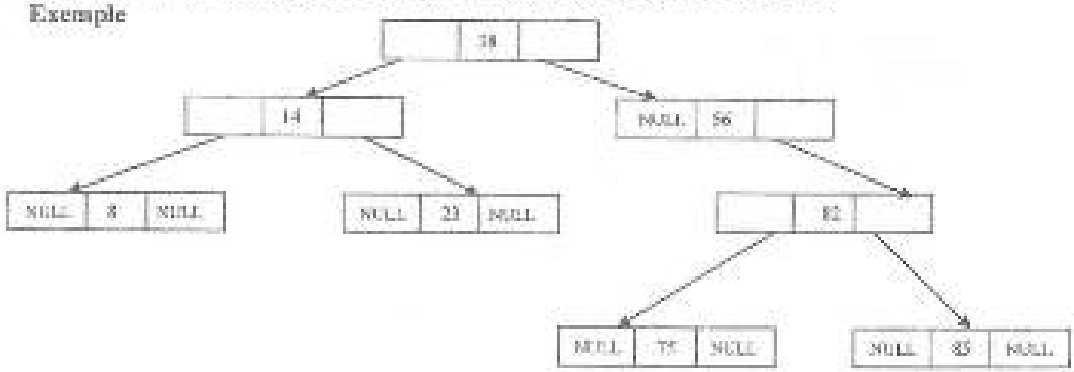
Le parcours en largeur consiste à parcourir tous les nœuds d'un niveau i (de gauche à droite) avant de parcourir les nœuds de niveau i+1. Le parcours commence par la racine (le nœud de niveau 0), ensuite ses descendants directs ensuite les descendants de niveau 2, jusqu'à arriver aux nœuds feuilles de dernier niveau.

Question : Ecrire un algorithme de parcours en largeur d'un arbre binaire.

7.6 Arbre binaire de recherche (ou arbre binaire ordonné)

C'est un arbre binaire dont chacun des nœuds N possède la propriété suivante :
La valeur contenue dans N est supérieure à toute valeur contenue dans le sous-arbre gauche de N, et elle est inférieure à toute valeur contenue dans le sous-arbre droit de N.

Exemple



Question : soit la suite de valeurssuivantes {21, 9, 4, 25, 7, 12, 3, 10, 19, 29, 17, 6, 26, 18} données dans cet ordre. Construire l'arbre binaire ordonné qui les stocke puis afficher le résultat de son parcours Infixé. Que constatez-vous ?

7.6 .1 Recherche dans un arbre binaire ordonné

L'algorithme opère de manière dichotomique comme suit :

- Si la valeur recherchée est contenue dans le nœud courant alors arrêter la recherche et retourner l'adresse du nœud.
- Sinon, si la valeur recherchée est plus petite que celle contenue dans le nœud courant alors orienter la recherche vers le sous-arbre gauche, sinon orienter la recherche vers le sous-arbre droit.

On considère un arbre binaire ordonné d'entiers. Ecrire la fonction qui recherche une valeur val dans l'arbre et retourne son adresse.

```
Type noeud = Enregistrement
                info : entier ;
                succ_gauche : ^noeud ;
                succ_droit : ^noeud ;
             Finenreg ;
Type Arbre : ^noeud
```

```
Fonction Recherche (E/ a : Arbre ; E/val : entier) : boolean
Debut
si (ArbreVide(a))
   alors retourner (faux) ;
   sinon
      si (^a.info = val)
        alors  retourner (vrai) ;
        sinon
           si (^a.info > val) alors retourner (Recherche (Fils_gauche(a), val));
                              sinon retourner(Recherche (Fils_droit(a), val));
           fsi ;
     fsi ;
 fsi ;
Fin.
```

7.6.2 Insertion dans un arbre binaire ordonné

L'insertion d'une valeur dans un arbre binaire ordonné doit maintenir l'ordre des éléments dans l'arbre. On suppose que la répétition de valeurs n'est pas permise.
On écrit une fonction récursive insere, si la valeur val existe dans l'arbre on arrête le traitement, sinon on vérifie la valeur val par rapport à la valeur contenue dans le noeud courant. Selon les cas, on s'oriente soit vers le fils gauche de a, soit vers le fils droit de a.L'insertion consiste à allouer un nouvel espace pour la valeur val et à mettre à jour les chaînages dans l'arbre, pour cela, il faut avoir l'adresse du noeud père et la fonction recherche devient :

```
Procédure Insere (E/S a : arbre ;  E/ val : entier ; E/ père : arbre )
Var   p: arbre ; père :arbre;
Debut
si ( non Vide(a))
  alors
   si (^a.info = val)
        alors  Ecrire(" La valeur existe déjà");
        sinon père ← a ;
              si (^a.info > val) alors  Insere (Fils_gauche(a), val, père) ;
                                 sinon Insere (Fils_droit(a), val, père) ;
              fsi ;
   fsi ;
  sinon /* créer le noeud*/
     p ← Allouer (Taillede (noeud)) ;   /* création du nouvel élément */
     ^ p.info ← val ; ^p.succ_gauche ← nil ; ^p. succ_droit ← nil ;
       /* raccorder au noeud père */
      si (^père. info >val)  alors  ^père.succ_gauche ← p ;
                             sinon ^père.succ_droit ← p ;
      fsi ;
  fsi ;
Fin ;
```

7.6.3 Suppression dans un arbre binaire ordonné

Soit à supprimer un nœud R de l'arbre, trois cas de suppression sont possibles :

Cas 1 : Le nœud R est une feuille

- Libérer le nœud R
- Mettre à nil, l'adresse du nœud R dans le nœud Pere (R).

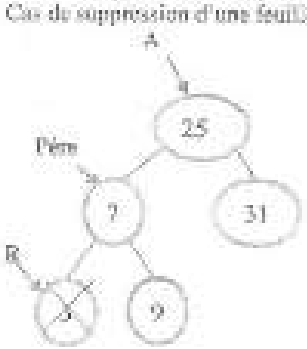
Cas 2 : Le nœud R possède un seul fils

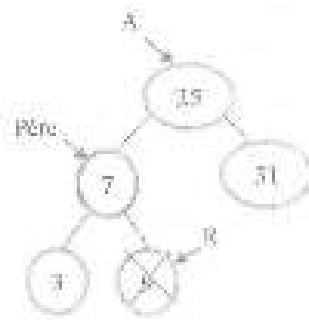
- Supprimer R
- Dans Pere(R), remplacer l'adresse de R par fils(R). (fils gauche ou droit)

Cas 3 : Le nœud R possède deux fils

- Remplacer le nœud R par la valeur la plus grande du SAG (max) ou bien par la valeur la plus petite du SAD (min).
- Supprimer max (ou min)

Cas de suppression d'une feuille :

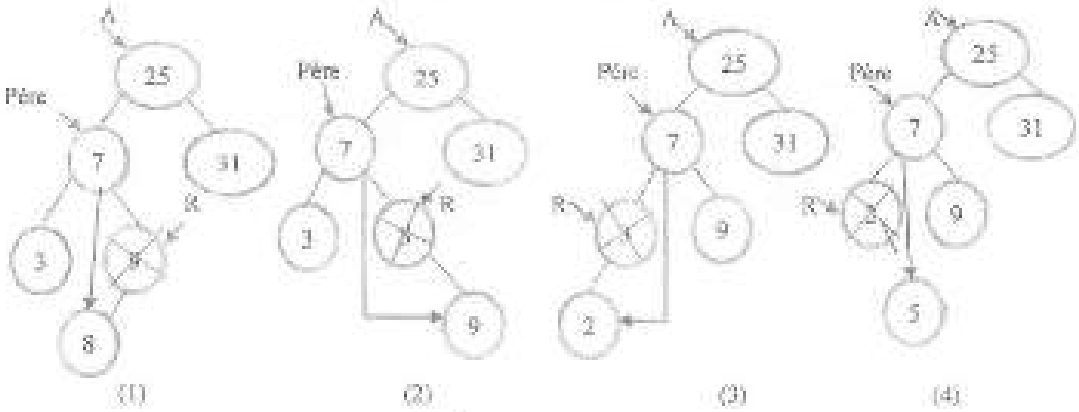




^pere.nuoc_gauche←nil ; libérer(R) ;

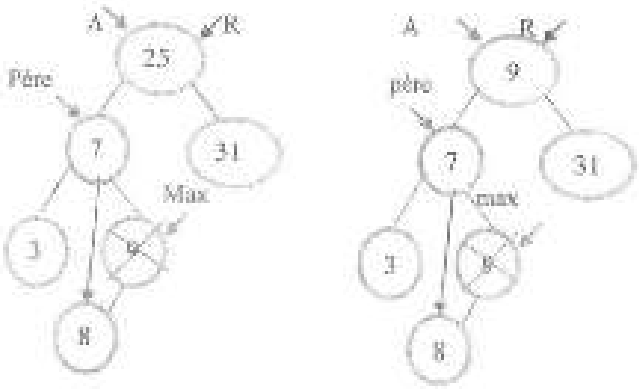
^pere.nuoc_droit←nil ; libérer(R) ;

Cas de suppression d'un nœud ayant un seul descendant :



(1) ^père.succ_droit←^R.succ_gauche ; libéren(R) ;
(2) ^père.succ_droit←^R.succ_droit ; libéren(R) ;
(3) ^père.succ_gauche←^R.succ_gauche ; libéren(R) ;
(4) ^père.succ_gauche←^R.succ_droit ; libéren(R) ;

Cas de suppression d'un nœud ayant deux descendants par exemple le nœud 25 sera remplacé par le nœud 9 :



Exercice : Algorithme de construction d'un arbre binaire ordonné contenant n valeurs entières.

Il s'agit de créer la racine de l'arbre (comportant la première valeur lue), ensuite pour chacune des autres valeurs appeler la fonction **Insere** pour maintenir l'ordre dans l'arbre.

```
Algorithme Const_Arbre ;
Var
  n, x :entier ;
  R, père : Arbre
Debut
  Ecrire ("donnez le nombre de valeurs") ; lire(n) ;
  Ecrire ("donnez la première valeur") ; lire(x) ;
     /* création de la racine*/
  R ← Allouer (Taillede (nœud)) ;
  ^R.info ← x ; ^R.succ_gauche← nil ; ^R. succ_droit ← nil ;
     /* création des autres nœuds*/
  Pour i ← 2 à n
    Faire
      Ecrire ("donnez une autre valeur") ; lire(x) ;
      père←nil ;
      Insere (R, x, père) ; /* appel de la fonction insere */
    Fait ;
    /* Affichage de l'arbre */
 Infixe(R) ;
Fin.
```